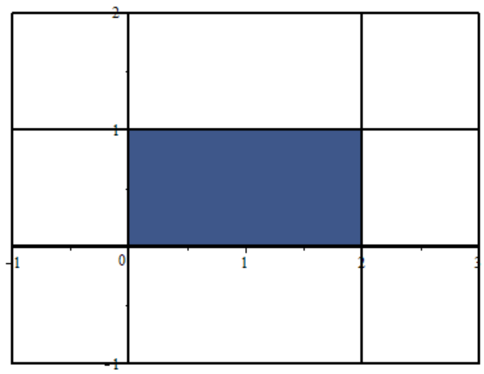
Ministério da Educação
Universidade Federal de Pelotas – Centro de Educação a Distância
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Gabarito dos Exercícios orientados para a Segunda Prova Escrita de Fundamentos de Matemática Aplicada C

1. Nos exercícios a seguir, desenhe a região R e calcule a integral $\iint_R f(x,y)\,dA$:

   a. $\int_0^2 \int_0^1 (1+2x+2y)\,dy\,dx$;

Solução:
A região está definida pelas desigualdades $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 2$, que define um retângulo, como é mostrado na figura a seguir:



Calculamos as integrais iteradas:

$$\int_0^2 \int_0^1 (1+2x+2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 (1+2x+2y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(y + 2xy + 2\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^2 \left(y + 2xy + y^2 \right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(1 + 2x\cdot 1 + 1^2\right) - \left(0 + 2x\cdot 0 + 0^2\right) \right] dx \quad \text{(avaliamos para } y=1 \text{ e } y=0\text{)}$$

$$= \int_0^2 (2+2x)\,dx$$

$$= \left(2x + 2\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \left(2x + x^2 \right)\Big|_{x=0}^{x=2}$$

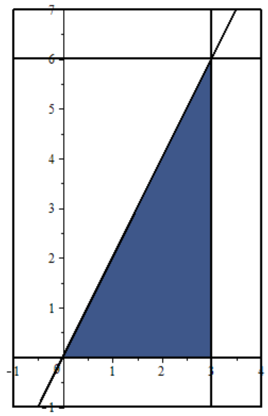
$$= \left(2\cdot 2 + 2^2 \right) - \left(2\cdot 0 + 0^2 \right) = 8 \quad \text{(avaliamos para } x=2 \text{ e } x=0\text{)}$$

Portanto $\int_0^2\int_0^1 (1+2x+2y)\,dy\,dx = 8$

b. $\int_0^6\int_{y/2}^3 (x+y)\,dx\,dy$;

Solução:

A região está definida pelas desigualdades $\frac{y}{2} \le x \le 3$, $0 \le y \le 6$, que define um triângulo, como é mostrado na figura a seguir



$$\int_0^6\int_{y/2}^3 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^6\left(\int_{y/2}^3 (x+y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{x=y/2}^{x=3} dy \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \int_0^6 \left[\left(\frac{3^2}{2} + 3y\right) - \left(\frac{(y/2)^2}{2} + \frac{y}{2}\cdot y\right)\right] dy \quad \text{(avaliamos para } x = 3 \text{ e } x = y/2\text{)}$$

$$= \int_0^6 \left[\frac{9}{2} + 3y - \frac{5}{8}y^2\right] dy$$

$$= \int_0^6 \left[\frac{9}{2} + 3y - \frac{5}{8}y^2\right] dy$$

$$= \left[\frac{9}{2}y + 3\frac{y^2}{2} - \frac{5}{8}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=6} \qquad \text{integramos em relação a } y,$$

$$= \left[\frac{9}{2}\cdot 6 + \frac{3}{2}\cdot 6^2 - \frac{5}{24}\cdot 6^3\right] - \left[\frac{9}{2}\cdot 0 + \frac{3}{2}\cdot 0^2 - \frac{5}{24}\cdot 0^3\right] \text{ avaliamos para } y = 6 \text{ e } y = 0$$

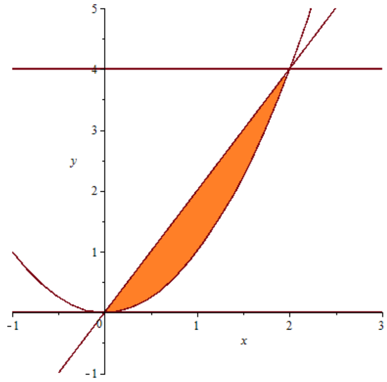
$$= 27 + 54 - 45 = 36$$

Assim, $\int_0^6\int_{y/2}^3 (x+y)\,dx\,dy = 36$.

c. $\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\,dy$;

Solução:

A região está definida pelas desigualdades $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$, $0 \le y \le 4$, como é mostrado na figura a seguir



Calculamos as integrais iteradas:

$$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\,dy=\int_0^4\left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^4\left(\frac{x^3}{3}y^2\right)\Bigg|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}}dy \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } x\text{)}$$

$$=\int_0^4\left[\left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3}y^2\right)-\left(\frac{(y/2)^3}{3}y^2\right)\right]dy \quad \text{(avaliamos para } x=\sqrt{y}\text{ e } x=\text{y/2)}$$

$$=\int_0^4\left[\frac{1}{3}y^{7/2}-\frac{1}{24}y^5\right]dy$$

$$=\left(\frac{1}{3}\frac{y^{9/2}}{9/2}-\frac{1}{24}\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} \quad \text{(integramos em relação a } y\text{)}$$

$$=\left(\frac{2}{27}\cdot 4^{9/2}+\frac{1}{144}4^6\right)-\left(\frac{2}{27}\cdot 0^9+\frac{1}{144}0^6\right) \quad \text{(avaliamos para } y=4 \text{ e } y=0\text{)}$$

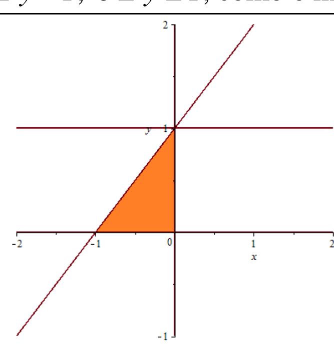
$$=\frac{256}{27}$$

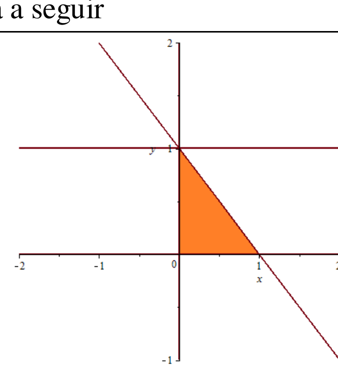
Enfim, $\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dx\,dy=\frac{256}{27}$.

d. $\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}dx\,dy+\int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\,dx\,dy$.

Solução:

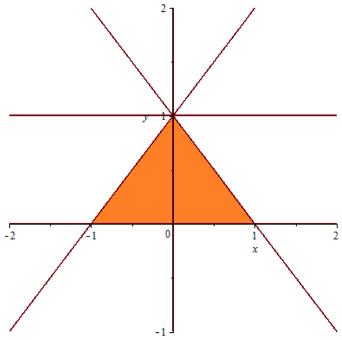
A região está definida pelas desigualdades $y-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$ junto com $0\le x\le y-1$, $0\le y\le 1$, como é mostrado na figura a seguir





$y-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$	$0\le x\le y-1$, $0\le y\le 1$

Ou seja, a região de integração fica a união das regiões mostradas:



Calculamos cada parcela:

$$\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{y-1}^0 e^{x+y}dx\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(e^{x+y}\right)\Big|_{x=y-1}^{x=0} dy \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \int_0^1\left[\left(e^y\right)-\left(e^{2y-1}\right)\right]dy \quad \text{(avaliamos para } x=0 \text{ e } x=y-1\text{)}$$

$$= \left(e^y - \frac{1}{2}e^{2y-1}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \quad \text{(integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \left(e - \frac{1}{2}e\right)-\left(1-\frac{1}{2}e^{-1}\right) \quad \text{(avaliamos para } y=1 \text{ e } y=0\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1} - 1$$

Agora:

$$\int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-y} e^{x+y}dx\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(e^{x+y}\right)\Big|_{x=0}^{x=1-y} dy \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \int_0^1\left[\left(e^1\right)-\left(e^y\right)\right]dy \quad \text{(avaliamos para } x=1-y \text{ e } x=0\text{)}$$

$$= \left(e^1 y - e^y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \quad \text{(integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= (e-e)-\left(0-e^0\right) \quad \text{(avaliamos para } y=1 \text{ e } y=0\text{)}$$

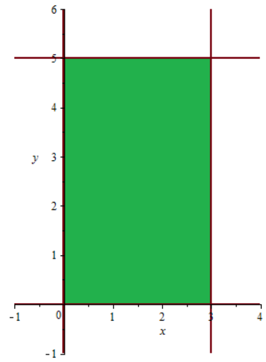
$$= 1$$

Logo, $\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}dx\,dy + \int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1} - 1 + 1 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1}$.

2. Escreva as integrais iteradas usando ambas as ordens de integração e utilize mais adequada para avaliar a integral sobre a região R:
   a. $\iint_R xy\,dA$, R retângulo com vértices $(0,0)$, $(0,5)$, $(3,5)$, $(3,0)$;

Solução:

Primeiro, desenhamos a região de integração:



Como se trata de um retângulo, a ordem de integração é indiferente; por exemplo

$$\iint_R xy\,dA = \int_0^3\left(\int_0^5 xy\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^3 \left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=5} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^3 \left[\left(\frac{25}{2}x\right) - (0)\right] dx \quad \text{(avaliamos para } y=0 \text{ e } y=5\text{)}$$

$$= \int_0^3 \frac{25}{2}x\,dx$$

$$= \left(\frac{25}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \left(\frac{25}{4}\cdot 9\right) - (0) \quad \text{(avaliamos para } x=0 \text{ e } x=3\text{)}$$

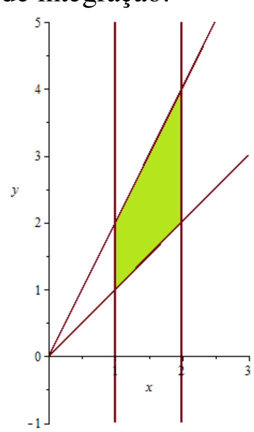
$$= \frac{225}{4}$$

Assim, $\iint_R xy\,dA = \dfrac{225}{4}$

b. $\iint_R \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dA$, R trapézio limitado por $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$;

Solução:

Primeiro, desenhamos a região de integração:



Neste caso, é melhor escolher a ordem $dy\,dx$, pois fixando x, vemos que y varia de x a $2x$, ou seja, $x \le y \le 2x$, $1 \le x \le 2$:

$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA = \int_0^1\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1\left(\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2x} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\ln(5x^2)-\ln(2x^2)\right]dx \quad \text{(avaliamos para } y=0 \text{ e } y=5\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(\frac{5x^2}{2x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(\frac{5}{2}\right)dx$$

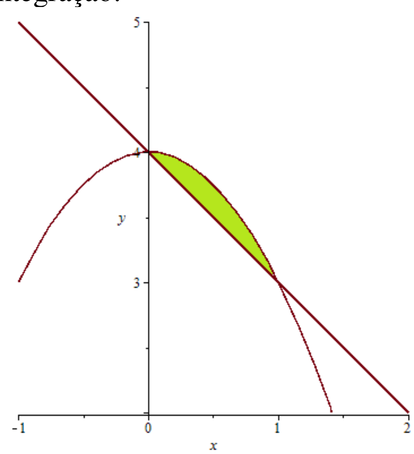
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)x\Bigg|_{x=0}^{x=1} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{(avaliamos para } x=0 \text{ e } x=1\text{)}$$

c. $\iint_R -2y\,dA$, R região limitada por $y=4-x^2$, $y=4-x$;

Solução:

Desenhamos a região de integração:



Para saber os valores de x nos pontos de interseção das curvas $y=4-x^2$ e $y=4-x$, resolvemos a equação $4-x^2=4-x$, que dá $x=0$ ou $x=1$.

Neste caso, é melhor escolher a ordem de integração $dy\,dx$, pois se fixamos x, então y varia de $4-x$ (reta) a $4-x^2$ (parábola).

Ou seja, a região de integração fica determinada pelas desigualdades $4-x \le y \le 4-x^2$, $0 \le x \le 1$.

Assim,

$$\iint_R -2y\,dA = \int_0^1\int_{4-x}^{4-x^2}(-2y)\,dy\,dx = \int_0^1\left(\int_{4-x}^{4-x^2}(-2y)\,dy\right)dx$$

$$= -\int_0^1 \left(y^2\right)\Big|_{y=4-x}^{y=4-x^2} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= -\int_0^1 \left[(4-x^2)^2-(4-x)^2\right]dx \quad \text{(avaliamos para } y=4-x \text{ e } y=4-x^2\text{)}$$

$$= -\int_0^1 (8x-9x^2+x^4)\,dx$$

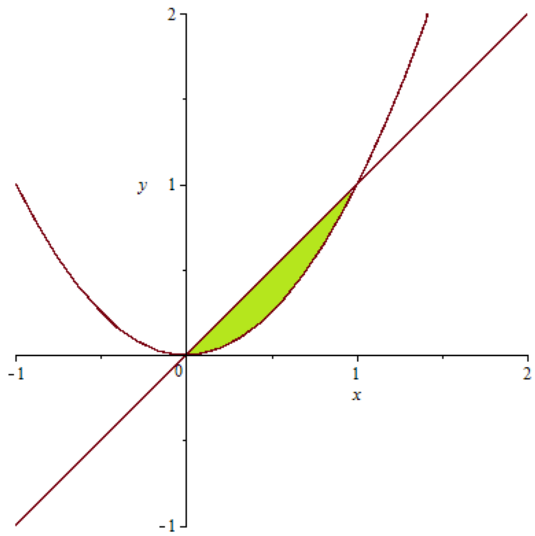
$$= -\left(4x^2-3x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= -\frac{5}{4} \quad \text{(avaliamos para } x=0 \text{ e } x=1\text{)}$$

d. $\iint_R (x+y)\,dA$, R região limitada por $y=x^2$, $y=x$.

Solução:

Primeiro, desenhamos a região de integração



Para saber os valores de x nos pontos de interseção das curvas $y=x^2$ e $y=x$, resolvemos a equação $x^2=x$, que dá $x=0$ ou $x=1$.

Ou seja, a região de integração fica determinada pelas desigualdades $x^2 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$.

Assim,

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) - \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) \right] dx \quad \text{(avaliamos para } y = x^2 \text{ e } y = x\text{)}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

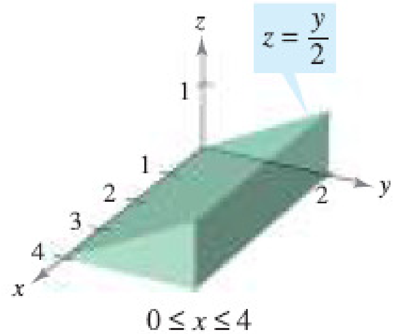
$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) \quad \text{(avaliamos para } x = 0 \text{ e } x = 1\text{)}$$

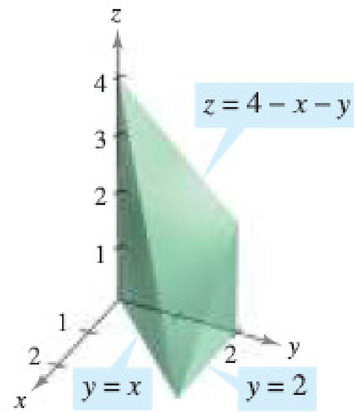
$$= \frac{7}{10}$$

Assim, $\iint_R (x+y)\,dA = \frac{7}{10}$.

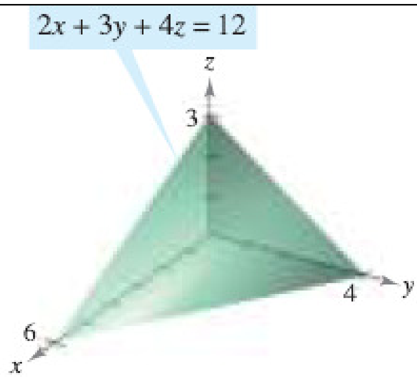
3. Utilize a integração dupla para calcular o volume dos sólidos a seguir:



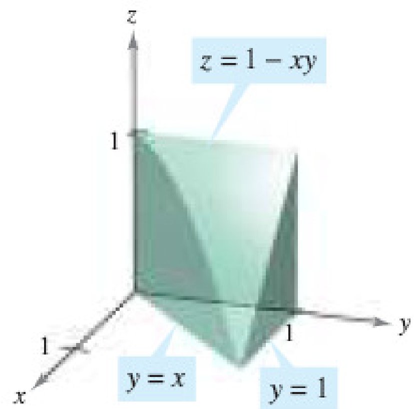
a.



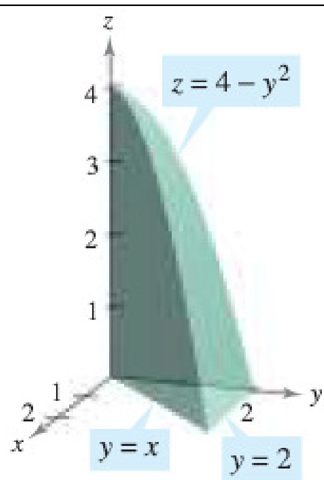
b.



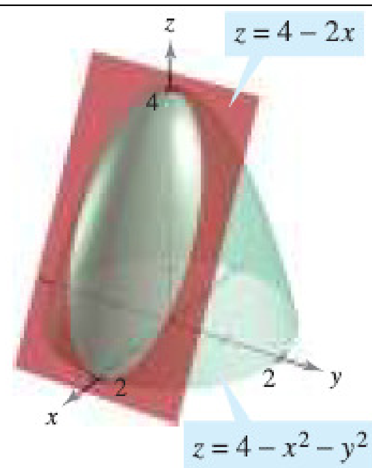
c.



d.



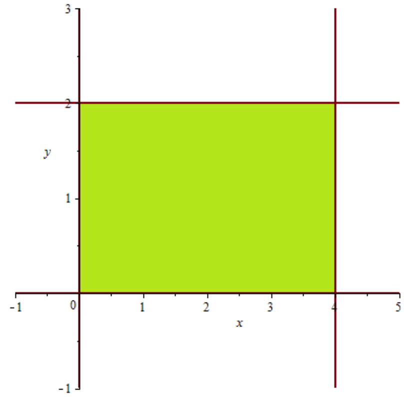
e.



f.

Solução:

a. O volume está dado pela integral $\iint\limits_R \left(\frac{y}{2}\right) dA$ onde R é o retângulo mostrado na figura e dado pelas desigualdades $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le 4$:



Agora calculamos a integral dupla:

$$\iint_R \left(\frac{y}{2}\right) dA = \int_0^4 \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right) dy\, dx = \int_0^4 \left(\int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^4 [(1)-(0)]\, dx \quad \text{(avaliamos para } y=0 \text{ e } y=1\text{)}$$

$$= \int_0^4 dx$$

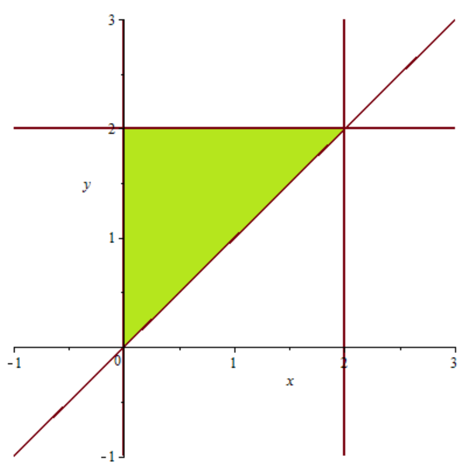
$$= (x)\Big|_{x=0}^{x=4} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= 4-0 \quad \text{(avaliamos para } x=0 \text{ e } x=4\text{)}$$

$$= 4$$

Assim, o volume do sólido é $\iint_R \left(\frac{y}{2}\right) dA = 4$ unidades de volume.

b. O volume está dado pela integral $\iint_R (4-x-y)\, dA$ onde R é o triângulo mostrado na figura e dado pelas desigualdades $x \le y \le 2$, $0 \le x \le 2$:



Agora calculamos a integral dupla escolhendo da ordem de integração $dy\,dx$:

$$\iint_R (4-x-y)\,dA = \int_0^2\int_x^2 (4-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2\left(\int_x^2 (4-x-y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^2 \left[(8-2x-2) - \left(4x - x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\right] dx \quad \text{(avaliamos para } y = x \text{ e } y = 2\text{)}$$

$$= \int_0^2 \left(6 - 6x + \frac{3}{2}x^2\right) dx$$

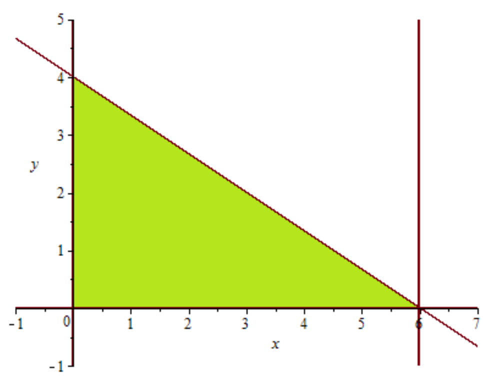
$$= \left(6x - 3x^2 + \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= (12 - 12 + 4) - 0 \quad \text{(avaliamos para } x = 0 \text{ e } x = 2\text{)}$$

$$= 4$$

Assim, o volume do sólido é $\iint_R (4-x-y)\,dA = 4$ unidades de volume.

c. O volume está dado pela integral $\frac{1}{4}\iint_R (12-2x-3y)\,dA$ onde R é o triângulo mostrado na figura e dado pelas desigualdades $0 \le y \le 4\left(1 - \frac{x}{6}\right)$, $0 \le x \le 6$:



Agora calculamos a integral dupla escolhendo da ordem de integração $dy\,dx$:

$$\frac{1}{4}\iint_R (12-2x-3y)\,dA = \frac{1}{4}\int_0^6\int_0^{4(1-\frac{x}{6})} (12-2x-3y)\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_0^6\left(\int_0^{4(1-\frac{x}{6})} (12-2x-3y)\,dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \left(12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4(1-\frac{x}{6})} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \left(48(1-\frac{x}{6}) - 8x(1-\frac{x}{6}) - \frac{3}{2}\left(4(1-\frac{x}{6})\right)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(6 - 2x + \frac{1}{6}x^2 \right) dx$$

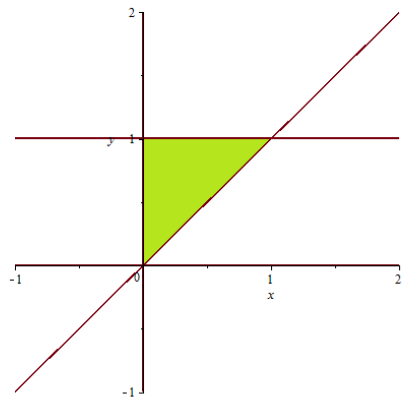
$$= \left(6x - x^2 + \frac{x^3}{18} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=6} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= (36 - 36 + 12) - 0 \quad \text{(avaliamos para } x = 0 \text{ e } x = 6\text{)}$$

$$= 4$$

Assim, o volume do sólido é $\frac{1}{4}\iint_R (12 - 2x - 3y)\,dA = 12$ unidades de volume.

d. O volume está dado pela integral $\iint_R (1 - xy)\,dA$ onde R é o triângulo mostrado na figura e dado pelas desigualdades $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$:



Agora calculamos a integral dupla escolhendo da ordem de integração $dx\,dy$:

$$\iint_R (1 - xy)\,dA = \int_0^1\int_0^y (1 - xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y (1 - xy)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(x - y\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=y} dy \quad \text{(aqui, integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \int_0^1 \left[\left(y - \frac{y^3}{2} \right) - (0) \right] dy \quad \text{(avaliamos para } x = 0 \text{ e } x = y\text{)}$$

$$= \int_0^1 \left(y - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

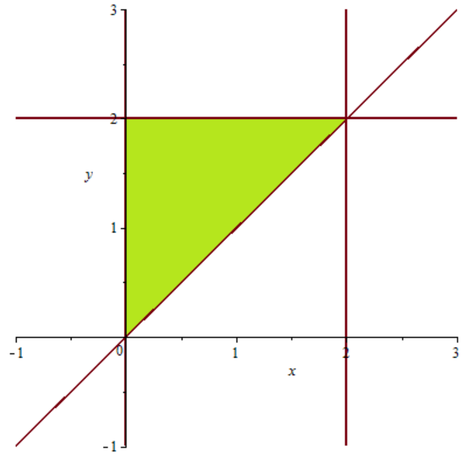
$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} \quad \text{(integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - 0 \quad \text{(avaliamos para } y = 0 \text{ e } y = 1\text{)}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Então o volume está dado por $\iint_R (1-xy)\,dA = \dfrac{3}{8}$ unidades de volume.

e. O volume está dado pela integral $\iint_R (4-y^2)\,dA$ onde R é o triângulo mostrado na figura e dado pelas desigualdades $x \le y \le 2$, $0 \le x \le 2$:



Agora calculamos a integral dupla escolhendo da ordem de integração $dy\,dx$:

$$\iint_R (4-y^2)\,dA = \int_0^2\int_x^2 (4-y^2)\,dy\,dx = \int_0^2\left(\int_x^2 (4-y^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2} dx \qquad \text{(aqui, integramos em relação a } y\text{)}$$

$$= \int_0^2 \left[\left(8-\frac{8}{3}\right) - \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right] dx \quad \text{(avaliamos para } y = x \text{ e } y = 2\text{)}$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{16}{3} - 4x + \frac{x^3}{3}\right) dx$$

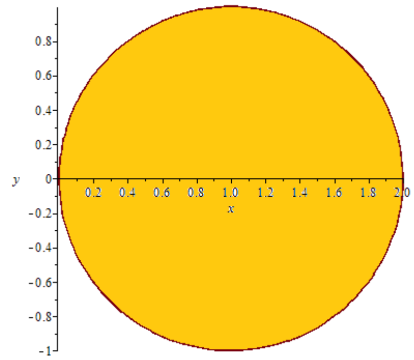
$$= \left(\frac{16}{3}x - 2x^2 + \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} \quad \text{(integramos em relação a } x\text{)}$$

$$= \left(\frac{32}{3} - 8 + \frac{4}{3}\right) - 0 \quad \text{(avaliamos para } x = 0 \text{ e } x = 2\text{)}$$

$$= 4$$

Assim, o volume do sólido é $\iint_R (4-y^2)\,dA = 4$ unidades de volume.

f. O volume está dado pela integral $\iint_R \left[(4-x^2-y^2)-(4-2x)\right]dA$, ou, $\iint_R (2x-x^2-y^2)\,dA$ onde R é o círculo mostrado na figura e dado pela interseção das superfícies, ou seja, limitada pela equação $4-x^2-y^2 = 4-2x$, ou seja, $x^2-2x+y^2=0$:



Agora construímos a integral dupla escolhendo da ordem de integração $dy\,dx$:

$$\iint_R \left(2x - x^2 - y^2\right) dA = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \left(2x - x^2 - y^2\right) dy\,dx$$

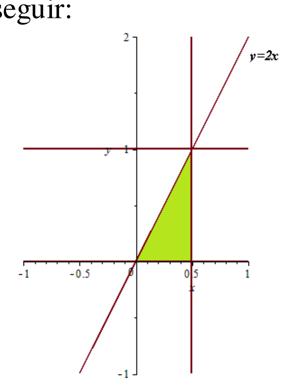
Esta integral será calculada posteriormente, utilizando coordenadas polares.

4. Calcule a integral iterada, trocando a ordem de integração:

a. $\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} x^2 y^2\,dx\,dy$;

Solução:

A região de integração está dada pelas desigualdades $\frac{y}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $0 \le y \le 1$, cujo gráfico é mostrado a seguir:



Então podemos ver que a região também está delimitada pelas desigualdades $0 \le y \le 2x$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$, que dá origem à igualdade:

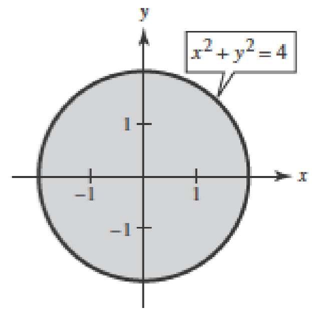
$$\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} x^2 y^2\,dx\,dy = \int_0^{1/2} \int_0^{2x} x^2 y^2\,dy\,dx = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{2x} x^2 y^2\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left(x^2 \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{8}{3} x^5 \right) dx = \left(\frac{8}{18} x^6 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{144}$$

b. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,dy\,dx$;

Solução:

A região de integração está dada pelas desigualdades $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 2$, cujo gráfico é mostrado a seguir:



Se invertemos a ordem de integração, vemos que as desigualdades ficam $-\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}$, $-2 \le y \le 2$, e a integral dupla fica

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-y^2}\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-y^2}\; x\right)\Big|_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy$$

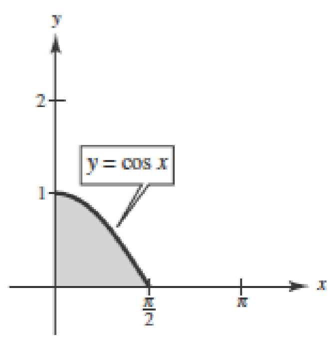
$$= \int_{-2}^{2} 2\left(4-y^2\right) dy = \left(8y - \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{y=-2}^{y=2}$$

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

c. $\int_0^1\int_0^{\operatorname{arccos}(y)} \operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\, dx\, dy$.

Solução:

A região de integração está dada pelas desigualdades $0 \le x \le \operatorname{arccos}(y)$, $0 \le x \le 1$, cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região também é descrita pelas desigualdades $0 \le y \le \cos(x)$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, o que conduz à igualdade das integrais duplas

$$\int_0^1\int_0^{\operatorname{arccos}(y)} \operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos(x)} \operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\;\; y\right)\Big|_{y=0}^{y=\cos(x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)^{1/2} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, dx$$

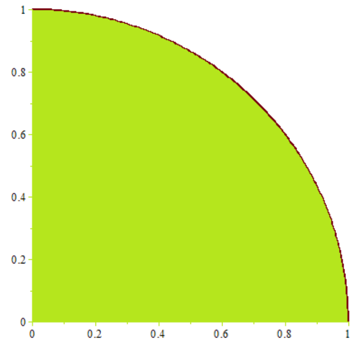
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

5. Calcule as integrais a seguir utilizando coordenadas polares:

a. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\, dx\, dy$;

Solução:

A região de integração fica definida pelas desigualdades $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$ cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região em coordenadas polares está dada por $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, e temos a igualdade de integrais:

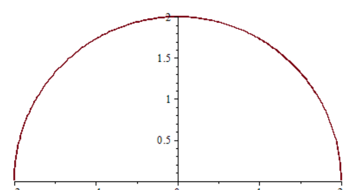
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r\,\mathrm{sen}(\theta)\cdot r\,d\theta\,dr = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(-r^2\cos(\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr$$

$$= \int_0^1 \left(0-\left(-r^2\right)\right) dr = \int_0^1 r^2\,dr = \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{3}$$

b. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$;

Solução:

A região de integração fica definida pelas desigualdades $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 2$ cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região em coordenadas polares está dada por $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$, e temos a igualdade de integrais:

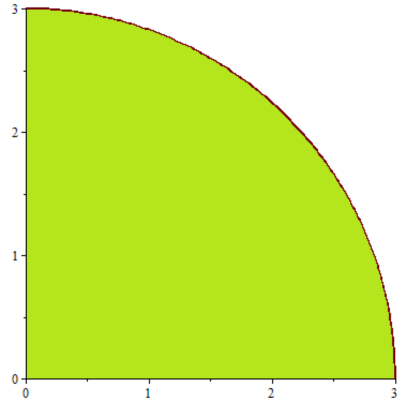
$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^3\,dr \right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\,d\theta = 4\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\pi$$

c. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$;

Solução:

A região de integração fica definida pelas desigualdades $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$, $0 \le x \le 3$ cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região em coordenadas polares está dada por $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, e temos a igualdade de integrais:

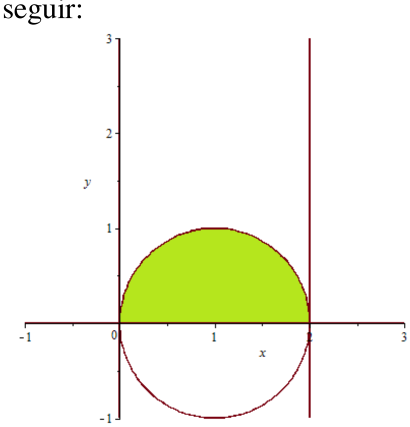
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r^3 \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 r^4\, dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{243}{5}\, d\theta = \frac{243}{5}\theta \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{243}{10}\pi$$

d. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dy\, dx$;

Solução:

A região de integração fica definida pelas desigualdades $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$, $0 \le x \le 2$ cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região em coordenadas polares está dada por $0 \le r \le 2\cos(\theta)$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, desde que a igualdade $y = \sqrt{2x-x^2}$ significa que $x^2 + y^2 = 2x$, ou seja, $r^2 = 2r\cos(\theta)$, do qual resulta que $r = 2\cos(\theta)$. Então temos a igualdade de integrais:

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} r^2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

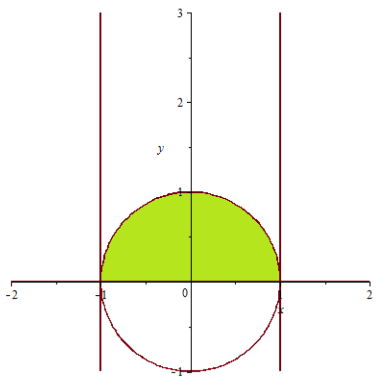
$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\theta)} r^3\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=2\cos(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\cos^5(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta = -\frac{4}{6}\left(\cos^6(\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{2}{3}$$

e. $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\cos(x^2+y^2)\,dy\,dx$.

Solução:

A região de integração fica definida pelas desigualdades $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$ cujo gráfico é mostrado a seguir:



Esta região em coordenadas polares está dada por $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\pi$. Então temos a igualdade de integrais:

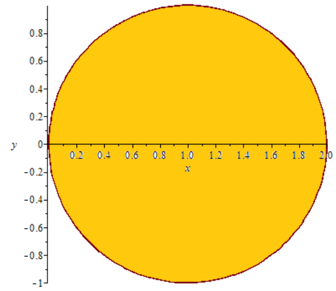
$$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\cos(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^1\cos(r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^1\cos(r^2)\cdot r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(r^2)\right)\Big|_{r=0}^{r=1}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(1)\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(1)\left(\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sen}(1)$$

Cálculo do volume $\iint_R (2x-x^2-y^2)\,dA = \int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx$ **da questão 3 f:**

Lembremos que a região de integração R é o círculo mostrado na figura, limitada pela equação $x^2-2x+y^2=0$:



A partir da discussão do exercício 5 d, podemos ver que a região pode ser descrita pelas desigualdades em coordenadas polares $0 \le r \le 2\cos(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, o que origina a integral

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} \left(2r\cos(\theta)-r^2\right)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\theta)} \left(2r^2\cos(\theta)-r^3\right)dr\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}r^3\cos(\theta)-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2\cos(\theta)} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{16}{3}\cos^4(\theta)-4\cos^4(\theta)\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{4}{3}\cos^4(\theta)\right)d\theta$$

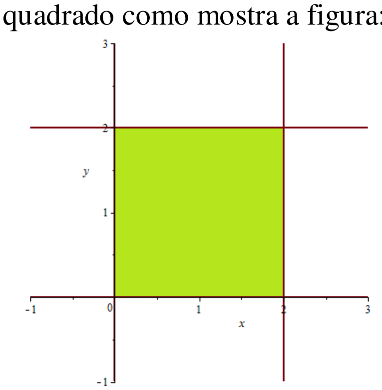
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\cos^3(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+\frac{3}{8}\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+\frac{3}{8}\theta\right)\Bigg|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Assim, o volume está dado por $\iint_R (2x-x^2-y^2)\,dA = \int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx = \frac{\pi}{2}$ unidades de volume.

6. Calcule a massa e o centro de massa da lâmina descrita pelas desigualdades, sabendo que sua densidade por unidade de área é $\rho(x,y)=xy$.
   a. $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$;

Solução:

A lâmina em questão é um quadrado como mostra a figura:



A massa está dada por

$$m=\iint_R \rho(x,y)\,dA=\int_0^2\int_0^2 (xy)\,dy\,dx=\int_0^2\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{2} dx=\int_0^2 2x\,dx=\left(x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=4\,.$$

Agora, calculamos o centro de massa:

$$\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA=\int_0^2\int_0^2 (x^2y)\,dy\,dx=\int_0^2\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{2} dx=\int_0^2 2x^2\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{16}{3};$$

$$\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA=\int_0^2\int_0^2 (xy^2)\,dy\,dx=\int_0^2\left(x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{2} dx=\int_0^2 \frac{8}{3}x\,dx=\left(\frac{4}{3}x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{16}{3};$$

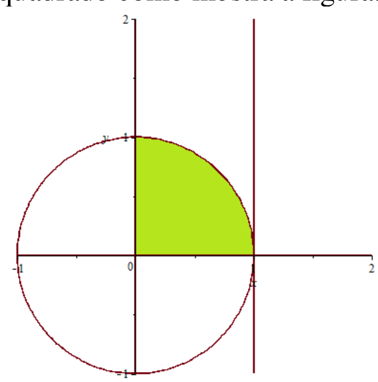
Enfim, as coordenadas do centro de massa são

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA=\frac{16/3}{4}=\frac{4}{3}\ \text{ e }\ \bar{y}=\frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA=\frac{16/3}{4}=\frac{4}{3}\,.$$

b. $0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$.

Solução:

A lâmina em questão é um quadrado como mostra a figura:



A massa está dada por

$$m=\iint_R \rho(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (xy)\,dy\,dx \text{ onde usamos coordenadas polares}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(r^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(r^3\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)dr\,d\theta\,.$$

$$=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\,d\theta=\frac{1}{8}\operatorname{sen}^2(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}=\frac{1}{8}$$

Agora, calculamos o centro de massa:

$$\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (xy^2)\,dy\,dx \text{ onde usamos coordenadas polares}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(r^3\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\right)dr\,d\theta\ ;$$

$$=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\,d\theta=\frac{1}{12}\operatorname{sen}^3(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}=\frac{1}{12}$$

$$\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 y\right) dy\,dx \text{ onde usamos coordenadas polares}$$

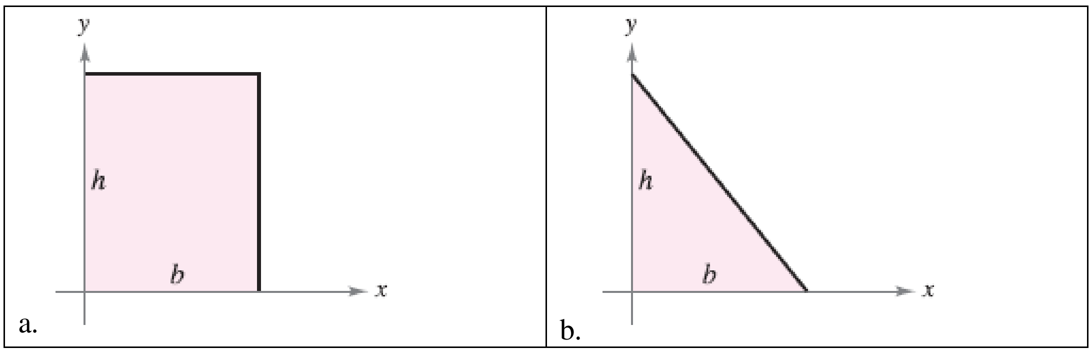
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(r^2 \operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right)\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(r^3 \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\right) dr\,d\theta \quad ;$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{12}\left(-\cos^3(\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{12}$$

Enfim, as coordenadas do centro de massa são

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,dA = \frac{1/12}{1/8} = \frac{2}{3} \text{ e } \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,dA = \frac{1/12}{1/8} = \frac{2}{3}.$$

7. Calcule os momentos de inércia de cada lâmina sabendo que a densidade é $\rho = 1$ grama por cm^2



Solução:

a. A massa da lâmina é $m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^h 1\,dy\,dx = \int_0^b h\,dx = bh$.

Agora, os momentos de inércia são

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^h y^2\,dy\,dx = \int_0^b\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=h} dx = \int_0^b \frac{h^3}{3}dx = \frac{1}{3}bh^3;$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^h x^2\,dy\,dx = \int_0^b \left(x^2 y\right)\Big|_{y=0}^{y=h} dx = \int_0^b hx^2 dx = \frac{1}{3}h\left(x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{3}b^3 h.$$

b. A massa da lâmina é

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^{h(1-x/b)} 1\,dy\,dx = \int_0^b h(1-x/b)dx = h\left(x - \frac{1}{b}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{2}bh.$$

Agora, os momentos de inércia são

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^{h(1-x/b)} y^2\,dy\,dx = \int_0^b\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=h(1-x/b)} dx = \int_0^b \frac{h^3}{3}\left(1-\frac{x}{b}\right)^3 dx \quad ;$$

$$= \frac{1}{12}h^3 b\left(-\left(1-\frac{x}{b}\right)^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{12}bh^3(0-(-1)) = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dA = \int_0^b\int_0^{h(1-x/b)} x^2\,dy\,dx = \int_0^b \left(x^2 y\right)\Big|_{y=0}^{y=h(1-x/b)} dx = \int_0^b hx^2\left(1-\frac{x}{b}\right)dx \quad .$$

$$= \left(\frac{1}{3}hx^3 - \frac{h}{b}\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{3}hb^3 - \frac{1}{4}hb^3 = \frac{1}{12}b^3 h$$