3. $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$;

Resp. $\mathrm{y}(x) = \dfrac{x + 1 + \_C1}{x + \_C1}$

4. $y' + 4y^2 - 9 = 0$;

Resp. $\mathrm{y}(x) = \dfrac{9\,x}{4} + \_C1$

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações, sendo dada uma solução particular:

1. $2y' - \dfrac{y^2}{x^2} = 1$; solução particular $y = x$;

2. $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$; solução particular $y = 1$.

3.3 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Equações diferenciais lineares de segunda ordem são equações da forma

$$\frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} + f(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + g(x)y(x) = h(x)\,,$$

onde $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções definidas num intervalo **I**. Para simplificar a escrita, usaremos a notação

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)\,.$$

Também vamos considerar o operador diferencial linear $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$.

Em geral, para $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$, temos

$i)\ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
$i\,i)\ \ L(C\,y) = C\,L(y)$;

por isso o operador é chamado linear.

Assim, quando resolvemos a equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$, determinamos as funções que satisfazem

$$L(y) = h(x)\,.$$

Teorema 3.3.1: Teorema de Existência e Unicidade

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''+f(x)y'+g(x)y=h(x) \\ y(x_0)=a,\ y'(x_0)=b \end{cases},$$

para $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ contínuas no intervalo aberto I, $x_0 \in$ I, a e b reais, tem uma única solução nesse intervalo.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em KREIDER, D.L., KULLER, R.G. & OSTBERG, D.R., **Equações Diferenciais**, Edgard Blucher, São Paulo, 1972.

3.3.1 Equações lineares homogêneas

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea **(EDOLH)** quando $h(x) \equiv 0$, isto é, pode ser escrita como $L(y)=0$:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 .$$

Observação 3.3.1.1: É importante observarmos as seguintes correspondências:

oscilações livres (sem forças externas) ↔ equações homogêneas
oscilações forçadas ↔ equações não homogêneas

Observação 3.3.1.2: Toda EDOLH admite $y(x)=0$ como solução. Por esta razão $y(x)=0$ é chamada de **solução trivial**.

Teorema 3.3.1.1: Princípio de Superposição

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de uma EDOLH, então qualquer combinação linear $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, com C_1 e C_2 constantes, também é solução.

Demonstração:

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções de uma EDOLH $L(y)=0$. Então, $L(y_1)=0$ e $L(y_2)=0$. Pela linearidade, temos $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_1.0 + C_2.0 = 0$. Logo, $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ também é solução de $L(y)=0$, para quaisquer C_1 e C_2.

Observação 3.3.1.3: Caso particular do “Princípio de Superposição”

Se $y(x)$ é uma solução de uma EDOLH, então qualquer múltiplo $Cy(x)$ também o é.

Exemplo 3.3.1.1: As funções $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_1(x) = e^{3x}$ são soluções da EDOLH $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Exemplo 3.3.1.2: A partir das soluções do exemplo anterior, usando o “Princípio de Superposição”, podemos construir uma família de soluções para a equação $y'' - 2y' - 3y = 0$:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Exemplo 3.3.1.3: Considerando o PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 2, \qquad y'(0) = -3 \end{cases}$$

e a família $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, podemos determinar C_1 e C_2 de modo a satisfazer as condições iniciais dadas no PVI:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 + 3C_2 = -3 \end{cases}$$

Encontramos $C_1 = \frac{9}{4}$ e $C_2 = -\frac{1}{4}$; a solução do PVI é $y = \frac{9}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{3x}$.

> ode := diff(y(x),x,x) = 2*diff(y(x),x) + 3*y(x);

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x) = 2\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 3\,\mathrm{y}(x)$$

> dsolve(edo);

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(3x)} + \_C2\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

> ci := y(0)=2, D(y)(0)=-3;

$$ics := \mathrm{y}(0) = 2,\ \mathrm{D}(y)(0) = \text{-}3$$

> dsolve({edo,ci});

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{4}\mathbf{e}^{(3x)} + \frac{9}{4}\mathbf{e}^{(-x)}$$

Observação 3.3.1.4: De forma simplificada, podemos dizer que duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ditas linearmente independentes se uma não for um múltiplo da outra. Caso contrário são ditas linearmente dependentes.

Observação 3.3.1.5: Se $y_1 = ky_2$, então a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (C_1 + kC_2)y_1$ é da forma $y = Cy_1$, ou seja, a função y_2 é totalmente desnecessária na combinação linear.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Um sistema fundamental de soluções para uma EDOLH de 2ª ordem é um par de soluções linearmente independentes.

Exemplo 3.3.1.4: O conjunto $\{\cos x, sen\, x\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDOLH

$$y'' + y = 0;$$

portanto, a partir de uma combinação linear, obtemos a solução geral $y = C_1 \cos x + C_2 sen\, x$.

> edo := diff(y(x),x,x)+y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\ \sin(x) + \_C2\ \cos(x)$$

Exemplo 3.3.1.5: Dada a equação $y'' - 16y = 0$, vamos procurar uma solução na forma $y = e^{\lambda x}$ (mais tarde ficará esclarecido por que na forma de exponencial). Substituindo $y = e^{\lambda x}$ na EDOLH, obtemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 16 e^{\lambda x} = 0,$$

ou seja,

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 16) = 0;$$

como $e^{\lambda x} > 0$, a condição para que $y = e^{\lambda x}$ seja solução da EDOLH $y'' - 16y = 0$, é que λ seja raiz da equação algébrica:

$$\lambda^2 - 16 = 0.$$

Assim, um sistema fundamental de soluções para essa equação é $\{ y_1 = e^{4x}, y_2 = e^{-4x} \}$.

Observação 3.3.1.6: É importante observarmos que o sistema fundamental de soluções de uma EDOLH não é único. No exemplo anterior, podemos obter outro sistema fundamental $\{y_3, y_4\}$ de soluções para a mesma EDOLH:

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos h(4x),$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2} = senh(4x).$$

Exemplo 3.3.1.6: O conjunto $\{e^x, e^{-x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDOLH

$$y'' - y = 0;$$

entretanto, $\{\cosh x, senh\, x\}$ é outro sistema fundamental de soluções para essa mesma EDOLH, pois

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $senh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Portanto, temos formas alternativas de representar a solução geral:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad \text{e} \quad y = C_1 \cosh x + C_2 senhx.$$

Agora, vamos generalizar a situação do exemplo 3.3.1.6. Dada uma EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$, se encontrarmos duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2, então poderemos obter todas as demais soluções fazendo superposição $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Por isso, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ é chamada de solução geral da EDOLH de 2ª ordem.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Seja y_p uma solução particular da equação $y'' - 2y' - 3y = 0$. Sejam as constantes a e b definidas por $a = y_p(0)$ e $b = y'_p(0)$.

Vamos considerar o PVI

$$\begin{cases} y''-2y'+3y = 0 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$$

e procurar se existem C_1 e C_2 tais que

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ -C_1 + 3C_2 = b \end{cases};$$

esse sistema linear é compatível determinado. Resolvendo o sistema encontramos $C_1 = \frac{1}{4}(3a - b)$ e $C_2 = \frac{1}{4}(a + b)$. Assim, y_p e $y = \frac{1}{4}(3a - b)e^{-x} + \frac{1}{4}(a + b)e^{3x}$ são soluções do PVI; mas pelo "Teorema de Existência e Unicidade" a solução do PVI é única. Então, concluímos que

$$y_p = \frac{1}{4}(3a - b)e^{-x} + \frac{1}{4}(a + b)e^{3x}$$

e que toda solução particular da EDOLH $y'' - 2y' - 3y = 0$ é da forma $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Para um sistema linear ser possível e determinado, o determinante da matriz principal deve ser diferente de zero; portanto, conforme exemplificamos acima, o determinante

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

desempenha um papel fundamental nessa teoria. Ele é conhecido por **Wronskiano**.

Então, dadas duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, o Wronskiano dessas funções é definido como o determinante

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.3.1.7: Dadas $y_1(x) = e^{2t}$ e $y_2(x) = e^{3t}$, o Wronskiano é:

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} = e^{5t}.$$

Teorema 3.3.1.2: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes, então o Wronskiano dessas funções é nulo.

Demonstração:

Suponhamos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam linearmente dependentes. Suponhamos que $y_1(x) = C\, y_2(x)$. Dessa forma, temos que a segunda coluna do Wronskiano é um múltiplo da primeira e, portanto, esse determinante se anula para qualquer x.

Observação 3.3.1.7: O teorema acima também pode ser enunciado assim: "se o Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ for diferente de zero, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes".

Observação 3.3.1.8: A recíproca do teorema 3.3.1.2 não é verdadeira: se duas funções são linearmente independentes, nada podemos concluir sobre o Wronskiano.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES!

As funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ditas linearmente independentes se e somente se a equação

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

implica que $C_1 = C_2 = 0$.

Teorema 3.3.1.3: Duas funções soluções de uma mesma EDOLH são linearmente dependentes se e somente se o seu Wronskiano é nulo.

Demonstração:

Suponhamos $y_1(x)$ e $y_2(x)$, soluções da EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ tais que $W(x) = 0$. Precisamos mostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes. Fixemos x_0 no intervalo de definição das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$. A hipótese $W(x) = 0$ implica que o sistema

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução não trivial. Agora, suponhamos (C_1, C_2) uma solução não nula desse sistema algébrico e seja a função $\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Pelo Princípio de superposição, temos que $\varphi(x)$ é uma solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$. Mas, o sistema acima nos diz que $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, então, como $y = 0$ (solução trivial) é uma solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases},$$

pelo Teorema de Existência e Unicidade, $\varphi(x) = 0$. Podemos assim concluir que $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$, sem que as constantes sejam simultaneamente nulas. Segue daí que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes.

Observação 3.3.1.9: Através desse teorema, demonstramos que se $W(x) = 0$ em um ponto do intervalo de definição de duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, então essas funções são linearmente dependentes. Como conseqüência, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas soluções linearmente independentes de uma EDOLH, o sistema algébrico

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

é sempre possível e determinado e portanto toda solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \\ y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b \end{cases}$$

é da forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Teorema 3.3.1.4: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes de uma EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$, então toda solução dessa equação é da forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, ou seja, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ é a solução geral da EDO.

Demonstração: Lista de exercícios 3.3.1

Teorema 3.3.1.5: **Teorema de Abel**

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de uma EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ e seja $W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ o seu wronskiano. Então $W(x)$ satisfaz a EDOLH de 1ª ordem $W' + f(x)W = 0$.

Demonstração:

Suponhamos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam duas soluções da EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ e que $W(x)$ seja o seu wronskiano. Então:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

e

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 .$$

Então,

$$W' + f(x)W = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + f(x)\,(y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 (y_2'' + f(x) y_2') - y_2 (y_1'' + f(x) y_1') =$$
$$= 0 - 0 = 0 .$$

Corolário: Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de uma EDOLH $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ e o $W(x)$ seu wronskiano, então uma das seguintes alternativas é válida:

I) ou $W(x) \neq 0$;
II) ou $W(x) = 0$, para todo x.

Não existe a possibilidade do wronskiano se anular para alguns valores de x e ser diferente de zero para outros valores de x.

Demonstração:

Pelo Teorema de Abel, $W(x)$ é solução da equação $W' + f(x)W = 0$. Essa equação é uma equação de variáveis separáveis, cuja solução é $W(x) = Ce^{-\int f(x)dx}$. Como a função exponencial é sempre diferente de zero, temos duas possibilidades:

I) Se C = 0, então $W(x) = 0$, ou
II) se C ≠ 0, então $W(x) \neq 0$, para todo x.

ATIVIDADES!

Lista 3.3 - - Ver exemplos E57 ao E60 no apêndice V.

1. Demonstrar o teorema 3.3.1.4.

2. Se $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x|x|$, mostrar que $W(x) = 0$.

3. Provar que $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são linearmente independentes sempre que λ_1 e λ_2 são números reais distintos.

4. Mostrar que $y_1(x) = xe^{\lambda x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda x}$ são soluções da equação $y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$; mostrar também que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

5. Mostrar que $y_1 = \dfrac{senx}{x}$ e $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$ são soluções, linearmente independentes, da equação $x\,y'' + 2y' + x\,y = 0$.

3.4 Determinação de uma Solução Linearmente Independente a Outra Solução Não Trivial de uma EDOLH

Dada uma solução $y_1(x) \neq 0$ para a EDOLH

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

podemos determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, de modo que $\{y_1, y_2\}$ seja linearmente independente. De fato, temos

$$y_2' = v' y_1 + v\, y_1'$$

e

$$y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v\, y_1'';$$

substituindo esses resultados na equação, segue que:

$$(v'' y_1 '' + 2v' y_1' + v\, y_1'') + f(x)\ (v' y_1 + v y_1') + g(x) v\, y_1 = 0\,.$$

Como queremos determinar v, escrevemos

$$y_1 v'' + (2 y_1' + f(x) y_1) v' = 0\,,$$

que é uma EDOLH de segunda ordem sem termo em v, e portanto pode ser redutível à primeira ordem.

Exemplo 3.4.1: Se $y_1 = \dfrac{senx}{x}$ é uma solução da EDOLH $xy'' + 2y' + xy = 0$, determinar uma segunda solução linearmente independente a y_1.

A solução procurada é da forma:

$$y_2 = v\, y_1\,.$$

Calculando as derivadas y_2' e y_2'':

$$y_2' = v' y_1 + v y_1' \qquad \text{e} \qquad y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v\, y_1''$$

e substituindo na equação dada, temos:

$$x\, y_1 v'' + (2x\, y_1' + 2y_1)\, v' + (x\, y_1'' + 2y_1' + x\, y_1)\, v = 0\,.$$

Nessa equação, o coeficiente de v é nulo, pois y_2 é solução da equação dada. Assim,

$$x\, y_1 v'' + (2x y_1' + 2y_1)\, v' = 0\,.$$

Substituindo $y_1 = \dfrac{senx}{x}$ e $y_1' = \dfrac{x \cos x - senx}{x^2}$, teremos

$$(senx) v'' + \left(\frac{2x\cos x - 2senx}{x} + \frac{2senx}{x} \right) v' = 0\,,$$

ou

$$(senx) v'' + 2(\cos x) v' = 0\,.$$

Assim, foi obtida uma equação que poderemos reduzir, fazendo $v' = z$, a uma equação de primeira ordem:

$$(senx)z' + 2(\cos x)z = 0 .$$

Então, separando as variáveis e integrando

$$\int \frac{d\,z}{z} = -\int \frac{2\cos x}{senx}\,d\,x ,$$

determinamos

$$\ln z = -2\ln senx + A .$$

Escolhendo a constante arbitrária $A = 0$, temos:

$$z = \csc^2 x$$

e finalmente:

$$v' = \csc^2 x \quad \Rightarrow \quad v = \int \csc x dx = t\,g\;x + B .$$

Escolhendo, novamente, a constante de integração $B = 0$, determinamos uma segunda solução linearmente independente à primeira:

$$y_2 = \frac{senx}{x} \cdot \frac{\cos x}{senx} = \frac{\cos x}{x} .$$

ATIVIDADES

Lista 3.4

1. Se $y_1 = x$ é uma solução da EDOLH $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$, determinar uma segunda solução linearmente independente a y_1.

Resp: $y_2 = 1 + x\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2. Se $y_1 = x + 1$ é uma solução da EDOLH $x(3x+2)y'' + 6(x+1)y' - 6y = 0$, determinar uma segunda solução linearmente independente a y_1.

Resp: $y_2 = \dfrac{1}{x}$

3. Determinar a solução geral da equação $y'' - 2y = 0$, sabendo que $y_1 = e^{\sqrt{2}\,x}$ é solução dessa equação.

Resp: $y = C_1 e^{\sqrt{2}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{2}\,x}$

4. Determinar a solução geral da equação $y'' - 2y' = 0$, sabendo que $y_1 = e^{2x}$ é solução dessa equação.

Resp: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

5. Determinar a solução geral da equação $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 0$, sabendo que $y_1 = e^t$ é solução dessa equação.

6. **As equações de Euler** são equações que podem ser escritas como

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

com a e b constantes. Mostrar que $\exists\lambda$ tal que $y(x) = x^\lambda$ é uma solução da equação de Euler se, e só se,

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0;$$

essa equação é chamada **equação indicial** da equação de Euler.

3.5 EDOLH com Coeficientes Constantes

Vamos considerar $L(y) = y'' + \alpha\, y' + \beta\, y = 0$, com α e β constantes. Então,

$$L(e^{\lambda \cdot x}) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^{\lambda \cdot x}.$$

Assim, uma EDOLH com coeficientes constantes, $L(y) = 0$, pode ter solução da forma $y = e^{\lambda \cdot x}$, desde que λ seja raiz da equação algébrica

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,$$

chamada de **equação característica**.

Exemplo 3.5.1: Dada a equação y" + 3y' + 2y = 0, a equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, que tem raízes reais $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Então, teremos duas soluções linearmente independentes $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{2x}$.

Teorema 3.5.1: Para resolver uma EDOLH de segunda ordem da forma

$$L(y) = y'' + \alpha\, y' + \beta\, y = 0,$$

primeiro determinamos as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0.$$

A solução geral da equação $L(y) = y'' + \alpha\, y' + \beta\, y = 0$ pode ser expressa em termos de λ_1 e λ_2 conforme segue:

Raízes da Equação Característica	Solução Geral
Reais distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Reais repetidas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$(C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
Complexas $\begin{cases} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{cases}$	$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 senbx)$

Observação 3.5.1: Se a equação característica $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ tem raiz real dupla $\lambda_1 = \lambda_2$, significa que o discriminante dessa equação de 2º grau é nulo, ou seja $\alpha^2 - 4\beta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

Portanto, temos uma solução exponencial $y_1 = e^{-\frac{\alpha}{2}x}$. A segunda solução, linearmente independente da primeira, será dada por

$$y_2 = v(x)e^{-\frac{\alpha}{2}x}.$$

Substituindo na equação diferencial obtemos $v''(x) = 0$, de onde

$$v(x) = Ax + B.$$

Escolhendo A = 1 e B = 0, determinamos $y_2 = xe^{-\frac{\alpha}{2}x}$

Exemplo 3.5.2: Resolver a equação $(D^2 - 4)y = 0$. Essa equação pode ser escrita como $y'' - 4y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 - 4 = 0$ que tem raízes características $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, a solução geral é $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$.

> edo := diff(y(x),x,x) -4*y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - 4\, y(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = \_C1\, \mathbf{e}^{(-2\,x)} + \_C2\, \mathbf{e}^{(2\,x)}$$

Exemplo 3.5.3: A equação $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tem por equação característica $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, com raiz $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ de multiplicidade 2. Portanto, a solução geral é $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$.

> edo := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +4*y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 4\, y(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = \_C1\, \mathbf{e}^{(-2\,x)} + \_C2\, \mathbf{e}^{(-2\,x)}\, x$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES!

Revisão sobre exponenciais complexas

Para $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos inicialmente

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Porém,

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots.,$$

de onde:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Acima, temos envolvidas as séries de $\cos y$ e $sen\, y$. Assim, obtemos a denominada **"Fórmula de Euler"**:

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \mathrm{sen} y.$$

Definimos, a seguir, a exponencial para $z = x + yi \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \cdot seny) = e^x \cos y + i \cdot e^x seny.$$

Observação 3.5.2: Se a equação característica tem raízes complexas $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ podemos definir duas soluções linearmente independentes:

$$y_1 = e^{ax+bix} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} senbx$$

e

$$y_2 = e^{ax-bix} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax} \cos bx - ie^{ax} senbx.$$

Usando o "Princípio de Superposição", podemos tomar convenientes combinações lineares, e obter duas soluções linearmente independentes reais:

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos bx \qquad \text{e} \qquad y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax} \cdot senbx.$$

Exemplo 3.5.4: Resolver a equação $y'' + 4y' + 13y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$, que tem raízes complexas $\lambda_1 = -2 + 3i$ e $\lambda_2 = -2 - 3i$. Portanto, a solução geral é $(C_1 \cos 3x + C_2 sen 3x)e^{-2x}$.

```
> edo := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +13*y(x)=0;
```

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 13\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo);
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(-2\,x)}\,\sin(3\,x) + \_C2\,\mathbf{e}^{(-2\,x)}\,\cos(3\,x)$$

Observação 3.5.3: Devemos estar atentos ao fato de que as raízes complexas de um polinômio real ocorrem sempre aos pares conjugados.

Observação 3.5.4: Uma solução $y = C_1 \cos bx + C_2 senbx$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, pode ser escrita, em termos de outras constantes arbitrárias C e θ , como $y = Csen(bx+\theta)$, pois

$$y = Csen(bx+\theta) = C(sen\theta \cos bx + \cos\theta\, senbx)\,,$$

sendo

$$C_1 = Csen\theta \quad \text{e} \quad C_2 = C\cos\theta \,.$$

Essa expressão alternativa é importante para algumas aplicações porque envolve uma senóide submetida a um deslocamento horizontal.

ATIVIDADES

Lista 3.5 - Ver exemplos E61 ao E70 no apêndice V.
Determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1) $3y'' + 2y' = 0$.

2) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

3) $y'' + y' - 2y = 0$.

4) $y'' + 4y' = 0$.

5) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

6) $y'' + 2y' + 4y = 0$.

7) $9y'' + 6y' + y = 0$.

8) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$.

9) $4y'' - 4y' + 3y = 0$.

10) $2y'' - 5\sqrt{3}y' + 6y = 0$.

Respostas:

```
> edo1 := 3*diff(y(x),x,x)+2*diff(y(x),x) =0;
```

$$edo1 := 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(edo1,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2x}{3}\right)}$$

```
> edo2 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +8*y(x)=0;
```

$$edo2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 8\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo2,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(-2x)}\sin(2x) + \_C2\,\mathbf{e}^{(-2x)}\cos(2x)$$

```
> edo3 := diff(y(x),x,x)+diff(y(x),x) -2*y(x)=0;
```

$$edo3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo3,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{x} + \_C2\,\mathbf{e}^{(-2x)}$$

```
> edo4 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) =0;
```

$$edo4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(edo4,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\,\mathbf{e}^{(-4x)}$$

```
> edo5 := diff(y(x),x,x)-2*diff(y(x),x) +2*y(x)=0;
```

$$edo5 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo5,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{x}\sin(x) + \_C2\,\mathbf{e}^{x}\cos(x)$$

```
> edo6 := diff(y(x),x,x)+2*diff(y(x),x) +4*y(x)=0;
```

$$edo6 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo6,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{(-x)} \sin(\sqrt{3}\, x) + \_C2\, e^{(-x)} \cos(\sqrt{3}\, x)$$

```
> edo7 := 9*diff(y(x),x,x)+6*diff(y(x),x) +y(x)=0;
```

$$edo7 := 9\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + 6\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo7,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{\left(-\frac{x}{3}\right)} + \_C2\, e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\, x$$

```
> edo8 := 2*diff(y(x),x,x)-2*sqrt(2)*diff(y(x),x) +y(x)=0;
```

$$edo8 := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo8,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)} + \_C2\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)}\, x$$

```
> edo9 := 4*diff(y(x),x,x)-4*diff(y(x),x) +3*y(x)=0;
```

$$edo9 := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 3\,y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo9,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + \_C2\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)$$

```
> edo10 := 2*diff(y(x),x,x)-5*sqrt(3)*diff(y(x),x) +6*y(x)=0;
```

$$edo10 := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 5\sqrt{3}\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 6\,y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo10,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)} + \_C2\, e^{(2\sqrt{3}\,x)}$$

Determinar as soluções dos problemas de valor inicial:

1) $16y'' + 8y' + 5y = 0$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

3) $y'' - 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

4) $y'' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2\sqrt{2}$.

5) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{7}{2}$.

Respostas:

```
> edo1 := 16*diff(y(x),x,x)+8*diff(y(x),x)+5*y(x) =0;
```

$$edo1 := 16\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 8\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 5\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> ci1 := y(0)=4, D(y)(0)=-1;
```

$$ci1 := \mathrm{y}(0) = 4,\ \mathrm{D}(y)(0) = -1$$

```
> dsolve({edo1,ci1});
```

$$\mathrm{y}(x) = 4\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{4}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

```
> edo2 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +13*y(x)=0;
```

$$edo2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 13\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> ci2 := y(0)=0, D(y)(0)=-2;
```

$$ci2 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{D}(y)(0) = -2$$

```
> dsolve({edo2,ci2});
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{(-2\,x)} \sin(3\,x)$$

```
> edo3 := diff(y(x),x,x)-2*sqrt(5)*diff(y(x),x) +5*y(x)=0;
```

$$edo3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\sqrt{5}\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 5\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> ci3 := y(0)=0, D(y)(0)=3;
```

$$ci3 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{D}(y)(0) = 3$$

```
> dsolve({edo3,ci3});
```

$$\mathrm{y}(x) = 3\,\mathbf{e}^{(\sqrt{5}\,x)}\,x$$

```
> edo4 := diff(y(x),x,x)+2*y(x) =0;
```

$$edo4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> ci4 := y(0)=2, D(y)(0)=2*sqrt(2);
```

$$ci4 := \mathrm{y}(0) = 2,\ \mathrm{D}(y)(0) = 2\sqrt{2}$$

```
> dsolve({edo4,ci4});
```

$$y(x) = 2\sin(\sqrt{2}\,x) + 2\cos(\sqrt{2}\,x)$$

```
> edo5 := 4*diff(y(x),x,x)-12*diff(y(x),x) +9*y(x)=0;
```

$$edo5 := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 12\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 9\,y(x) = 0$$

```
> ci5 := y(0)=1, D(y)(0)=7/2;
```

$$ci5 := y(0) = 1,\ D(y)(0) = \frac{7}{2}$$

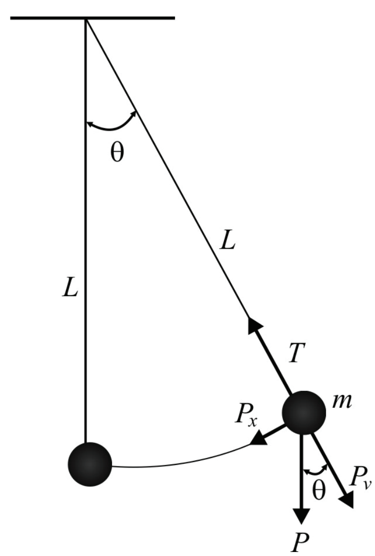
```
> dsolve({edo5,ci5});
```

$$y(x) = \mathbf{e}^{\left(\frac{3\,x}{2}\right)} + 2\,\mathbf{e}^{\left(\frac{3\,x}{2}\right)}\,x$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES!

No começo do capítulo fizemos referência a algumas aplicações das equações diferenciais; como foi possível observar, algumas equações, que descreviam determinados fenômenos, eram equações lineares de 2ª ordem. Assim, agora faremos algumas considerações sobre a modelagem de três sistemas, muito importantes, onde dois dos três são governados pela mesma equação diferencial de 2ª ordem.

Pêndulo Simples



$\dfrac{d\theta}{dt} \longrightarrow$ Velocidade angular

$L\dfrac{d\theta}{dt} \longrightarrow$ Velocidade

Energia cinética: $\frac{1}{2}m(L\frac{d\theta}{dt})^2$.

Energia potencial: $(L - L\cos\theta)mg$.

Principio de conservação de energia: ENERGIA CINÉTICA + ENERGIA POTENCIAL = CTE

$$\frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (1-\cos\theta)Lmg = CTE .$$

Derivando essa expressão teremos:

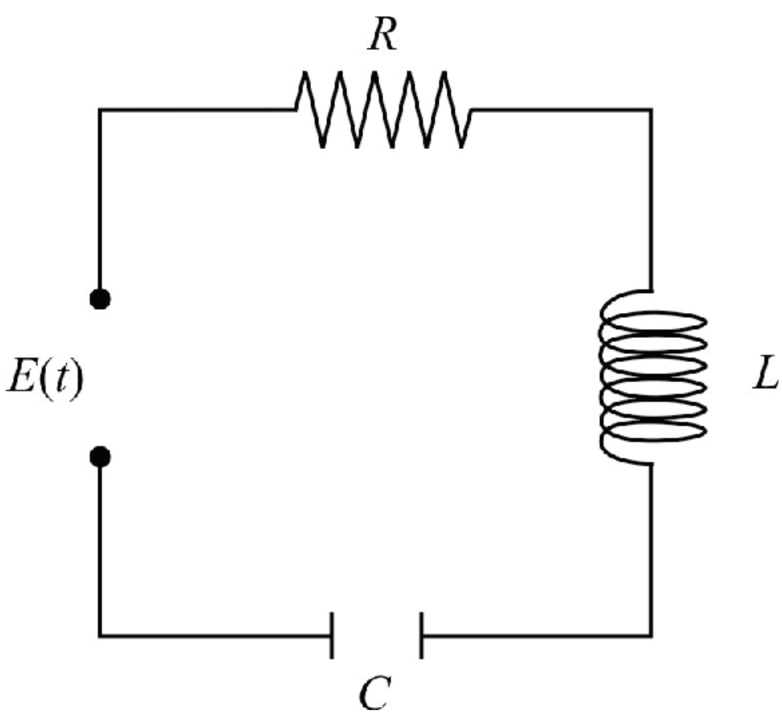
$$L^2m\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmgsen\theta\frac{d\theta}{dt} = 0 ,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sen\theta = 0 \text{ (equação não linear).}$$

Para oscilações de pequena amplitude temos $sen\theta \approx \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \text{ (equação linear).}$$

Circuito RLC



$I = \frac{dQ}{dt}$ ($Q =$ carga e $I =$ corrente, variam com o tempo)

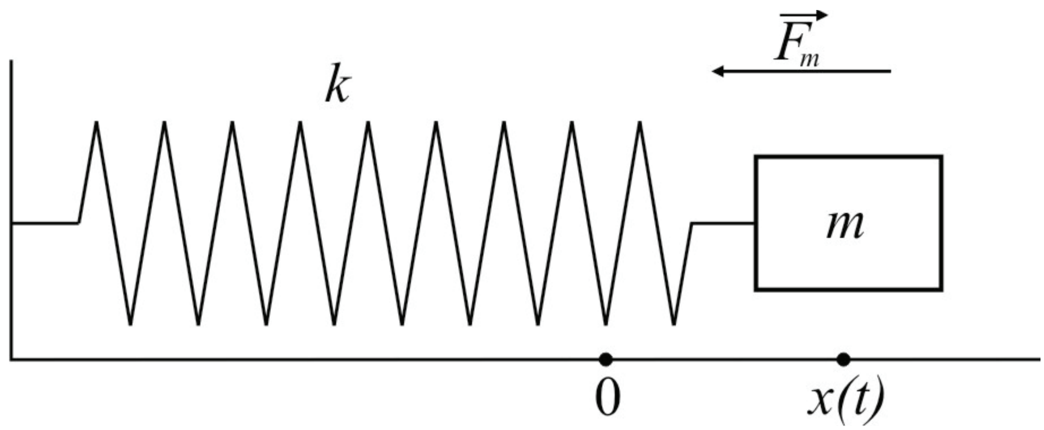
$\frac{1}{C}Q =$ diferença de potencial entre as placas do capacitor

Aplicando a regra das malhas ao circuito, percorrendo-o no sentido horário a partir da bateria:

$$E(t) - L\frac{dQ}{dt} - R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}I = 0\,,$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E(t)\,.$$

Sistema Massa – Mola.



$F_m = -\gamma v = -\gamma \dfrac{dx}{dt}$ $\longrightarrow$ força de resistência

$F_{ext} = F_0 \cos(\varpi\, t)$ $\longrightarrow$ força externa

$F = -kx$ $\longrightarrow$ força restauradora de um sistema harmônico simples.

Como esse sistema é mais complexo, devemos somar à força restauradora de um S.H.S., uma força externa e a força de resistência:

$$F_{rest} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\varpi\, t)\,.\ (i)$$

Pela 2ª. Lei de Newton, temos:

$$F = ma\,.\ (ii)$$

Como $(i) = (ii)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\varpi\, t)\,.$$

Assim, o PVI $\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\gamma\dfrac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(\varpi\, t) \\ x(0)=x_0, \qquad x'(0)=v_0 \end{cases}$ tem solução única.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Como o sistema massa – mola e o circuito RLC são governados, matematicamente, pela mesma equação diferencial, podemos fazer simulações de oscilações mecânicas em circuitos elétricos, com as correspondências:

$$\begin{cases} m \to L \\ \gamma \to R \\ k \to \dfrac{1}{C} \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Todas as noções estudadas neste capítulo podem ser generalizadas para EDOLH de ordem maior que dois. Por exemplo, o wronskiano de n funções $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ é definido por

$$W(x)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

As funções $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ são ditas linearmente independentes, se e somente se, a equação

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)=0$$

implica que $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$.

As n funções serão ditas linearmente dependentes se não forem linearmente independentes, isto é, se uma delas for combinação linear das demais.

O "Princípio de Superposição" fica assim enunciado:
Se $y_1,\cdots,y_n$ são n soluções de uma EDOLH de n-ésima ordem

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0,$$

então qualquer combinação linear $y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n$ também é solução dessa equação.

"Teorema de Abel":

Sejam $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ n soluções de uma EDOLH de ordem n

$$y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0.$$

Então o $W(x)$ satisfaz a EDOLH de 1ª ordem $W' + f(x)W = 0$.

ATIVIDADES

Determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$.

2) $y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$.

3) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$.

4) $y^{(iV)} = 0$.

5) $(D^4 + 1)y = 0$.

Respostas:

> edo1 := diff(y(x),x,x,x)+3*diff(y(x),x,x)-1*diff(y(x),x)-3*y(x) =0;

$$edo1 := \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) - 3\,\mathrm{y}(x) = 0$$

> dsolve(edo1,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{x} + \_C2\,\mathbf{e}^{(-x)} + \_C3\,\mathbf{e}^{(-3\,x)}$$

> edo2 := diff(y(x),x,x,x)+5*diff(y(x),x,x)-8*diff(y(x),x)-12*y(x) =0;

$$edo2 := \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) + 5\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) - 8\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) - 12\,\mathrm{y}(x) = 0$$

> dsolve(edo2,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(2\,x)} + \_C2\,\mathbf{e}^{(-6\,x)} + \_C3\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

> edo3 := diff(y(x),x,x,x)+3*diff(y(x),x,x)+1*diff(y(x),x)+3*y(x) =0;

$$edo3 := \left(\frac{d^3}{dx^3}\mathrm{y}(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 3\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(edo3,y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{(-3\,x)} + \_C2\, \sin(x) + \_C3\, \cos(x)$$

```
> edo4 := diff(y(x),x,x,x,x) =0;
```

$$edo4 := \frac{d^4}{dx^4}\, y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo4,y(x));
```

$$y(x) = \frac{\_C1\, x^3}{6} + \frac{\_C2\, x^2}{2} + \_C3\, x + \_C4$$

```
> edo5 := diff(y(x),x,x,x,x)+y(x) =0;
```

$$edo5 := \left(\frac{d^4}{dx^4}\, y(x)\right) + y(x) = 0$$

```
> dsolve(edo5,y(x));
```

$$y(x) = -\_C1\, e^{\left(-\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) - \_C2\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right) + \_C3\, e^{\left(-\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)$$
$$+ \_C4\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)$$

3.6 Equações Lineares não Homogêneas

Seja o operador diferencial linear

$$L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$$

e a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$L(y) = q(x).$$

A equação diferencial homogênea associada à equação $L(y) = q(x)$ será:

$$L(y) = 0$$

Sejam y_p uma solução particular da equação não homogênea e $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$ a solução geral da equação homogênea correspondente. Então,

$$L(y) = L(y_0 + y_p) = L(y_0) + L(y_p) = 0 + q(x) = q(x).$$

Portanto, podemos concluir que

$$y = y_0 + y_p$$

são soluções da equação não homogênea. Reciprocamente, qualquer solução da equação não homogênea é uma solução da equação homogênea. De fato:

$$L(y_0) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = q(x) - q(x) = 0.$$

Assim, podemos afirmar que existem constantes arbitrárias tais que:

$$\boldsymbol{y_0 = y - y_p = C_1y_1 + C_2y_2},$$

e conseqüentemente, $y = y_0 + y_p$ é a família das soluções da equação não homogênea. Essas considerações são escritas formalmente através da demonstração do teorema abaixo.

Teorema 3.6.1: Seja $y_p(x)$ uma solução da equação não homogênea $y'' + f(x)y' + g(x)y = q(x)$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então, a solução geral da equação não homogênea $y'' + f(x)y' + g(x)y = q(x)$ é $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$.

Demonstração:

Seja $y(x)$ uma solução qualquer da equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = q(x)$ e $y_p(x)$ uma solução particular dessa equação. Então, $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

pois

$$Y'' + f(x)Y' + g(x)Y = \left(\left(y(x) - y_p(x) \right)' \right)' + f(x)\left(y(x) - y_p(x) \right)' + g(x)\left(y(x) - y_p(x) \right) =$$

$$= \left(y'' + f(x)y' + g(x)y \right) - \left(y_p'' + f(x)y_p' + g(x)y_p \right) = q(x) - q(x) = 0 .$$

Assim, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções fundamentais da equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$, existem constantes C_1 e C_2, tais que

$$Y(x) = y(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) ,$$

ou seja,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x) .$$

Observação 3.6.1: Para determinarmos a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea, precisamos de uma solução particular dessa equação e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Observação 3.6.2: A solução da equação homogênea associada também pode ser chamada de "**função complementar**".

Teorema 3.6.2: Princípio de Superposição para Equações Não homogêneas

Seja $y_p^{(1)}(x)$ uma solução da equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_1(x)$ e $y_p^{(2)}(x)$ uma solução da equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_2(x)$. Então, $y_p(x) = y_p^{(1)}(x) + y_p^{2}(x)$ é solução da equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_1(x) + q_2(x)$.

Demonstração:

Seja $y_p(x) = y_p^{(1)}(x) + y_p^{2}(x)$,com $y_p^{(1)}(x)$ solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_1(x)$ e $y_p^{(2)}(x)$

solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_2(x)$, então

$$y_p'' + f(x)y_p' + g(x)y_p = \left(\left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right)' \right)' + f(x)\left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right)' + g(x)\left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right) =$$

$$= (y_p^{(1)})'' + f(x)(y_p^{(1)})' + g(x)y_p^{(1)} + (y_p^{(2)})'' + f(x)(y_p^{(2)})' + g(x)y_p^{(2)} = q_1(x) + q_2(x) .$$

3.6.1 Determinação de soluções particulares de equações não homogêneas com coeficientes constantes pelo método dos coeficientes a determinar

O método dos coeficientes a determinar é um método para encontrar uma solução particular de um EDO linear não homogênea com coeficientes constantes; assim, podemos dizer que uma das limitações desse método é a restrição que a equação deve ser uma **EDOL com coeficientes constantes.** Além disso, o termo não homogêneo deve ser uma combinação de polinômios, exponenciais, senos e/ou cossenos. Porém, apesar dessas restrições, sempre que for aplicável é preferível aos demais, por ser um método que não envolve integrações, puramente algébrico.

Dada uma equação da forma

$$y'' + \alpha y' + \beta y = q(x),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, esse método pode ser resumido como segue:

$i)$ Se $q(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{ax}$, onde $a, a_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = x^r (K_0 + K_1 x + \cdots + K_n x^n)e^{ax},$$

com r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e K_i, $i = 0, \cdots, n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

$ii)$ Se $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, onde $a_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^r (K_0 + K_1 x + \cdots + K_n x^n),$$

com r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e K_i, $i = 0, \cdots, n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

$iii)$ Se $q(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{ax}\cos bx + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{ax} senbx$, onde $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^r[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_s x^s)e^{ax}\cos bx + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_s x^s)e^{ax} senbx],$$

com $s = \max\{n, m\}$ e r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e A_i, B_i, $i = 0, \cdots, n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

Observação 3.6.1.1: Podemos dizer que o método consiste: primeiramente na determinação de uma relação básica com os termos de $q(x)$ e os que aparecem por derivação dos mesmos; depois a determinação dos coeficientes da relação básica, através da identidade resultante, com a substituição da relação básica na equação.

Observação 3.6.1.2: A relação básica deve ser modificada quando um termo de $q(x)$ é também um termo da função complementar. Por exemplo, se um termo v de $q(x)$ também é um termo da função complementar correspondente a uma raiz de multiplicidade μ, devemos acrescentar na relação básica $x^{\mu} v$ e mais os termos que aparecem por derivação deste.

Observação 3.6.1.3: Quando um termo de $q(x)$ é $x^r v$ e v é um termo da função complementar correspondente a uma raiz de multiplicidade μ, devemos acrescentar na relação básica $x^{r+\mu} v$ e mais os termos que aparecem por derivação deste.

Observação 3.6.1.4: Esse método também é chamado "**método dos coeficientes indeterminados**".

Exemplo 3.6.1.1: Resolver a equação diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5e^{2x}$.

A equação característica é $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$, para a qual, duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1 = e^{-2x}$ e $y_2 = e^{-3x}$.

Vamos determinar uma solução particular da forma $y_p = Ke^{2x}$, onde K é um coeficiente a ser determinado. Substituindo y_p e suas derivadas na equação diferencial,

$$\left((Ke^{2x})'\right)' + 5\left(Ke^{2x}\right)' + 6Ke^{2x} = 5e^{2x},$$

temos

$$4Ke^{2x} + 10Ke^{2x} + 6Ke^{2x} = 5e^{2x}.$$

Assim, $K = \frac{1}{4}$ e uma solução particular da EDO é $y_p = \frac{1}{4}e^{2x}$; a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

```
> eq1:=diff(y(x),x,x)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=5*exp(2*x);
```

$$eq1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + 5\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 6\,\mathrm{y}(x) = 5\,\mathbf{e}^{(2x)}$$

```
> dsolve(eq1,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \mathbf{e}^{(-3x)}\,\_C2 + \mathbf{e}^{(-2x)}\,\_C1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}^{(2x)}$$

Exemplo 3.6.1.2: Determinar uma solução particular para a equação diferencial $y'' - y' - 2y = 2e^t - 3$.

Agora, devemos encontrar: y_{p_1} tal que $L(y_{p_1}) = 2e^t$ e y_{p_2} tal que $L(y_{p_2}) = -3$; depois fazemos $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$. Pela linearidade temos:

$$L(y_p) = L(y_{p_1} + y_{p_2}) = L(y_{p_1}) + L(y_{p_2}) = 2e^t - 3.$$

Quando procuramos y_{p_1} da forma $y_{p_1} = Ke^t$. Substituindo na equação $L(y_{p_1}) = 2e^t$, temos

$$K - K - 2K = 2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow y_{p_1} = -e^t.$$

Na EDO $L(y) = -3$, $q(t)$ é da forma $q(t) = Ke^{at}$, $a = 0$. Assim, devemos procuramos uma solução particular da forma $y_{p_2} = K$. Substituindo na equação $L(y_{p_2}) = -3$, temos $-2K = -3$, ou seja, $k = \frac{3}{2}$ e $y_{p_2} = \frac{3}{2}$.

Finalmente, uma solução particular da EDO é

$$y_p = -e^t + \frac{3}{2}.$$

```
> eq2:=diff(y(t),t,t)-diff(y(t),t)-2*y(t)=2*exp(t)-3;
```

$$eq2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right) - 2\,\mathrm{y}(t) = 2\,\mathbf{e}^t - 3$$

```
> dsolve(eq2,y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^{(2\,t)}\,\_C2 + \mathbf{e}^{(-t)}\,\_C1 - \mathbf{e}^t + \frac{3}{2}$$

Exemplo 3.6.1.3: Achar a solução da equação diferencial $y'' - 10y' + 25y = 3e^{5x}$.

A equação característica é $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$, que tem raiz dupla $\lambda_1 = \lambda_1 = 5$. Devemos determinar uma solução particular tal que $y_p(x) = Kx^2e^{5x}$. Temos:

$$y'_p(x) = 2Kxe^{5x} + 5Kx^2e^{5x} \Rightarrow y''_p(x) = \left(2K + 20Kx + 25Kx^2\right)e^{5x}.$$

Substituindo na equação dada, encontramos $K = \frac{3}{2}$; portanto, obtemos:

$$y = \frac{3}{2}x^2e^{5x} + C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

```
> eq3:=diff(y(x),x,x)-10*diff(y(x),x)+25*y(x)=3*exp(5*x);
```

$$eq3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 10\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 25\,\mathrm{y}(x) = 3\,\mathbf{e}^{(5\,x)}$$

```
> dsolve(eq3,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \mathbf{e}^{(5\,x)}\,\_C2 + \mathbf{e}^{(5\,x)}\,x\,\_C1 + \frac{3}{2}x^2\,\mathbf{e}^{(5\,x)}$$

Exemplo 3.6.1.4: Resolver a equação diferencial $y'' - 4y' + 3y = te^{3t} + 4$.

A equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1 = e^{3t}$ e $y_2 = e^t$. Inicialmente, vamos determinar uma solução particular y_{p_1} para $y'' - 4y' + 3y = te^{3t}$:

$$y_{p_1} = (K_1t + K_2)te^{3t} = (K_1t^2 + K_2t)e^{3t}.$$

Derivando y_{p_1} obtemos:

$$y'_{p_1} = (3K_1t^2 + (2K_1 + 3K_2)t + K_2)e^{3t}$$

e

$$y''_{p_1} = (9K_1t^2 + (12K_1 + 9K_2)t + (2K_1 + 6K_2))e^{3t}.$$

Substituindo na equação determinamos $K_1 = \frac{1}{4}$ e $K_2 = -\frac{1}{4}$. Portanto:

$$y_{p_1} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4}.$$

Agora, devemos achar uma solução particular y_{p_2} para a equação

$$y'' - 4y' + 3y = 4.$$

Tomando $y_{p_2} = K$, com K constante, encontramos $y_{p_2} = \frac{4}{3}$.

Desta forma, uma solução particular para a equação dada, inicialmente, é:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{4}{3}.$$

Finalmente, a solução geral será:

$$y = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{4}{3} + C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

```
> eq4:=diff(y(t),t,t)-4*diff(y(t),t)+3*y(t)=t*exp(3*t)+4;
```

$$eq4 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right) - 4\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right) + 3\,\mathrm{y}(t) = t\,\mathbf{e}^{(3\,t)} + 4$$

```
> dsolve(eq4,y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^t\,\_C2 + \mathbf{e}^{(3\,t)}\,\_C1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{24}(-6\,t + 3 + 6\,t^2)\,\mathbf{e}^{(3\,t)}$$

```
> simplify(%);
```

$$\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^t\,\_C2 + \mathbf{e}^{(3\,t)}\,\_C1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}\,t\,\mathbf{e}^{(3\,t)} + \frac{1}{8}\,\mathbf{e}^{(3\,t)} + \frac{1}{4}\,t^2\,\mathbf{e}^{(3\,t)}$$

Exemplo 3.6.1.5: Encontrar uma solução particular para a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$.

A equação característica é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. A função complementar é dada por $y = C_1e^{2t} + C_2e^t$.

Pela observação 3.6.1.2, teremos $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ com $y_{p_1} = K_1te^{2t} + K_2e^{2t}$ e $y_{p_2} = K_3e^t$.

> **eq5:=diff(y(t),t,t)-3*diff(y(t),t)+2*y(t)=exp(2*t);**

$$eq5 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right) - 3\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right) + 2\,\mathrm{y}(t) = \mathbf{e}^{(2\,t)}$$

> **dsolve(eq5,y(t));**

$$\mathrm{y}(t) = (\mathbf{e}^t\,(-1 + \_C1 + t) + \_C2)\,\mathbf{e}^t$$

Exemplo 3.6.1.6: Resolver a equação diferencial $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}\mathrm{sen}x$.

Temos $q(x) = e^{-x}senx$. Também sabemos que $q(x)$ é a parte imaginária de uma exponencial complexa:

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x}.e^{ix} = e^{-x}\cos x + ie^{-x}\mathrm{sen}x.$$

Assim, é conveniente considerarmos uma nova equação:

$$z'' + 2z' + 2z = 3e^{(-1+i)x},$$

a fim de tornarmos os cálculos mais práticos.

A equação característica tanto da equação dada, quanto dessa nova equação, é a mesma :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

com raízes $\lambda = -1 \pm i$.

A raiz $\lambda_1 = -1 + i$ é um raiz simples da equação característica, portanto, podemos procurar uma solução particular da forma

$$z_p = Kxe^{\lambda_1 x}.$$

Calculando as derivadas de z_p e substituindo na nova equação, obtemos:

$$Ke^{\lambda_1 x}\left(\left(2\lambda_1 + \lambda_1{}^2 x\right) + 2\left(1 + \lambda_1 x\right) + 2x\right) = 3e^{\lambda_1 x},$$

$$K\left(\left(\lambda_1{}^2 + 2\lambda_1 + 2\right)x + 2\lambda_1 + 2\right) = 3.$$

Como λ_1 é raiz da equação característica, o coeficiente de x acima é nulo, resultando:

$$K\left(2\lambda_1 + 2\right) = 3.$$

Substituindo $\lambda_1 = -1 + i$,

$$K = \frac{3}{2i} = -\frac{3i}{2}.$$

Logo,

$$z_p = -\frac{3i}{2} x e^{(-1+i)x} = -\frac{3i}{2} x e^{-x} \left(\cos x + i \mathrm{sen} x\right).$$

Considerando o operador linear $L = D^2 + 2D + 2$, associado a EDO, temos:

$$L\left(\frac{3xe^{-x}\mathrm{sen}x}{2} - i\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}\right) = 3xe^{-x}\cos x + 3ixe^{-x}\mathrm{sen}x\,,$$

pois, pela propriedade de linearidade:

$$L\left(\frac{3xe^{-x}\mathrm{sen}x}{2}\right) - iL\left(\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}\right) = 3xe^{-x}\cos x + 3ixe^{-x}\mathrm{sen}x\,.$$

Como a igualdade acima é uma igualdade entre números complexos, obtemos:

$$L\left(\frac{3xe^{-x}\mathrm{sen}x}{2}\right) = 3xe^{-x}\cos x\,,$$

$$L\left(-\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}\right) = 3xe^{-x}\mathrm{sen}x\,.$$

Dessa segunda igualdade,

$$y_p = -\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}$$

e, portanto, a solução geral é $y = -\frac{3xe^{-x}\cos x}{2} + e^{-x}(C_1\cos x + C_2\mathrm{sen}x)$.

Exemplo 3.6.1.7: Determinar a solução geral de $y'' - y' = t^2$.

Nesse caso, $q(t) = t^2 e^{0t}$, mas zero é raiz simples da equação característica $\lambda^2 - \lambda = 0$. Então, y_p será da forma

$$y_p(t) = (K_1t^2 + K_2t + K_3)t = K_1t^3 + K_2t^2 + K_3t\,,$$

substituindo suas derivadas na equação e agrupando os termos obtemos:

$$6K_1 t + 2K_2 - (3K_1 t^2 + 2K_2 t + K_3) = t^2$$

e

$$\begin{cases} -3K_1 = 1 \\ 6K_1 - 2K_2 = 0 \\ 2K_2 - K_3 = 0 \end{cases}.$$

A solução desse sistema algébrico é $K_1 = -\frac{1}{3}$, $K_2 = -1$, $K_3 = -2$.

Uma solução particular da EDO é

$$y_0 = -\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t\,,$$

e a solução geral:

$$y = -\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t + C_1 e^t + C_2\,.$$

> eq7:=diff(y(t),t,t)-diff(y(t),t)=t^2;

$$eq7 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right) = t^2$$

> dsolve(eq7,y(t));

$$\mathrm{y}(t) = -t^2 - \frac{t^3}{3} + \mathbf{e}^t\,\_C1 - 2\,t + \_C2$$

Exemplo 3.6.1.8: Resolver o problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 5 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$.

> **eq8:=diff(y(t),t,t)+3*diff(y(t),t)+2*y(t)=5;**

$$eq8 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + 3\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right) + 2\,\mathrm{y}(t) = 5$$

> **ci:=y(0)=-1,D(y)(0)=-3;**

$$ci := \mathrm{y}(0) = \text{-}1,\ \mathrm{D}(y)(0) = \text{-}3$$

> **dsolve({eq8,ci});**

$$\mathrm{y}(t) = \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\,\mathbf{e}^{(-2\,t)} - 10\,\mathbf{e}^{(-t)}$$

ATIVIDADES

Lista 3.6.1

Determinar uma solução particular para as seguintes equações, usando do método dos coeficientes a determinar:

1. $y'' - 4y' + 5y = te^{2t}\cos t$.

Resp: $y_p = \dfrac{t^2 e^{2t}\operatorname{sen} t}{4}$.

2. $y'' + 2y' + 5y = 5e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\operatorname{sen} 2t$.

Resp: $y_p = \dfrac{5te^{-t}\operatorname{sen} 2t}{4} + \dfrac{te^{-t}\cos 2t}{2}$

3. $y'' + 4y' = t\cos 2t$.

Resp: $y_p = \dfrac{t^2\operatorname{sen} 2t + t\cos 2t}{4}$

4. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$.

Resp: $\mathrm{y}(x) = \sin(3\,x)\,\_C2 + \cos(3\,x)\,\_C1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \mathbf{e}^{(3\,x)}$

5. $y'' + y' = 3sen(2x) + x\cos(2x)$.

Resp:
$\mathrm{y}(x) = -\frac{11}{25}\sin(2\,x) - \frac{17}{100}\cos(2\,x) + \frac{1}{10}\sin(2\,x)\,x - \frac{1}{5}\,x\cos(2\,x) - \mathbf{e}^{(-x)}\,\_C1 + \_C2$

Resolver os problemas de valor inicial a seguir:

1. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Resp: $\mathrm{y}(t) = -\frac{13}{10}\sin(2\,t) - \frac{19}{40}\cos(2\,t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}\mathbf{e}^t$

2. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Resp: $\mathrm{y}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-t)}\sin(2\,t) + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-t)}\cos(2\,t) + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-t)}(\cos(2\,t) + 2\sin(2\,t)\,t)$

3.6.2 Determinação de soluções particulares de equações não homogêneas pelo método de variação dos parâmetros

Este método pode ser aplicado a **qualquer equação linear de segunda ordem**

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = q(x),$$

para a qual se conheça a solução geral da equação homogênea correspondente:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

com $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, para x no intervalo de validade de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

O método consiste em determinar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a forma da solução geral da equação homogênea associada; para tal, substituímos os parâmetros (constantes C_1 e C_2) por funções a serem determinadas $C_1(x)$ e $C_2(x)$. Assim, vamos procurar uma solução particular da forma

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

com a condição

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

ou equivalentemente

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Então,

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Substituindo $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$ na equação, temos:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x)\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) +$$

$$+ g(x)\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = q(x),$$

que podemos escrever

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)\big(y_1''(x) + f(x)y_1'(x) + g(x)y_1'(x)\big) +$$

$$+ C_2(x)\big(y_2''(x) + f(x)y_2'(x) + g(x)y_2'(x)\big) = q(x);$$

portanto, $C_1(x)$ e $C_2(x)$ também satisfazem a equação

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=q(x).$$

Assim, obtemos o sistema de equações lineares para $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x)+y_2(x)C_2'(x)=0 \\ y_1'(x)C_1'(x)+y_2'(x)C_2'(x)=q(x) \end{cases}.$$

Esse sistema pode ser escrito, matricialmente, na forma

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix},$$

com solução:

$$\begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix}=\frac{1}{W[y_1,y_2](x)}\begin{bmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}=\frac{1}{W[y_1,y_2](x)}\begin{bmatrix} -y_2(x)q(x) \\ y_1(x)q(x) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, obtemos duas equações diferenciais de 1ª ordem, com soluções $C_1(x)$ e $C_2(x)$, respectivamente, que substituídas em

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

nos permitem escrever uma solução particular:

$$y_p(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Exemplo 3.6.2.1: Resolver a EDO $(D^2-2D+1)y=\dfrac{e^x}{x}$.

A equação característica é $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cujas raízes são $\lambda_1=\lambda_2=1$. Então, a função complementar pode ser escrita como:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Assim, vamos procurar uma solução particular da forma:

$$y_p=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x.$$

Nesse caso é obtido o sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1'(x).e^x + C_2'(x).xe^x = 0 \\ \\ C_1'(x).e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

com solução:

$$C_1' = -1 \quad \text{e} \quad C_2' = \frac{1}{x}.$$

Integrando as igualdades acima, obtemos:

$$C_1 = \int C_1' dx = -\int dx = -x \quad \text{e} \quad C_2 = \int C_2' dx = \int \tfrac{dx}{x} = \ln|x|,$$

de onde $y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|$. A solução da equação pode ser escrita como

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln|x| = e^x(C_1 + C_2 x - x + x\ln|x|).$$

Exemplo 3.6.2.2: Resolver $y'' - 4y' + 3y = \left(1 + e^{-x}\right)^{-1}$.

> edo:=diff(y(x),x,x)-4*diff(y(x),x)+3*y(x)=(1+exp(-x))^(-1);

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 3\,\mathrm{y}(x) = \frac{1}{1 + \mathbf{e}^{(-x)}}$$

> dsolve(edo,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \mathbf{e}^{(3\,x)}\,\_C2 + \mathbf{e}^{x}\,\_C1 - \frac{1}{2}\ln(\mathbf{e}^{x} + 1)\,\mathbf{e}^{(3\,x)} - \frac{1}{4}\mathbf{e}^{x} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(2\,x)} + \frac{1}{2}\ln(\mathbf{e}^{x})\,\mathbf{e}^{(3\,x)} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{x}\ln((\mathbf{e}^{x} + 1)\,\mathbf{e}^{(-x)})$$

ATIVIDADES!

Lista 3.6.2

Determinar uma solução particular para as seguintes equações, através do método de variação dos parâmetros:

1. $y'' + y = \sec x$.

Resp: $y_p = (\cos x)(\ln|\cos x|) + xsenx$

2. $(D^3 + D)y = \csc t$.

Resp: $y_p = (\cos t)(\ln|\operatorname{sen} t|) - t\operatorname{sen} t - \ln|\csc t + \cot t|$

3. $y'' - 2y' = e^x \operatorname{sen} x$.

Resp: $y_p = -\dfrac{1}{2}e^x \operatorname{sen} x$

4. $(D^2 - 6D + 9)y = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$.

Resp: $y_p = -e^{3t}\ln|t|$

5. $4y'' - 4y' + y = 16e^{\frac{x}{2}}$.

Resp: $y_p = 2x^2 e^{\frac{x}{2}}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES!

• Os métodos estudados acima podem ser generalizados para EDO não homogêneas com ordem maior do que dois.

• A EDO $(D^2 + 2D + 5)y = 17\mathbf{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$, que representa oscilações forçadas num sistema massa-mola, tem solução $y = \left(-2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + 3\mathbf{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\right) + \left(C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\mathbf{sen}2t\right)$; essa solução é a resposta do sistema à força externa $\mathbf{17sen}\left(\sqrt{2}t\right)$; as constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais; o termo $\left(C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}2t\right)$ é chamado de parte transiente da solução; devido à presença da exponencial, a **parte transiente** tende a zero quando $t \to +\infty$; assim, após certo tempo, podemos afirmar que $y \approx -2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + 3\mathbf{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$; por esta razão esse termo é chamado de **parte estacionária** da resposta.