Ministério da Educação
Universidade Federal de Pelotas – Centro de Educação a Distância
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Exercícios orientados para a Prova Escrita de Fundamentos de Matemática Aplicada C
Prof. Germán Suazo

1. Encontre o domínio natural das funções a seguir.

   a. $z = \dfrac{xy}{x-y}$

   Solução:

   O domínio natural da função $z = \dfrac{xy}{x-y}$ é o conjunto

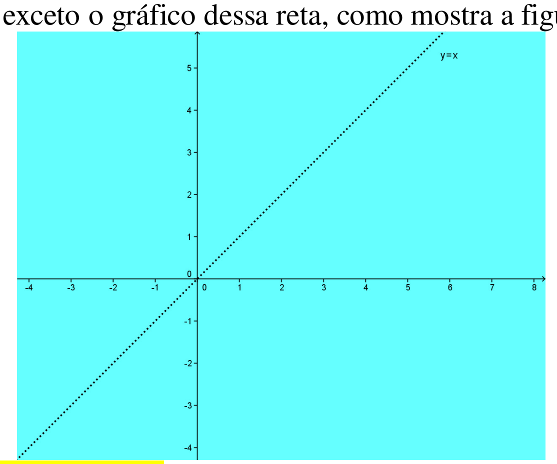
   $$dom(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, z \text{ assume um valor real}\}, \text{ ou,}$$

   $$dom(z) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \frac{xy}{x-y} \text{ assume um valor real}\right\}.$$

   Por outro lado, observamos que a expressão $\dfrac{xy}{x-y}$ assume um valor real quando $x - y \neq 0$. Então

   $$dom(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x - y \neq 0\}.$$

   Agora, vamos desenhar tal conjunto. Sabemos que $x - y = 0$ define uma reta que passa pela origem e tem coeficiente angular 1. Então o domínio é todo o plano cartesiano exceto o gráfico dessa reta, como mostra a figura



   b. $f(x,y) = \ln(4 - x - y)$

   Solução:

   O domínio natural da função $f(x,y) = \ln(4 - x - y)$ é o conjunto

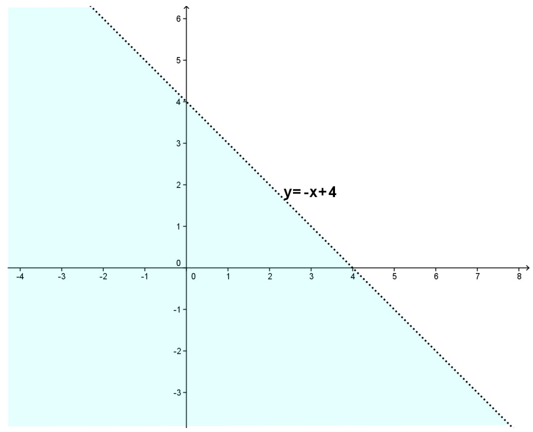
   $$dom(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, f(x,y) \text{ assume um valor real}\}, \text{ ou,}$$

   $$dom(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \ln(4 - x - y) \text{ assume um valor real}\}.$$

   Por outro lado, observamos que a expressão $\ln(4 - x - y)$ assume um valor real quando $4 - x - y > 0$. Então

   $$dom(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, 4 - x - y > 0\}.$$

Agora, vamos desenhar tal conjunto. Sabemos que $4-x-y=0$ define uma reta que passa pelo ponto $(4,0)$ tem coeficiente angular -1. Também, observe que $4-x-y>0$ é equivalente à equação $y<-x+4$ Então o domínio é o semi-plano abaixo da reta $y=-x+4$ sem considerar a própria reta, como mostra a figura abaixo



c. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

Solução:

O domínio natural da função $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ é o conjunto

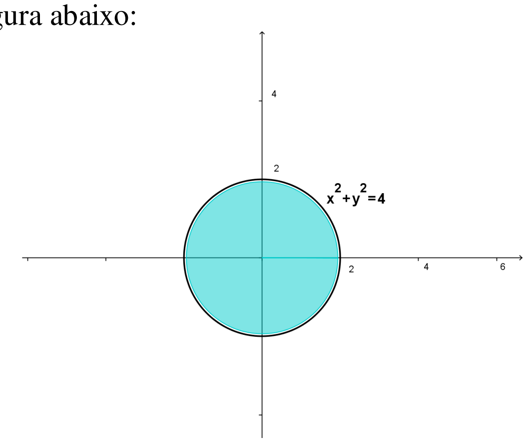
$$dom(z)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 / f(x,y) \text{ assume um valor real}\}, \text{ ou,}$$

$$dom(z)=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 / \sqrt{4-x^2-y^2} \text{ assume um valor real}\right\}.$$

Por outro lado, observamos que a expressão $\sqrt{4-x^2-y^2}$ assume um valor real quando $4-x^2-y^2\geq 0$. Então

$$dom(z)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 / 4-x^2-y^2\geq 0\}.$$

Agora, vamos desenhar tal conjunto. Sabemos que $4-x^2-y^2=0$, ou, equivalentemente, $x^2+y^2=4$ define uma circunferência com centro na origem e raio 2. Também, observe que $4-x^2-y^2\geq 0$ é equivalente à equação $x^2+y^2\leq 4$ Então o domínio é o interior da referida circunferência junto com ela mesma. Veja a figura abaixo:



d. $g(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

Solução:

O domínio natural da função $g(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ é o conjunto

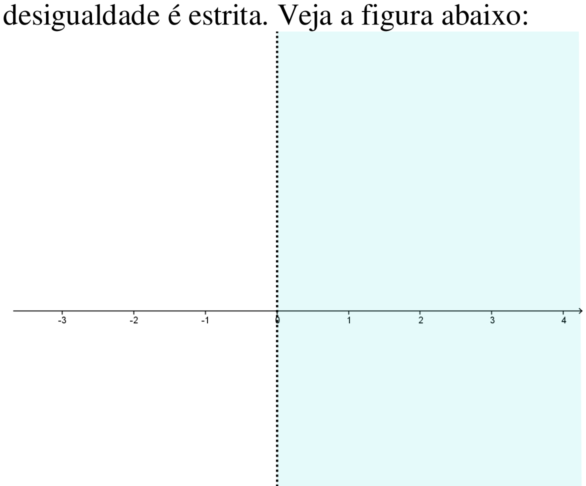
$$dom(z)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,/\, g(x,y) \text{ assume um valor real}\}, \text{ ou,}$$

$$dom(z)=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,/\, \frac{y}{\sqrt{x}} \text{ assume um valor real}\right\}.$$

Por outro lado, observamos que a expressão $\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ assume um valor real quando $x>0$. Então

$$dom(z)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,/\, x>0\}.$$

Agora, vamos desenhar tal conjunto. Sabemos que $x=0$ é uma reta horizontal coincidindo com o eixo y. A parte $x>0$ corresponde ao semiplano à direita do eixo y. Então o domínio é o referido semiplano sem incluir o próprio eixo y desde que a desigualdade é estrita. Veja a figura abaixo:



2. O tempo de espera de um cliente numa fila está dado por $E(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ para $x>y$ onde y é a taxa média de chegada (número de pessoas que chega na fila por unidade de tempo) e x é a taxa média de serviço (número de pessoas atendidas por unidade de tempo). Calcule

   a. $E(15,9)$; b. $E(12,7)$; c. $E(15,13)$; d. $E(5,2)$

Solução

a. $E(15,9)=\dfrac{1}{15-9}=\dfrac{1}{6}$ unidades de tempo;

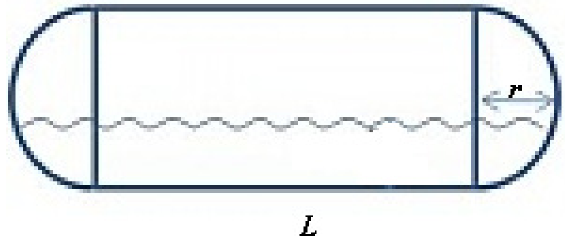
b. $E(12,7)=\dfrac{1}{12-7}=\dfrac{1}{5}$ unidades de tempo;

c. $E(15,13)=\dfrac{1}{15-13}=\dfrac{1}{2}$ unidades de tempo;

d. $E(5,2)=\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{1}{3}$ unidades de tempo.

3. Um tanque de propano é construído soldando hemisférios nos extremos de um cilindro circular reto. Escreva o volume do tanque como uma função do raio r do cilindro e dos hemisférios e o comprimento L do cilindro.

Solução: O formato plano do tanque é mostrado na figura abaixo:



Assim, o volume V desse tanque está dado pelo volume de uma esfera de raio r mais o volume de um cilindro circular reto de raio r e comprimento L.

Então $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 L = \pi r^2 \cdot \left(\frac{4}{3} r + L\right)$.

4. Diga se as seguintes funções são contínuas em (0,0):

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução:

Primeiro vamos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Então temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) = 0.$$

Assim, vemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Portanto, **a função $f(x,y)$ é contínua em (0,0)**.

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução:

Na parte a, já foi calculado $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Mas, vemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0)$.

Portanto, **a função $f(x,y)$ não é contínua em (0,0)**.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução:

Primeiro vamos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Então temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Este último limite não existe, pois por exemplo, tomando limites pelos eixos:

Se $y=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, e

Se $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{0}-\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{\sqrt{y}} = -\infty$.

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Portanto, **a função** $f(x,y)$ **não é contínua em (0,0)**.

d. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{xy}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução:

Neste caso, dada a forma da função, podemos utilizar a transformação polar cujas equações são $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, sendo que $x^2+y^2=r^2$, e então temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r^2)}{r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)} \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r^2)}{r^2}$$

$$= \frac{1}{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)} \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{sen}(r^2)\cdot 2r}{2r} = \frac{1}{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)} \cdot \lim_{r\to 0} \mathrm{sen}(r^2)$$

e devemos ter cuidado neste caso, pois se o denominador $\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$ é diferente de zero, então tal limite é zero, mas se o denominador $\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$, teremos que $\mathrm{sen}(\theta)=0$ ou $\cos(\theta)=0$, o que acontece quando $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$, que são as direções dos eixos x e y.

Mas, especificamente podemos ver que se $x=0$ (eixo y), então $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(0^2+y^2)}{0\cdot y} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y^2)}{0}$ que não existe porque os limites laterais são $+\infty$ e $-\infty$.

Assim, como foram calculados valores diferentes para o limite (zero e não existente), podemos concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Portanto, **a função** $f(x,y)$ **não é contínua em (0,0)**.

e. $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(xy), & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução:

Neste caso, também pela forma da função, podemos utilizar a transformação polar cujas equações são $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$, sendo que $x^2 + y^2 = r^2$, e então temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2 \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) \ln\left(r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\right)$$

$$= \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[r^2 \ln\left(r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\right)\right]$$

$$= \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[\frac{\ln\left(r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\right)}{\frac{1}{r^2}}\right]$$

$$= \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[\frac{\frac{1}{r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)}\cdot 2r\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)}{-\frac{2}{r^3}}\right]$$

$$= \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[\frac{\frac{2r}{r^2}}{-\frac{2}{r^3}}\right] = \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[\frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^3}}\right]$$

$$= \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)\ \lim_{r\to 0}\left[-r^2\right] = 0$$

observando, que seja qual for o valor de θ, o limite sempre vai ser zero.

Podemos concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Portanto, **a função** $f(x,y)$ **é contínua em (0,0)**

5. Encontre as derivadas parciais f_x e f_y no ponto dado

a. $f(x,y) = e^y \text{sen}(x)$, no ponto $(\pi,0)$;

Solução:

Considerando y constante, temos que

$f_x(x,y) = e^y\cos(x)$, e portanto, $f_x(\pi,0) = e^0\cos(\pi) = 1\cdot(-1) = -1$.

Considerando x constante, temos que

$f_y(x,y) = e^y \text{sen}(x)$, e portanto, $f_y(\pi,0) = e^0 \text{sen}(\pi) = 1\cdot(0) = 0$.

b. $f(x,y) = \cos(2x - y)$, no ponto $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$;

Solução:

Considerando y constante, temos que

$f_x(x,y) = -\text{sen}(2x - y)\cdot(2) = -2\,\text{sen}(2x - y)$, e portanto,

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right) = -2\ \text{sen}\left(2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} = -1.$$

Considerando x constante, temos que

$f_y(x,y) = -\text{sen}(2x - y)\cdot(-1) = \text{sen}(2x - y)$, e portanto,

$$f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

c. $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)$, no ponto $\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

Solução:

Considerando y constante, temos que

$$f_x(x,y)=\cos(xy)\cdot(y)=y\cos(xy)\text{, e portanto,}$$

$$f_x\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

Considerando x constante, temos que

$$f_y(x,y)=\cos(xy)\cdot(x)=x\cos(xy)\text{, e portanto,}$$

$$f_y\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{4})=2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})=2.$$

d. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$, no ponto $(2,-2)$.

Solução:

Considerando y constante, temos que

$$f_x(x,y)=\frac{(x-y)y-xy\cdot 1}{(x-y)^2}=\frac{-y^2}{(x-y)^2}\text{, e portanto,}$$

$$f_x(2,-2)=\frac{-(-2)^2}{(2+2)^2}=-\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

Considerando x constante, temos que

$$f_y(x,y)=\frac{(x-y)x-xy\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y)^2}\text{, e portanto,}$$

$$f_y(2,-2)=\frac{2^2}{(2+2)^2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

6. Se $f(x,y,z)=\dfrac{x}{yz}$, calcule f_x, f_y e f_z no ponto $(1,-1,-1)$.

Solução:

Sendo $f(x,y,z)=\dfrac{x}{yz}$, calculamos as respectivas derivadas parciais.

Para calcular f_x, consideramos y e z constantes, e derivamos $\dfrac{x}{yz}$ em relação a x, e obtemos $f_x(x,y,z)=\dfrac{1}{yz}$. Avaliando no ponto, $f_x(1,-1,-1)=\dfrac{1}{(-1)\cdot(-1)}=1$.

Para calcular f_y, consideramos x e z constantes, e derivamos $\dfrac{x}{yz}$ em relação a y, e obtemos $f_y(x,y,z)=\dfrac{x}{z}\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y^2z}$. Avaliando no ponto, $f_y(1,-1,-1)=-\dfrac{1}{(-1)^2\cdot(-1)}=1$.

Para calcular f_z, consideramos x e y constantes, e derivamos $\frac{x}{yz}$ em relação a z, e obtemos $f_z(x,y,z)=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{x}{yz^2}$. Avaliando no ponto, $f_y(1,-1,-1)=-\frac{1}{(-1)\cdot(-1)^2}=1$.

7. Encontre as quatro segundas derivadas parciais e verifique que as derivadas mistas são iguais:
   a. $f(x,y)=3xy^2$;

Solução

Primeiro, calculamos as duas primeiras derivadas:

$$f_x(x,y)=3y^2 \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=3x\cdot(2y)=6xy.$$

Agora, derivamos mais uma vez as primeiras derivadas:

$f_{xx}(x,y)=[f_x(x,y)]_x=[3y^2]_x=0$;
$f_{xy}(x,y)=[f_x(x,y)]_y=[3y^2]_y=6y$;
$f_{yx}(x,y)=[f_y(x,y)]_x=[6xy]_x=6y\cdot(1)=6y$;
$f_{yy}(x,y)=[f_y(x,y)]_y=[6xy]_y=6x\cdot(1)=6x$.

Observamos diretamente que $f_{xy}(x,y)=6y=f_{yx}(x,y)$.

   b. $f(x,y)=e^x\tan(y)$;

Solução:

Primeiro, calculamos as duas primeiras derivadas:

$$f_x(x,y)=e^x\tan(y) \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=e^x\sec^2(y).$$

Agora, derivamos mais uma vez as primeiras derivadas:

$f_{xx}(x,y)=[f_x(x,y)]_x=[e^x\tan(y)]_x=e^x\tan(y)$;
$f_{xy}(x,y)=[f_x(x,y)]_y=[e^x\tan(y)]_y=e^x\sec^2(y)$;
$f_{yx}(x,y)=[f_y(x,y)]_x=[e^x\sec^2(y)]_x=e^x\sec^2(y)$;
$f_{yy}(x,y)=[f_y(x,y)]_y=[e^x\sec^2(y)]_y=e^x\cdot 2\sec(y)\cdot\sec(y)\tan(y)=2e^x\sec^2(y)\tan(y)$

Observamos que $f_{xy}(x,y)=e^x\sec^2(y)=f_{yx}(x,y)$.

   c. $f(x,y)=\cos(xy)$.

Solução:

Primeiro, calculamos as duas primeiras derivadas:

$$f_x(x,y)=-\text{sen}(xy)\cdot y=-y\,\text{sen}(xy) \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=-\text{sen}(xy)\cdot x=-x\,\text{sen}(xy).$$

Agora, derivamos mais uma vez as primeiras derivadas:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y)&=[f_x(x,y)]_x=[-y\,\text{sen}(xy)]_x\\ &=-y\cos(xy)\cdot y=-y^2\cos(xy) \end{aligned};$$

$$f_{xy}(x,y) = \left[f_x(x,y)\right]_y = \left[-y\,\text{sen}(xy)\right]_y$$
$$= -y\cos(xy)\cdot x - \text{sen}(xy)\cdot 1 = -xy\cos(xy) - \text{sen}(xy)$$
$$f_{yx}(x,y) = \left[f_y(x,y)\right]_x = \left[-x\,\text{sen}(xy)\right]_x$$
$$= -x\cos(xy)\cdot y - \text{sen}(xy)\cdot 1 = -xy\cos(xy) - \text{sen}(xy)$$
$$f_{yy}(x,y) = \left[f_y(x,y)\right]_y = \left[-x\,\text{sen}(xy)\right]_y$$
$$= -x\cos(xy)\cdot x = -x^2\cos(xy)$$
Observamos que $f_{xy}(x,y) = -xy\cos(xy) - \text{sen}(xy) = f_{yx}(x,y)$.

8. Nos primeiros anos do século XX, foi criado o teste do QI, cujo índice compara a idade mental M e a idade cronológica C da pessoa de acordo com a expressão $QI(M,C) = \dfrac{M}{C}\cdot 100$.
   a. Encontre as derivadas parciais da função QI em relação a M e C.

Solução:

Temos que $QI_M(M,C) = \dfrac{1}{C}\cdot 100$.

Também, $QI_C(M,C) = M\cdot\left(-\dfrac{1}{C^2}\right)\cdot 100 = -\dfrac{M}{C^2}\cdot 100$

   b. Avalie as derivadas parciais para $M = 12$ e $C = 10$. Interprete o resultado, desde o ponto de vista matemático.

Solução:

Avaliando temos $QI_M(12{,}10) = \dfrac{1}{10}\cdot 100 = 10$ e $QI_C(12{,}10) = -\dfrac{12}{10^2}\cdot 100 = -12$.

Podemos interpretar o resultado $QI_M(12{,}10) = 10$ afirmando que quando a idade cronológica (C) é constante, o índice QI aumenta a uma taxa de 10 pontos por ano de idade mental (M).

Podemos interpretar o resultado $QI_C(12{,}10) = -12$ afirmando que quando a idade mental (M) é constante, o índice QI diminui a uma taxa de 12 pontos por ano de idade cronológica (C).

9. (Pergunta para refletir) Seja N o número de candidatos a uma universidade, p os gastos em alimentação e hospedagem para se manter nessa universidade e t um índice proporcional à qualidade de ensino. Sabe-se que $\dfrac{\partial N}{\partial p} < 0$ e que $\dfrac{\partial N}{\partial t} > 0$. Que conclusões podem ser tiradas dessa informação sobre as derivadas?

Solução:

Podemos tirar a conclusão que aumento nos gastos, implicará na diminuição do número de candidatos e, também, que um aumento no índice de ensino, implicará no aumento do número de candidatos.

10. Para as seguintes funções, calcule o diferencial total:

a. $z = 2x^2y^3$;

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} d\,z &= z_x dx + z_y dy = \left[2x^2y^3\right]_x dx + \left[2x^2y^3\right]_y dy \\ &= 2y^3 \cdot (2x)dx + 2x^2 \cdot \left(3y^2\right)dy \\ &= 4xy^3 dx + 6x^2y^2\,dy \end{aligned}$$

b. $z = -\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} d\,z &= z_x dx + z_y dy = \left[-\frac{1}{x^2+y^2}\right]_x dx + \left[-\frac{1}{x^2+y^2}\right]_y dy \\ &= \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot 2x\,dx + \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot 2y\,dy \\ &= \frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx + \frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy \end{aligned}$$

c. $z = x\cos(y) - y\cos(x)$;

Solução:

Neste caso,

$$\begin{aligned} d\,z &= z_x dx + z_y dy = \left[x\cos(y) - y\cos(x)\right]_x dx + \left[x\cos(y) - y\cos(x)\right]_y dy \\ &= \left[\cos(y) + y\,\mathrm{sen}(x)\right]dx + \left[-x\,\mathrm{sen}(y) + \cos(x)\right]dy \end{aligned}$$

d. $z = e^x\mathrm{sen}(y)$;

Solução:

Aqui,

$$\begin{aligned} d\,z &= z_x dx + z_y dy = \left[e^x\mathrm{sen}(y)\right]_x dx + \left[e^x\mathrm{sen}(y)\right]_y dy \\ &= e^x\mathrm{sen}(y)\,dx + e^x\cos(y)\,dy \end{aligned}$$

e. $w = 2z^3y\,\mathrm{sen}(x)$;

Solução:

Aqui,

$$\begin{aligned} d\,w &= w_x dx + w_y dy + w_z dz = \left[2z^3y\,\mathrm{sen}(x)\right]_x dx + \left[2z^3y\,\mathrm{sen}(x)\right]_y dy + \left[2z^3y\,\mathrm{sen}(x)\right]_z dz \\ &= 2z^3y \cdot \cos(x)\,dx + 2z^3\,\mathrm{sen}(x) \cdot 1dy + 2y\,\mathrm{sen}(x) \cdot (3z^2)\,dz \\ &= 2z^3y\cos(x)\,dx + 2z^3\,\mathrm{sen}(x) \cdot 1dy + 6z^2y\,\mathrm{sen}(x)\,dz \end{aligned}$$

11. Encontre a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$:

a. $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y$ no ponto $(1,2)$ na direção $\mathbf{v} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$;

Solução:

Primeiro, verificamos que a direção é dada por um **vetor unitário**, e para isso calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$. Então o vetor unitário $\mathbf{u}$ pode ser o próprio vetor $\mathbf{v}$. Logo, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Agora, calculamos o gradiente no ponto $(1,2)$:

$$f_x(x,y) = 3 - 4y, \qquad f_y(x,y) = -4x + 9,$$
$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right) = \left(3 - 4y, -4x + 9\right);$$
$$\nabla f(1,2) = \left(3 - 4\cdot 2, -4\cdot 1 + 9\right) = \left(3 - 8, -4 + 9\right) = (-5,5).$$

Então,

$$D_{\mathbf{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot \mathbf{u} = \left(-5,5\right)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$= \left(-5\right)\cdot\frac{3}{5} + \left(5\right)\cdot\frac{4}{5} = -3 + 4 = 1$$

Enfim, $D_{\mathbf{u}} f(1,2) = 1$.

b. $f(x,y) = xy$ no ponto $(0,-2)$ na direção $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

Solução:

Primeiro, verificamos que a direção é dada por um **vetor unitário**, e para isso calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$. Então o vetor unitário $\mathbf{u}$ pode ser o próprio vetor $\mathbf{v}$. Logo, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Agora, calculamos o gradiente no ponto $(0,-2)$:

$$f_x(x,y) = y, \qquad f_y(x,y) = x,$$
$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right) = \left(y, x\right);$$
$$\nabla f(0,-2) = \left(-2, 0\right).$$

Então,

$$D_{\mathbf{u}} f(0,-2) = \nabla f(0,-2)\cdot \mathbf{u} = \left(-2,0\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(-2\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(0\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

Enfim, $D_{\mathbf{u}} f(0,-2) = -1$.

c. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ na direção $\mathbf{v} = \left(0,-1\right)$;

Solução:

Primeiro, verificamos que a direção é dada por um **vetor unitário**, e para isso calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = 1$. Então o vetor unitário $\mathbf{u}$ pode ser o próprio vetor $\mathbf{v}$. Logo, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (0,-1)$.

Agora, calculamos o gradiente no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f_x(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y), \qquad f_y(x,y) = e^x \cos(y),$$
$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right) = \left(e^x \operatorname{sen}(y), e^x \cos(y)\right);$$
$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(e^1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}), e^1 \cos(\frac{\pi}{2})\right) = (e, 0).$$

Então,

$$D_{\mathbf{u}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{u} = (e,0)\cdot(0,-1)$$
$$= (e)\cdot 0 + (0)\cdot(-1) = 0$$

Enfim, $D_{\mathbf{u}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

d. $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $(3,4)$ na direção $\mathbf{v} = (3,-4)$;

Solução:

Primeiro, verificamos se a direção é dada por um **vetor unitário**, e para isso calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Então para conseguir um vetor unitário $\mathbf{u}$ dividimos o vetor $\mathbf{v}$ pelo seu módulo. Logo, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(3,-4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Agora, calculamos o gradiente no ponto $(3,4)$:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$
$$\nabla f(3,4) = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Então,

$$D_{\mathbf{u}} f(3,4) = \nabla f(3,4) \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

Enfim, $D_{\mathbf{u}} f(3,4) = -\frac{7}{25}$.

e. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ no ponto $(1,1,1)$ na direção $\mathbf{v}=(1,-1,1)$.

Solução:

Primeiro, verificamos se a direção é dada por um **vetor unitário**, e para isso calculamos $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{3}$. Então para conseguir um vetor unitário $\mathbf{u}$ dividimos o vetor $\mathbf{v}$ pelo seu módulo. Logo, $\mathbf{u}=\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Agora, calculamos o gradiente no ponto $(1,1,1)$:

$$f_x(x,y,z)=2x\,,\quad f_y(x,y,z)=2y\,,\quad f_z(x,y,z)=2z$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(f_x(x,yz),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z)\right)=(2x,2y,2z)\,;$$

$$\nabla f(1,1,1)=(2,2,2)\,.$$

Então,

$$D_{\mathbf{u}}f(1,1,1)=\nabla f(1,1,1)\cdot\mathbf{u}=(2,2,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Enfim, $D_{\mathbf{u}}f(1,1,1)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

12. Encontre o gradiente da função no ponto dado:

a. $f(x,y)=3x+5y^2+1$ no ponto $(2,1)$;

Solução:

Calculamos o gradiente de $f(x,y)=3x+5y^2+1$ no ponto $(2,1)$:

$$f_x(x,y)=3\,,\qquad f_y(x,y)=10y\,,$$

$$\nabla f(x,y)=\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)=(3,10y)\,;$$

$$\nabla f(3,4)=(3,10)\,.$$

b. $z=\ln(x^2-y)$ no ponto $(2,3)$;

Solução:

Calculamos o gradiente de $z=\ln(x^2-y)$ no ponto $(2,3)$:

$$f_x(x,y)=\frac{1}{x^2-y}\cdot(2x)=\frac{2x}{x^2-y}\,,\qquad f_y(x,y)=\frac{1}{x^2-y}\cdot(-1)=-\frac{1}{x^2-y}\,,$$

$$\nabla f(x,y)=\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)=\left(\frac{2x}{x^2-y},-\frac{1}{x^2-y}\right);$$

$$\nabla f(2,3)=\left(\frac{2\cdot 3}{2^2-3},-\frac{1}{2^2-3}\right)=\left(\frac{6}{1},-\frac{1}{1}\right)=(6,-1)\,.$$

c. $w=3x^2-5y^2+2z^2$ no ponto $(1,1,-2)$;

Solução:

Calculamos o gradiente de $w=3x^2-5y^2+2z^2$ no ponto $(1,1,-2)$:

$$w_x=6x\,,\qquad w_y=-10y\,,\qquad w_z=4z$$

$$\nabla w(x,y,z)=\left(w_x,w_y,w_z\right)=(6x,-10y,4z)\,;$$

$$\nabla w(1,1,-2)=(6,-10,-8).$$

13. A temperatura no ponto (x,y) sobre uma placa de metal é $T(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Encontre a direção do maior aumento da temperatura no ponto $(3,4)$ e a taxa de tal aumento.

Solução:

A direção do maior aumento da temperatura $T(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ no ponto $(3,4)$ está dada pelo gradiente no referido ponto. Passemos aos cálculos:

$$T_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\cdot 1-x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$T_y(x,y)=x\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}\cdot(2y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\nabla T(x,y)=\left(T_x(x,y),T_y(x,y)\right)=\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Agora, no ponto $(3,4)$: $\nabla T(3,4)=\left(\dfrac{-3^2+4^2}{(3^2+4^2)^2},\dfrac{-2\cdot3\cdot4}{(3^2+4^2)^2}\right)=\left(\dfrac{7}{625},-\dfrac{24}{625}\right)$.

A taxa de aumento está dada pela norma do gradiente:

$$\|\nabla T(3,4)\|=\frac{1}{625}\sqrt{7^2+24^2}=\frac{1}{625}25=\frac{1}{25}.$$

14. A superfície de uma montanha está modelada pela equação $h(x,y)=5000-0{,}001x^2-0{,}004y^2$. Um alpinista está no ponto $(500,300,4390)$. Em que direção deve se deslocar para subir com a maior taxa possível?

Solução:

A direção que o alpinista deve seguir é a do gradiente no referido ponto. Vamos calcular o gradiente no ponto $(500,300)$:

$$h_x(x,y)=-0{,}002x,\quad h_y(x,y)=-0{,}008y,$$

$$\nabla h(x,y)=\left(h_x(x,y),h_y(x,y)\right)=\left(-0{,}002x\,;\,-0{,}008y\right).$$

Agora, no ponto $(500,300)$:

$$\nabla h(500,300)=\left(-0{,}002\cdot500\ ;\,-0{,}008\cdot300\right)=\left(-1\,;-2{,}4\right),$$

que é a direção que o alpinista deve seguir, nesse ponto, para subir o mais rápido possível.

15. Encontre os pontos críticos das funções a seguir, determinando a natureza desses pontos mediante o teste da segunda derivada:

a. $f(x,y)=3x^2+2y^2-6x-4y+16$;

Solução:

Os pontos críticos acontecem nos pontos (a,b) onde as derivadas são ambas zero ou ambas não existem. Neste caso, vamos calcular as derivadas parciais e igualar a zero:

$$f_x(x,y)=6x-6=0,$$

$$f_y(x,y)=4y-4=0,$$

e resolvendo o sistema é fácil ver que $x=1$ e $y=1$, ou seja, $(1,1)$ é um ponto crítico. Também observe que as derivadas parciais existem para todos os pontos do plano cartesiano.

Agora, aplicamos o teste da segunda derivada para o ponto $(1,1)$: temos que

$$f_{xx}(x,y)=[6x-6]_x=6\ ,\ f_{yy}(x,y)=[4y-4]_y=4\,,$$
$$f_{xy}(x,y)=[6x-6]_y=0\,,\ f_{yx}(x,y)=[4y-4]_x=0\,,$$

e como as derivadas parciais são constantes, têm o mesmo valor para o ponto $(1,1)$ e então

$$d(1,1)=\det\begin{bmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4\end{bmatrix}=24>0\,\mathbf{,}$$
$$f_{xx}(1,1)=6>0\,\mathbf{;}$$

as condições anteriores implicam que o ponto $(1,1)$ é um ponto de mínimo. Nesse ponto, o valor mínimo local da função é

$$f(1,1)=3\cdot 1^2+2\cdot 1^2-6\cdot 1-4\cdot 1+16=3+2-4+16=17\,.$$

b. $f(x,y)=x^2+xy+\dfrac{1}{2}y^2-6x+y$;

Solução:

Os pontos críticos acontecem nos pontos (a,b) onde as derivadas são ambas zero ou ambas não existem. Neste caso, vamos calcular as derivadas parciais e igualar a zero:

$$f_x(x,y)=2x+y-6=0\,,$$
$$f_y(x,y)=x+y+1=0\,,$$

e para resolver o sistema podemos subtrair a segunda equação da primeira, obtendo $x-7=0$, ou seja, $x=7$. Substituindo o valor de x na segunda equação conseguimos que $y=-7-1=-8$, ou seja, $(7,-8)$ é um ponto crítico. Também observe que as derivadas parciais existem para todos os pontos do plano cartesiano.

Agora, aplicamos o teste da segunda derivada para o ponto $(7,-8)$: temos que

$$f_{xx}(x,y)=[2x+y-6]_x=2\,,\ f_{yy}(x,y)=[x+y+1]_y=1\,,$$
$$f_{xy}(x,y)=[2x+y-6]_y=1\,,\ f_{yx}(x,y)=[x+y+1]_x=1\,,$$

e como as derivadas parciais são constantes, têm o mesmo valor para o ponto $(7,-8)$ e então

$$d(7,-8)=\det\begin{bmatrix} f_{xx}(7,-8) & f_{xy}(7,-8) \\ f_{yx}(7,-8) & f_{yy}(7,-8)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}=1>0\,\mathbf{,}$$
$$f_{xx}(1,1)=2>0\,\mathbf{;}$$

as condições anteriores implicam que o ponto $(7,-8)$ é um ponto de mínimo. Nesse ponto, o valor mínimo local da função é

$$f(7,-8)=7^2+7\cdot(-8)+\frac{1}{2}8^2-6\cdot 7-8=49-56+32-42-8=-25\,.$$

c. $f(x,y)=x^3+y^2-3x+2y-5$;

Solução:

Os pontos críticos acontecem nos pontos (a,b) onde as derivadas são ambas zero ou ambas não existem. Neste caso, vamos calcular as derivadas parciais e igualar a zero:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0\,,$$
$$f_y(x,y) = 2y + 2 = 0\,,$$

e para resolver o sistema, observe que a segunda equação afirma que $y = -1$, enquanto que da primeira equação podemos afirmar que $x^2 - 1 = 0$, ou seja, $x = 1$ ou $x = -1$. Então temos dois pontos críticos: $(1,-1)$ e $(-1,-1)$. Também observe que as derivadas parciais existem para todos os pontos do plano cartesiano.

Agora, aplicamos o teste da segunda derivada e para isso temos:

$$f_{xx}(x,y) = \left[3x^2 - 3\right]_x = 6x\,,\ f_{yy}(x,y) = \left[2y + 2\right]_y = 2\,,$$
$$f_{xy}(x,y) = \left[3x^2 - 3\right]_y = 0\,,\ f_{yx}(x,y) = \left[2y + 2\right]_x = 0\,.$$

Então, no ponto $(1,-1)$ temos que

$$d(1,-1) = \det\begin{bmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{yx}(1,-1) & f_{yy}(1,-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 12 > 0\,;$$
$$f_{xx}(1,-1) = 12 > 0\,;$$

sendo que as condições anteriores implicam que o ponto $(1,-1)$ é um ponto de mínimo.

Agora, no ponto $(-1,-1)$ temos que

$$d(-1,-1) = \det\begin{bmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{yx}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -12 < 0\,;$$

sendo que a condição anterior implica que o ponto $(-1,-1)$ é um ponto de sela.

16. Deve ser construído um prédio com volume de 4000 m^3 . Considerando que a perda de calor diária desse prédio está modelada por $w = 0{,}3xy + 0{,}5yz + 0{,}5xz$, sendo x, y e z, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do prédio, encontre as dimensões do mesmo para que a perda de calor diária seja mínima.

Solução:

Temos que $xyz = 4000$. Então, $z = \dfrac{4000}{xy}$ e com esta igualdade podemos deixar a função w que depende de três variáveis como sendo uma função de apenas duas, x e y, como segue

$$w = 0{,}3xy + 0{,}5y \cdot \frac{4000}{xy} + 0{,}5x \cdot \frac{4000}{xy} = 0{,}3xy + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{y}\,.$$

Agora, encontramos os extremos relativos da última função:

Calculamos as derivadas parciais e igualamos a zero para conseguir os pontos críticos:

$$w_x = 0{,}3y - \frac{2000}{x^2} = 0\,,$$
$$w_y = 0{,}3x - \frac{2000}{y^2} = 0\,.$$

Da primeira igualdade conseguimos $y=\dfrac{20000}{3x^2}$ e da segunda igualdade, $x=\dfrac{20000}{3y^2}$. Substituindo esta última na anterior, temos que $y=\dfrac{20000}{3\cdot\dfrac{20000^2}{9y^4}}$, e daí conseguimos $y=\dfrac{3}{20000}y^4$. Resolvendo esta equação temos que $y^4-\dfrac{20000}{3}y=0$ e pode ser escrita como $y\left(y^3-\dfrac{20000}{3}\right)=0$ e as raízes reais são $y=0$ e $y=\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}$. Agora, temos que $x=\dfrac{20000}{3\left(\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}\right)^2}=\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}$.

Então um ponto crítico é $\left(\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}},\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}\right)$. Observe que as derivadas parciais não existem nos pontos com abscissa ou ordenada zero, mas estes pontos não são de interesse para o presente problema, desde que as variáveis x e y são comprimentos cujos valores não podem ser zero desde o produto desses junto com z é 4000.

Agora, aplicamos o teste da segunda derivada e para isso temos:

$$f_{xx}(x,y)=\left[0{,}3y-\frac{2000}{x^2}\right]_x=-\frac{4000}{x^3},\ f_{yy}(x,y)=\left[0{,}3x-\frac{2000}{y^2}\right]_y=-\frac{4000}{y^3},$$

$$f_{xy}(x,y)=\left[0{,}3y-\frac{2000}{x^2}\right]_y=0{,}3,\ f_{yx}(x,y)=\left[0{,}3x-\frac{2000}{y^2}\right]_x=0{,}3.$$

E substituindo no ponto $\left(\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}},\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}\right)$ temos que:

$$f_{xx}\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}},\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)=\frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)^3}=\frac{12000}{20000}=0{,}6,$$

$$f_{yy}\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}},\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)=\frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)^3}=\frac{12000}{20000}=0{,}6,$$

$$d\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}},\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)=\det\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}6\end{bmatrix}=0{,}36-0{,}09=0{,}27>0;$$

$$f_{xx}\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}},\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)=0{,}6>0;$$

sendo que as condições anteriores implicam que o ponto $\left(\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}},\sqrt[3]{\dfrac{20000}{3}}\right)$ é um ponto de mínimo.

Assim, sendo as dimensões do prédio devem ser $x = y = \sqrt[3]{\frac{20000}{3}} \approx 18,82$ m e $z = \frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{20000}{3}}\right)^2} = \frac{4000}{(18,82)^2} \approx 11,29\,\text{m}$, para garantir a menor perda de calor possível.