3

Capítulo

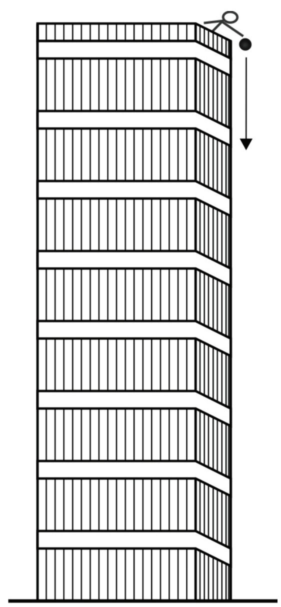
Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

3.1 Noções gerais

Equações diferenciais são equações que envolvem uma função incógnita e suas derivadas, além de variáveis independentes. Através de equações diferenciais podemos fazer a formulação diferencial dos modelos representativos de vários fenômenos estudados, tanto nas ciências físicas, como nas ciências biológicas e sociais. Os primeiros exemplos de equações diferenciais encontramos em algumas Leis da Física. Porém, com o desenvolvimento do conhecimento científico, usamos equações diferenciais em muitas áreas desse conhecimento. Com os exemplos abaixo, temos a intenção de motivar o estudo de equações diferenciais que propomos, mostrando algumas aplicações das mesmas.

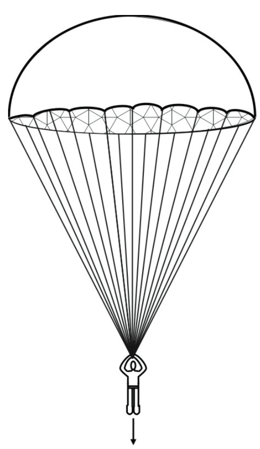
Exemplo 3.1.1: Queda livre de um corpo quando é desprezado o coeficiente de atrito.

$$\frac{d^2 y(t)}{d\,t^2} = g$$



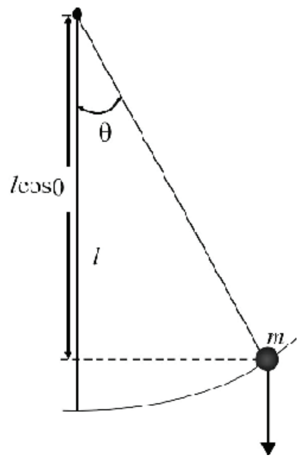
Exemplo 3.1.2: Queda livre de um corpo quando consideramos a resistência do ar.

$$m\frac{d^2 y(t)}{d\,t^2} = m\,g - k\frac{d\,y(t)}{d\,t} \quad \text{ou} \quad m\frac{d\,v(t)}{d\,t} = m\,g - k\,v(t)$$



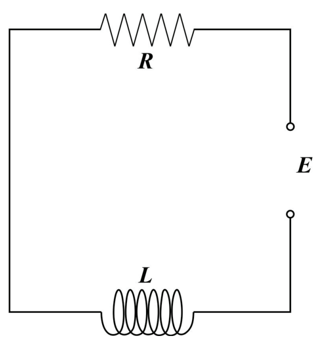
Exemplo 3.1.3: Movimento de um pêndulo simples.

$$l\frac{d^2\theta}{d\,t^2}+g\,sen\theta=0$$



Exemplo 3.1.4: Corrente num circuito elétrico.

$$L\frac{d\,I}{d\,t}+RI=E$$



Exemplo 3.1.5: Forma assumida por um cabo suspenso.

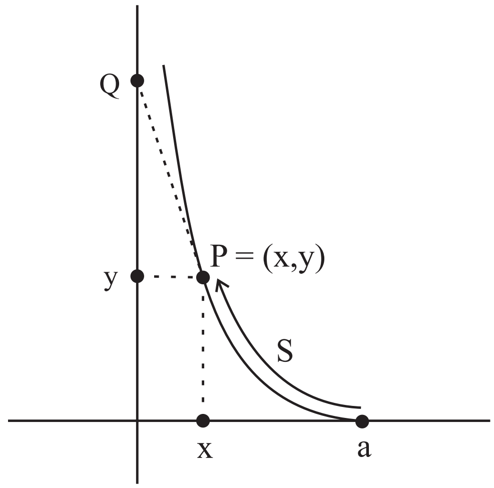
$$y''=k\sqrt{1+(y')^2}$$

Fonte: FAMAT em revista n°5 - setembro/2005

Fonte: www.guiasaovicente.com.br

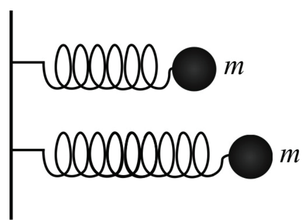
Exemplo 3.1.6: Problemas de perseguição.

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$



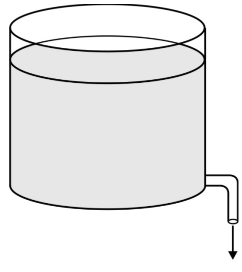
Exemplo 3.1.7: Sistema massa-mola: posição ocupada pela massa m no sistema.

$$m\frac{d^2x}{d\,t^2} + \gamma\frac{dx}{d\,t} + kx = F_0\cos(\omega t)$$



Exemplo 3.1.8: Problemas de vazão.

$$h' = -k\sqrt{h}$$



Ainda podermos citar outras aplicações, facilmente encontradas na bibliografia, tais como: resistência de fluidos; juros; dinâmica populacional; datação de carbono 14; lei de resfriamento de Newton, absorção de drogas; problemas de diluição, decaimento radioativo, etc..

Nos exemplos 3.1.1 ao 3.1.8, a função incógnita é função de uma variável independente; por isso as derivadas envolvidas são totais e as equações são designadas por **equações diferenciais ordinárias (EDO)**. Quando a função incógnita for função de mais de uma variável, as derivadas presentes na equação serão parciais e a equação será designada por **equações diferenciais parciais (EDP)**. Aqui estudaremos somente algumas equações diferenciais ordinárias.

A forma geral das equações diferenciais ordinárias é dada por:

$$F(x, y', y'', y''', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

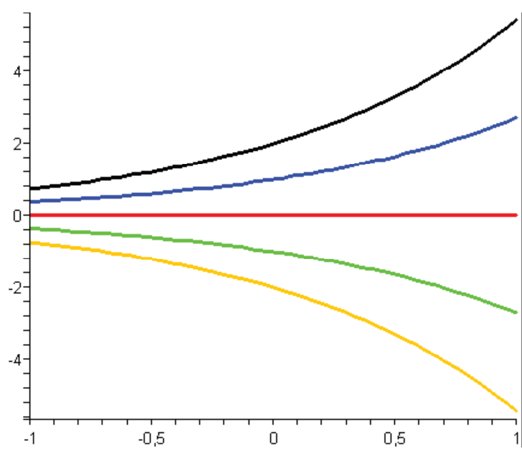
para $n \in \mathbf{N}$ fixado. **Ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada $n \in \mathbf{N}$ que figura nessa equação. Além disso, as equações diferenciais ordinárias podem ser apresentadas tanto na **forma normal** $y'(x) = f(x, y(x))$, como na **forma diferencial** $M(x,y)d\,x + N(x,y)d\,y = 0$.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

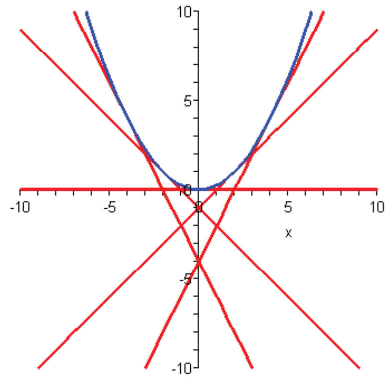
• Resolver uma equação diferencial significa encontrar uma função incógnita que satisfaça identicamente essa equação diferencial. Assim, **solução** de uma equação diferencial é uma função, definida num certo intervalo $\mathbf{I}$, tal que, conjuntamente com as suas derivadas, verifica a equação. ***Solução geral*** é uma expressão que contém um ou mais parâmetros reais arbitrários e que nos fornece todas as soluções da equação. ***Solução particular*** é uma qualquer solução da equação satisfazendo certas condições dadas. Certas equações diferenciais possuem ainda solução que foge ao formato geral, denominada de **solução singular**.

• Os comandos após o símbolo **>** correspondem a "comandos do software MAPLE".

Exemplo 3.1.9: A solução geral da equação $y'(x) = y(x)$ é a função $y(x) = C\,e^x$, $C \in \mathbf{R}$, que representa uma **família de curvas**, enquanto cada uma das curvas abaixo, onde **C=2**, **C=1**, **C=0**, **C=-1**, **C=-2**, são mas soluções particulares. É importante observar que essa equação é uma EDO de primeira ordem e primeiro grau.



Exemplo 3.1.10: A solução geral da equação $\left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2 - x\dfrac{d\,y}{x} + y = 0$ é a função $y(x) = C\,x - C^2$; as retas $y(x) = x - 1$, $y(x) = 2x - 4$, $y(x) = -x - 1$, etc., são soluções particulares; a parábola $y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ é a solução singular. Esse é um exemplo de EDO de primeira ordem e segundo grau. Então, como podemos observar, o **grau de uma EDO** é o grau a que está submetida a mais alta derivada da equação.



Observação 3.1.1: É bastante habitual utilizarmos a designação de *"integrar uma equação"* para "resolver *uma equação"*. Portanto, determinar a **integral geral**, significa determinar sua solução geral.

Observação 3.1.2: No Cálculo Diferencial e Integral já aprendemos a resolver algumas equações diferenciais. Ou seja, na resolução de uma integral temos uma equação diferencial solucionada.

Observação 3.1.3: Campos de direções – Constituem uma ferramenta útil para termos idéia do comportamento das soluções de uma EDO de 1ª ordem sem resolvê-la.

Para obtermos o campo de direções de uma EDO, primeiro consideramos a equação na forma normal. Geometricamente, a forma normal estabelece, em qualquer ponto, o valor do coeficiente angular y' da reta tangente à solução da equação diferencial nesse ponto. Então, em cada ponto de uma malha retangular, desenhamos um segmento orientado que tem inclinação igual a da reta tangente à solução que passa pelo ponto da malha. A seguir, mostramos, usando MAPLE, a **relação entre o campo de direções e as soluções da equação diferencial** do exemplo 3.1.9.

> with(DEtools):

> with(plots):

> eq:=diff(y(x),x)=y(x)

$$eq := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \mathrm{y}(x)$$

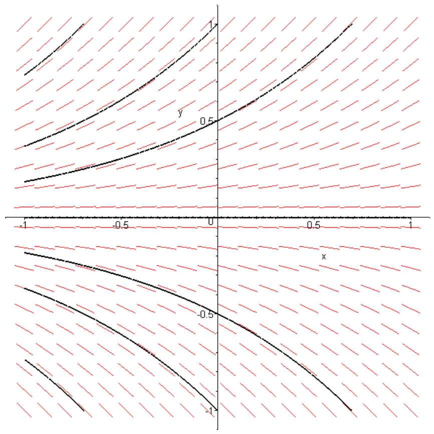
> dsolve(eq,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\ \mathbf{e}^{x}$$

> g1:=contourplot(y/exp(x),x=-1..1,
y=-1..1,contours=[0,1,2,3,-1,-2,-3,0.5,-0.5],numpoints=3000,color=black,thickness=2):

> g2:=dfieldplot(eq,y(x),x=-1..1,y=-1..1,arrows=LINE):

> display({g1,g2});



OBSERVAÇÕES IMPORTANTES!

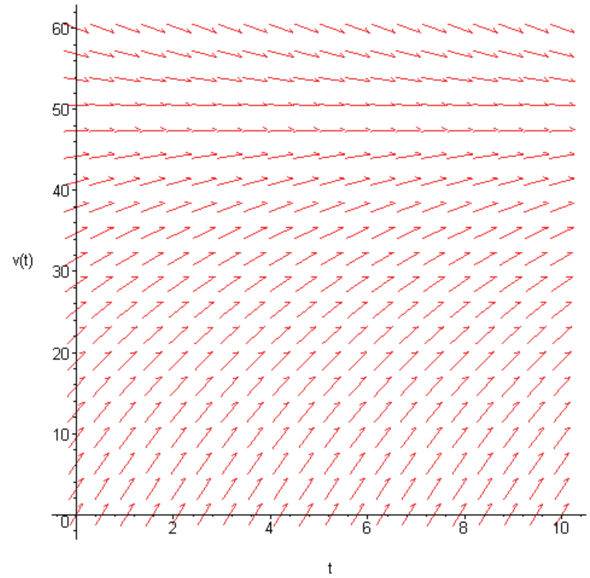
O campo de direções de uma EDO também é muito importante numa **análise qualitativa** das soluções da equação. Por exemplo, na referência "Boyce, W.E. & Di Prima, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Guanabara Koogan, 1994", podemos observar a modelagem da queda livre de um objeto com massa $m = 10\ kg$, próximo ao nível do mar. Considerando o coeficiente da resistência do ar como $\gamma = 2\ kg/s$, foi obtido o modelo matemático $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$. Através do campo de direções dessa equação, é possível observarmos uma solução de equilíbrio $v(t) = 49\ m/s$ (equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar, ou seja, valores de *v (t)* tais que $\frac{dv}{dt}$ seja zero).

Todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando a variável "tempo" aumenta; abaixo da solução de equilíbrio $\frac{dv}{dt} > 0$; acima, $\frac{dv}{dt} < 0$. Quando o tempo fica muito grande, todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio.

```
> with(DEtools):

> with(plots):

> eq1:=diff(v(t),t)=9.8-(v(t))/5;
```

$$eq1 := \frac{d}{dt}\mathrm{v}(t) = 9.8 - \frac{1}{5}\mathrm{v}(t)$$

```
> dfieldplot(diff(v(t),t)=9.8-(v(t))/5,v(t),t=0..10,v=0..60);
```



> dsolve(eq1,v(t));

$$v(t) = 49 + e^{\left(-\frac{t}{5}\right)} \_C1$$

> A:=plot(49,t=0..10):

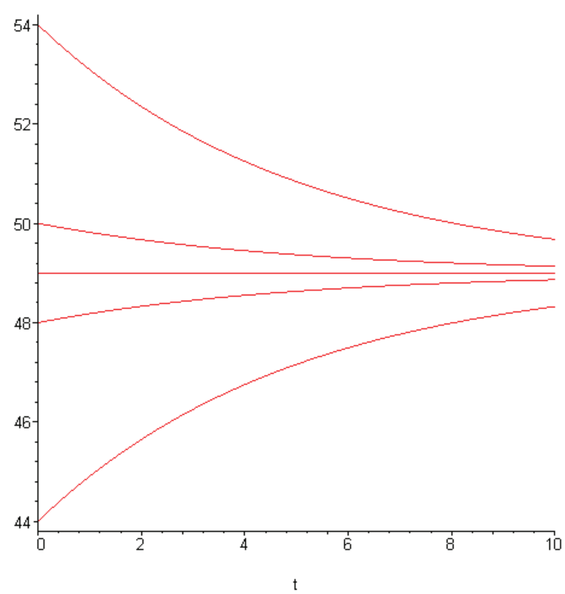
> B:=plot(49+exp(-1/5*t),t=0..10):

> C:=plot(49+exp(-1/5*t)*5,t=0..10):

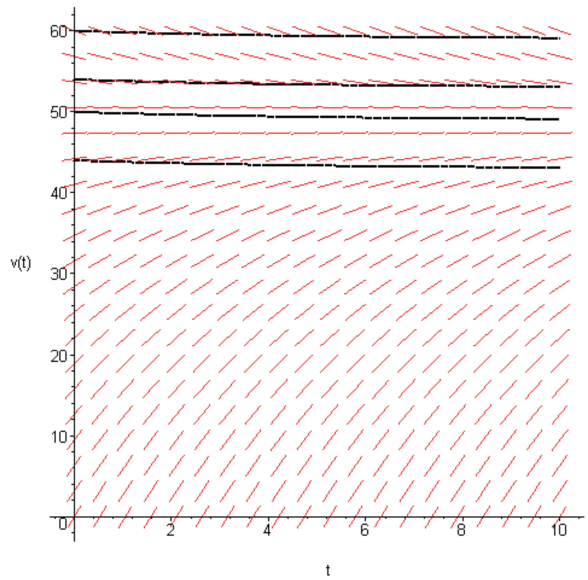
> d:=plot(49+exp(-1/5*t)*(-1),t=0..10):

> E:=plot(49+exp(-1/5*t)*(-5),t=0..10):

> display({A,B,C,d,E});



```
> g1:=contourplot(v-49-exp(-1/5*t),t=0..10,v=0..60,contours=[0,4,10,-6],numpoints=3000,color=black,thickness=2):

> g2:=dfieldplot(eq1,v(t),t=0..10,v=0..60,arrows=LINE):

> display({g1,g2});
```



Observação 3.1.4: Sem o uso do "software Maple", as soluções do exemplo 3.1.9 são obtidas a partir da situação elementar na forma normal abaixo:

$$y'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; y(x) = \int f(x)dx + C\,.$$

Esta seqüência também pode ser aplicada para $\dfrac{dx}{dy} = f(y)$. Nesse caso, determinamos a solução $x(y)$. Ainda podemos ter a situação $y'(x) = f(y)$, para a qual devemos obter a solução implícita $y = g(x, y)$.

Exemplo 3.1.11: A solução geral da equação $2yy' = -6x$ é dada implicitamente por $y^2 = -3x^2 + C$. As soluções são elipses (curvas de nível de $z = F(x, y) = y^2 + 3x^2$). O gráfico de F é um parabolóide elíptico.

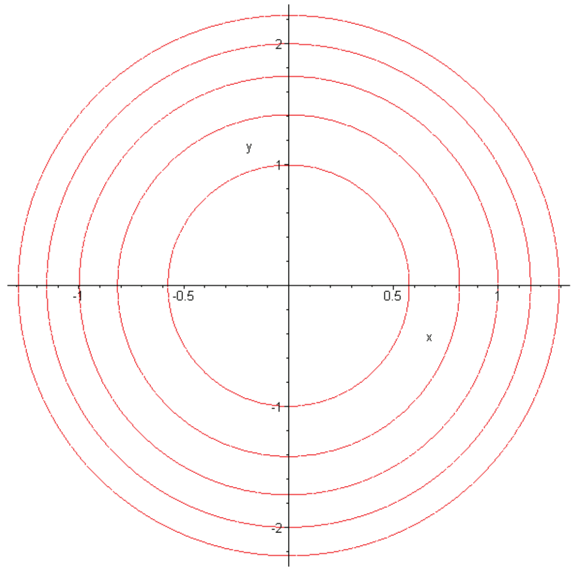
```
> with(DEtools):

> with(plots):

> eq:=2*y(x)*diff(y(x),x)=-6*x;
```

$$eq := 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) = -6\,x$$

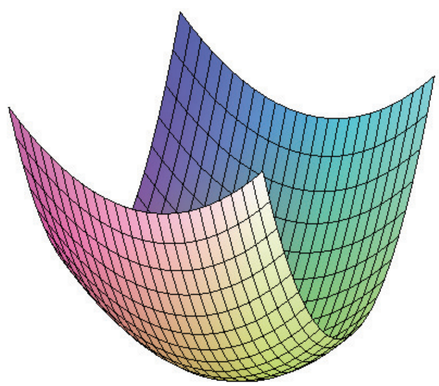
```
> dsolve(eq,y(x),'implicit');
```

$$\mathrm{y}(x)^2 + 3\,x^2 - \_C1 = 0$$

```
> implicitplot({seq(y^2+3*x^2-C=0,C=-5..5)},x=-3..3,y=-3..3,numpoints=5000);
```




```
> plot3d(y^2+3*x^2,x=-10..10,y=-10..10);
```



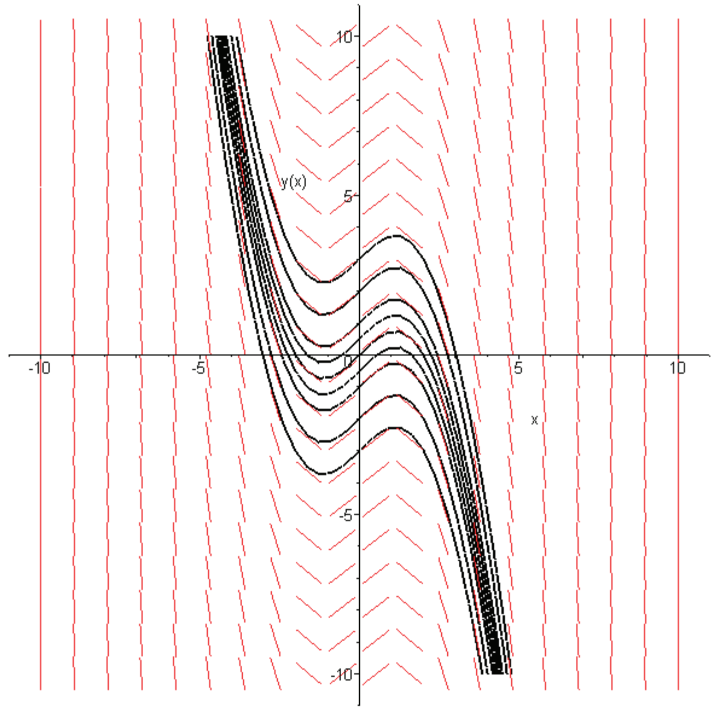
Observação 3.1.5: Para a situação elementar na forma diferencial,

$$M(x)dx + N(y)dy = 0\,,$$

que é conhecida como uma **equação diferencial com variáveis separáveis**, a solução geral é obtida por:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C\,.$$

Exemplo 3.1.12: Para equação diferencial $y' = \cos(x) - \dfrac{x^2}{3}$, temos $y = sen(x) - \dfrac{x^3}{9} + C$.



Observação 3.1.6: A seguinte situação na forma normal

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

pode ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis mediante seguinte a mudança de variável:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \;\Rightarrow\; y(x) = u(x)x \;\Rightarrow\; y'(x) = u'(x)x + u(x).$$

ATIVIDADES!

Lista 3.1 - Ver exemplos E41 ao E45 no apêndice V.

1. Mostrar que $y = e^{-3x} + c$ é solução da equação diferencial $y' + 3y = 0$.

2. Mostrar que $y = sen(2x)$ é solução da equação diferencial $y'' + 4y = 0$.

3. Mostrar que a função $y(x)$, definida implicitamente por $y^3 + 3y - x^3 = 4$, é solução da equação diferencial $y' = \dfrac{x^2}{(y^2 + 1)}$.

4. Mostrar que a função $y(t)$, definida implicitamente por $(1+y^3)^2 = (1+t^2)^3$, é solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(1+y^3)}{y^2(1+t^2)}.$$

5. Mostrar que a função dada na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \alpha\, sen t \\ y = \beta \cos t \end{cases}$$

é solução da equação $y' = -\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\dfrac{x}{y}$.

6. Sejam as equações

a) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

Mostrar que se $y_1(x)$ é solução da equação (a) e $y_2(x)$ é solução da equação (b), então $y(x) = Cy_1(x) + y_2(x)$ é solução da equação (b), para qualquer C.

3.2 Equações Lineares de 1° Ordem

Equações lineares de primeira ordem são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

onde *P*(*x*) e Q(x) são funções contínuas em um intervalo **I**. A função incógnita e suas derivadas aparecem na **forma linear**.

3.2.1 Equações em que P(x) = 0

Na equação linear acima, se $P(x) = 0$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = Q(x),$$

cuja solução obtemos ao integrarmos os dois membros. Assim, a solução geral será:

$$y(x) = \int Q(x)dx + C\,.$$

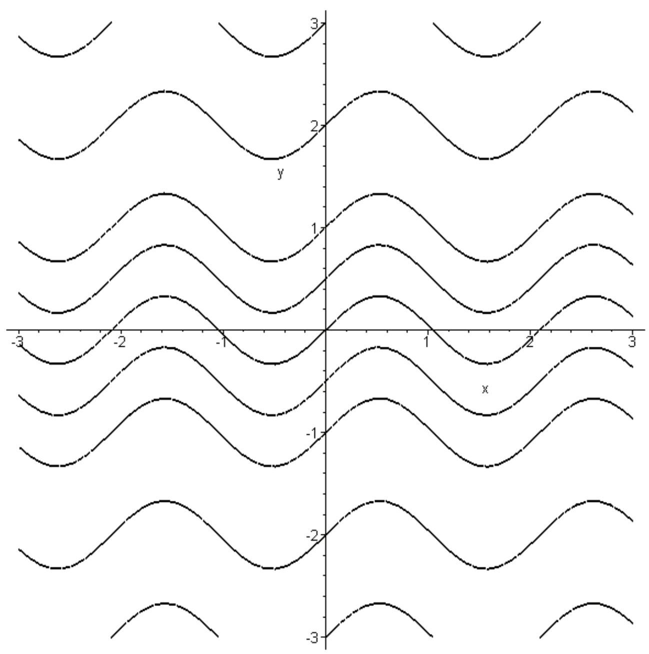
Exemplo 3.2.1.1: A solução geral da equação linear $y' = \cos 3x$, obtida por integração direta, é dada por

$$y(x) = \frac{1}{3}sen(3x) + C\,.$$

> with(DEtools):

> with(plots):

> contourplot(y-1/3*sin(3*x),x=-3..3,
y=-3..3,contours=[0,1,2,3,5,7,-1,-2,-3,
-5],numpoints=3000,color=black,thickness=2);



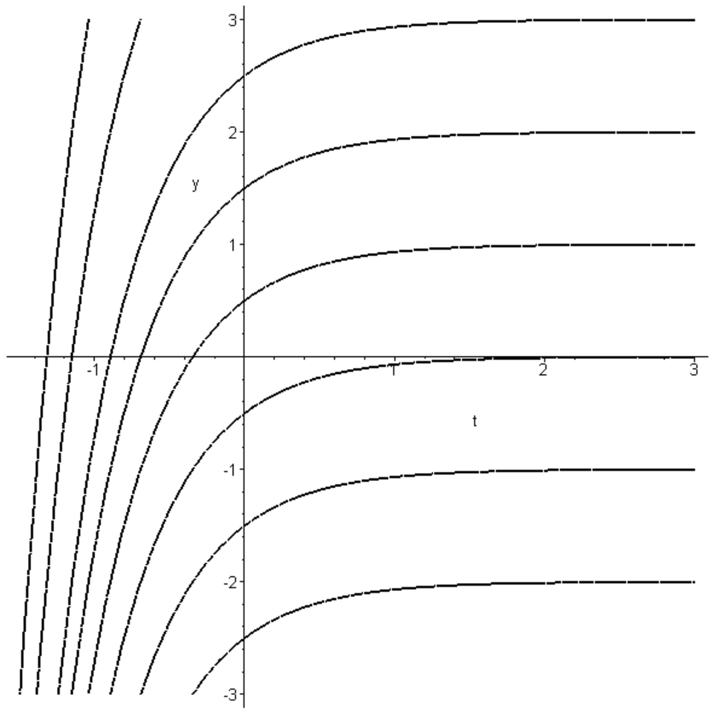
Soluções da equação $y' = \cos 3x$

Exemplo 3.2.1.2: A solução geral da equação linear $y' = e^{-2t}$ é $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$.

> with(DEtools):

> with(plots):

> contourplot(y+1/2*exp(-2*t),t=-3..3,
y=-3..3,contours=[0,1,2,3,5,7,-1,-2,-3,
-5],numpoints=3000,color=black,thickness=2);



Soluções da equação $y' = e^{-2t}$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES !

Problema de valor inicial (PVI) - é uma equação diferencial a ser resolvida conjuntamente com condições sobre a função incógnita *y* e as suas derivadas – condições essas a serem satisfeitas para um dado valor da variável independente. Estas condições são chamadas **condições iniciais**.

O problema $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ é chamado de PVI.

A solução do PVI, em um intervalo $\mathbf{I}$, é uma função definida em $\mathbf{I}$ tal que sua derivada, também definida em $\mathbf{I}$, satisfaz o PVI.

Exemplo 3.2.1.3: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{3x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solução geral da EDO: $y(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$.

A solução obtida deve satisfazer a condição inicial $y(0) = 1$, assim, $y(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} + C = 1$, e então $C = \dfrac{2}{3}$.

Logo, $y(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$ é a solução do PVI.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES !

Problema de valores de fronteira - é uma equação diferencial a ser resolvida conjuntamente com condições sobre a função incógnita *y* e as suas derivadas - condições essas a serem satisfeitas para dois ou mais valores da variável independente. Estes pontos poderão ser os extremos do intervalo onde se considera a solução, e as referidas condições são designadas por **condições de fronteira**.

Exemplo 3.2.1.4: Resolver a equação $y'' + y = 0$, com as condições de fronteira $y(0) = 2$ e $y(\pi/2) = 5$. Esse tipo de problema será resolvido posteriormente quando estudarmos equações de segunda ordem.

3.2.2. Equações em que P(x) ≠ 0 (caso geral)

Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Vamos usar uma função auxiliar $\mu(x) \neq 0$, de forma que ao multiplicarmos essa equação por $\mu(x)$, obtemos uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x)$, cuja solução geral obtém-se com a integração de ambos os membros.

Esta função $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ será chamada **fator integrante da equação linear**; depois mostraremos porque $\mu(x)$ deve ser definida dessa forma.

Inicialmente, vamos multiplicar a equação por $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$

Como

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}\frac{d}{dt}\left(\int P(x)dx\right),$$

ou seja,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = e^{\int P(x)dx}P(x) = \mu(x)P(x),$$

após a substituição desse resultado na equação $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$, temos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)Q(x).$$

Sabemos que $\frac{d}{dx}(\mu(x)y)=\mu(x)\frac{dy}{dx}+\frac{d\mu(x)}{dx}y$, então substituindo esse resultado no primeiro membro dessa equação resultante, vem:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y)=\mu(x)Q(x) \;\Rightarrow\; \mu(x)y=\int\mu(x)Q(x)dx \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int\mu(x)Q(x)dx+C\right].$$

Finalmente, a solução geral será:

$$y=\frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left[\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx+C\right].$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Agora vamos provar porque $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$:

Inicialmente, devemos observar que $\mu(x)\neq 0$ deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)P(x).$$

Como $\mu(x)\neq 0$, podemos multiplicar essa equação por $\frac{1}{\mu(x)}$:

$$\frac{1}{\mu(x)}.\frac{d\mu(x)}{dx}=P(x)\Rightarrow\frac{d}{d\mu}(\ln\mu(x))\frac{d\mu(x)}{dx}=P(x),$$

e pela regra da cadeia, resulta

$$\frac{d}{d(x)}(\ln\mu(x))=P(x).$$

Agora, integrando ambos os membros, obtemos

$$\ln\mu(x)=\int P(x)dx+C_1,$$

de onde:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx+C_1}=e^{C_1}.e^{\int P(x)dx}=C.e^{\int P(x)dx}.$$

Portanto, de fato $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$.

Observação 3.2.2.1: É importante salientarmos que qualquer múltiplo de $\mu(x)$ também será um fator integrante, ou um fator de integração, para a EDO linear de 1ª ordem.

Exemplo 3.2.2.1: Determinar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt}+\frac{y}{t}=t^2$.

F.I: $e^{\int \frac{1}{t}dt}=e^{\ln t}=t$

Multiplicando a equação pelo fator integrante, obtemos:

$$t\frac{dy}{dt}+t\frac{y}{t}=t^2.t \Rightarrow t\frac{dy}{dt}+y=t^3.$$

O primeiro membro da equação acima é a derivada do produto $ty(t)$:

$$\frac{d}{dt}(ty(t))=t^3 \Rightarrow ty(t)=\int t^3 dt \Rightarrow ty(t)=\frac{t^4}{4}+C \Rightarrow y(t)=\frac{t^3}{4}+\frac{C}{t}.$$

Logo, a solução geral é $y(t)=\frac{t^3}{4}+\frac{C}{t}$.

Exemplo 3.2.2.2: Resolver o PVI $\begin{cases}\frac{dy}{dt}+\frac{y}{t}=t^2 \\ y(2)=4\end{cases}$.

A solução geral da equação já foi determinada no exemplo anterior: $y(t)=\frac{t^3}{4}+\frac{C}{t}$.

Agora, temos de satisfazer a condição inicial $y(2)=4$: assim, para $t=2$ temos $y=4$.

Com a substituindo da condição inicial na solução $y(t)$:

$$4=\frac{2^2}{4}+\frac{C}{2},$$

determinamos $C=6$.

Sendo assim, a solução do PVI é dada por $y=\frac{t^3}{4}+\frac{6}{t}$.

Exemplo 3.2.2.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt}-2y=e^t$.

F.I: $e^{\int -2dt}=e^{-2t}$

Quando multiplicamos a equação pelo fator integrante, obtemos:

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt}-e^{-2t}2y=e^{-2t}e^t,$$

ou seja,

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt}-e^{-2t}2y=e^{-t}.$$

A seguir, usamos a regra da cadeia e procedemos a integração dos dois membros da equação:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}y\right)=e^{-t} \Rightarrow \; e^{-2t}y=-e^{-t}+C \Rightarrow \; y=-\frac{e^{-t}}{e^{-2t}}+\frac{C}{e^{-2t}} \Rightarrow y=-e^{t}+Ce^{2t}$$

Logo, a solução geral é $y=-e^{t}+Ce^{2t}$.

> with(DEtools):

> with(plots):

> odeadvisor(eq);

$$[[\_linear, class\ A]]$$

> eq:=diff(y(t),t)-2*y(t)=exp(t);

$$eq := \left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right)-2\,\mathrm{y}(t)=\mathbf{e}^{t}$$

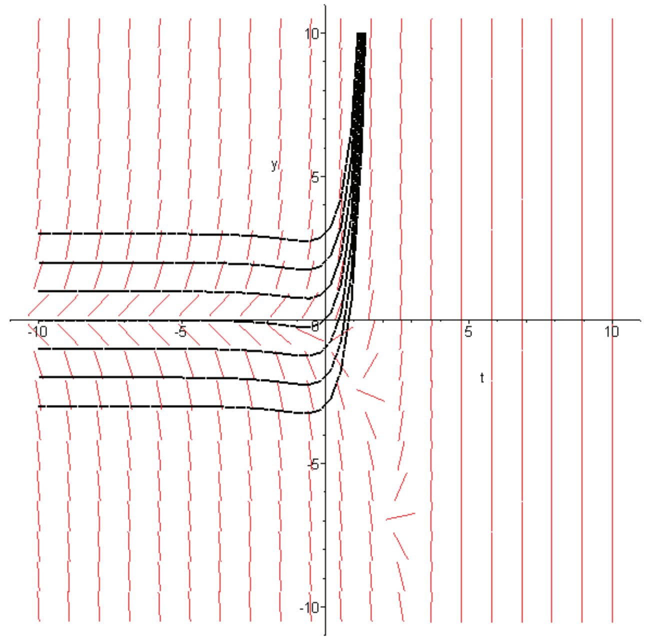
> dsolve(eq,y(t));

$$\mathrm{y}(t)=-\mathbf{e}^{t}+\mathbf{e}^{(2\,t)}\,\_C1$$

> g1:=contourplot(y+exp(t)-exp(2*t),t=-10..10,y=-10..10,contours=[0,1,2,3,-1,-2,-3],numpoints=3000,color=black,thickness=2):

> g2:=dfieldplot(eq,y(t),t=-10..10,y=-10..10,arrows=LINE):

> display({g1,g2});



> **limit(-exp(t)+exp(2*t),t=infinity);**

$$\infty$$

> **limit(-exp(t)+exp(2*t),t=0);**

$$0$$

> limit(-exp(t)+exp(2*t),t=-infinity);

$$0$$

Exemplo 3.2.2.4: Calcular a velocidade de um paraquedista com massa corporal $m = 75kg$, no instante $(t = 15s)$ em que abre o para-quedas, considerando o coeficiente de atrito $k = 5kg / s$. Calcular também a velocidade limite, considerando o coeficiente de atrito, após a abertura do pára-quedas, como $k = 110kg / s$.

O modelo matemático que descreve a queda livre, obtido a partir da 2ª Lei de Newton $\sum_i F_i = ma$, é a EDO linear de 1ª ordem:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m} v(t) = g \,,$$

com g a aceleração gravitacional.

A solução dessa equação diferencial é:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}} .$$

A constante de integração é determinada a partir da condição inicial. Assim, para $v(t = 0) = 0$, temos:

$$C = -\frac{mg}{k} ;$$

nesse caso a solução particular é

$$v(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k\,t}{m}}\right),\qquad t\leq 15s\,.$$

Então, a velocidade alcançada no instante $(t=15s)$ é $v=92{,}92m/s$.

A distância percorrida em queda livre é obtida por:

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}\Rightarrow y(t)=\int v(t)dt\Rightarrow y(t)=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k\,t}{m}}\right)+C\,.$$

Assim, para $y(t=0)=0$:

$$C=-\frac{m^2g}{k^2};$$

passados $15s$, temos $y=811{,}15m$.

Com a abertura do para-quedas, devido ao maior coeficiente de atrito, a variação da velocidade começa a decrescer, até ser eventualmente atingido um equilíbrio entre a força gravitacional e a força de atrito; a partir desse momento a velocidade é constante e para um tempo suficientemente grande teremos a chamada velocidade limite:

$$v_{\min}=\lim_{t\to\infty}v(t)=\frac{mg}{k}=\frac{75\times 9{,}8}{110}=6{,}68m/s\,.$$

Para a obtenção da solução geral das equações lineares de primeira ordem, em que $P(x)\neq 0$, também estudaremos os **métodos "de Bernoulli"** e **"de Lagrange"**, além da utilização de fator integrante, como procedemos.

3.2.2.1 Método de Bernoulli

Inicialmente, vamos considerar $y=u.v$, com u e v funções incógnitas arbitrárias, solução de uma EDO linear de primeira ordem.

Então

$$y=u.v\;\Rightarrow\;y'=u.v'+u'.v\,.$$

Substituindo y e y' na equação linear não homogênea $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, obtemos:

$$uv'+u'v+P(x)uv=Q(x)\,,$$

ou

$$u.\left[v'+P(x)v\right]+u'v=Q(x)\,.$$

Considerando que v pode ser determinada arbitrariamente, temos:

$$v'+P(x)\,v=0\Rightarrow\;v'=-P(x)\,v\;\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-P(x).v\;\Rightarrow\;\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx\Rightarrow\;v=e^{-\int P(x)dx}\,.$$

Substituindo $v'+P(x).v=0$ e $v=e^{-\int P(x)dx}$ em $u.\left[v'+P(x)\,v\right]+u'.v=Q(x)$, resulta:

$$u'.e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\Rightarrow \frac{du}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}\Rightarrow \int du=\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx\Rightarrow$$

$$u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\,.$$

Finalmente, levando u e v à equação, temos a solução geral na forma:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\ \right].$$

Exemplo 3.2.2.1.1: Achar a solução geral do PVI $\begin{cases} y'+y=x \\ y(1)=\dfrac{y_0}{e} \end{cases}$.

A solução da equação diferencial pode ser obtida pelo método de Bernoulli: inicialmente, fazemos $y=u.v\ \Rightarrow$ $y'=u.v'+u'.v$; após, substituímos na EDO e obtemos:

$$u.v'+u'.v+uv=x\ \Rightarrow u.\left[v'+v\right]+u'.v=x\,.$$

A seguir, determinamos v:

$$\Rightarrow\ v'+v=0\ \Rightarrow v'=-v\ \Rightarrow\ \int\frac{dv}{v}=-\int dx\ \Rightarrow\ \ln v=-x\Rightarrow v=e^{-x}\,.$$

Usando esse resultado, encontramos u:

$$u'.e^{-x}=x\Rightarrow \frac{du}{dx}=x.e^{x}\ \Rightarrow \int du=\int x.e^{x}dx\Rightarrow u=\int x.e^{x}dx\Rightarrow u=x.e^{x}-e^{x}+C\,.$$

Logo, a solução geral da EDO é $y=(x-1)+C.e^{-x}$.

Agora, temos de satisfazer a condição inicial $y(1)=\dfrac{y_0}{e}$: assim, para *x =1* temos $y=\dfrac{y_0}{e}$.

Com a substituindo da condição inicial na solução determinamos $C=y_0$.

A solução do PVI é dada por $y=(x-1)+y_0\,e^{-x}$.

Exemplo 3.2.2.1.2: Achar a solução geral da equação $y'=y.\mathrm{tg}x+\cos x$ usando o método de Bernoulli.

Substituindo $y=u.v$ e $y'=u.v'+u'.v$ na equação, temos:

$$u.v'+u'.v=u.v.\mathrm{tg}x+\cos x\ \Rightarrow\ u.\left[v'-v.\mathrm{tg}x\right]+u'.v=\cos x\,.$$

Da igualdade $v'-v.\mathrm{tg}x=0$, temos:

$$v' = v.\text{tg}x \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int \text{tg}x dx \Rightarrow \ln v = -\ln(\cos x) \Rightarrow v = e^{-\ln(\cos x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = e^{\ln(\cos x)^{-1}} \Rightarrow v = (\cos x)^{-1}.$$

A seguir, determinamos u:

$$u'.(\cos x)^{-1} = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos^2 x \Rightarrow u = \int \cos^2 x dx \Rightarrow u = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int \cos 2x.2dx \Rightarrow u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\textbf{sen}2x + C$$

Substituindo *u* e *v* na equação: $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\textbf{sen}2x + C\right).\left(\frac{1}{\cos x}\right).$

Exemplo 3.2.2.1.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t$, através do método de Bernoulli.

Segundo Bernoulli, $y = u.v$; assim $y' = u.v' + u'.v$.

Com a substituição na equação, resulta:

$$u.v' + u'.v + \frac{2}{t}u.v = t \Rightarrow u.\left[v' + \frac{2}{t}v\right] + u'.v = t.$$

De onde temos:

$$v' + \frac{2}{t}v = 0 \Rightarrow v' = -\frac{2}{t}v \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{2}{t}dt \Rightarrow \ln v = -2\ln t \Rightarrow v = e^{-2\ln t} \Rightarrow v = t^{-2}.$$

Agora, determinamos u:

$$u'.t^{-2} = t \Rightarrow u' = t^3 \Rightarrow u = \frac{t^4}{4} + C.$$

Substituindo u e v em $y = u.v$, chegamos a seguinte solução geral: $u = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}$.

3.2.2.2 Método de Lagrange (Método de variação dos parâmetros)

Dada uma equação diferencial linear, quando o termo independente da variável incógnita é nulo, a equação é denominada homogênea. Assim, dada a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

se $Q(x) \neq 0$, a equação é dita **equação diferencial linear não homogênea**; se $Q(x) = 0$, temos uma **equação**

diferencial linear homogênea.

Primeiramente, dada uma equação diferencial linear homogênea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0\,,$$

por integração obtemos a solução $y = C.e^{-\int P(x)dx}$, onde *C* é uma constante arbitrária.

Agora, se a equação é não homogênea, podemos usar, além dos métodos já estudados, o método de Lagrange para determinar a solução dessa equação. Nesse método, usamos a solução $y = C.e^{-\int P(x)dx}$ e consideramos a constante como uma função de x, ou seja, fazemos variar o parâmetro:

$$y = C(x).e^{-\int P(x)dx}\,,$$

com $C(x)$ uma função derivável que precisa ser determinada.

Derivando $y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(C(x).e^{-\int P(x)dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-\int P(x)dx}.\frac{d}{dx}\big(C(x)\big) + C(x).\frac{d}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right).$$

Substituindo y e $\dfrac{dy}{dx}$ na equação não homogênea, obtemos:

$$e^{-\int P(x)dx}.\frac{d}{dx}\big(C(x)\big) - C(x).P(x).e^{-\int P(x)dx} + P(x).\left(C(x).e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\big(C(x)\big) = e^{\int P(x)dx}.Q(x) \Rightarrow C(x) = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$y = C(x).e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1\right],$$

onde C_1 é uma constante arbitrária.

Exemplo 3.2.2.2.1: Resolver a solução geral da equação $y' - y.\mathrm{tg}x = \cos x$, usando o método de Lagrange.

Primeiro, vamos considerar a EDO linear homogênea

$$y' - y.\mathrm{tg}x = 0\,,$$

cuja solução é $y = Ce^{\int \text{tg}x dx} = Ce^{-\ln(\cos x)} = Ce^{\ln(\cos x)^{-1}} = C(\cos x)^{-1}$.

Pelo método de Lagrange, a solução procurada é da forma $y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$. Temos então:

$$y' = \frac{C'(x).\cos x + C(x).\text{sen}x}{\cos^2 x}.$$

Substituindo y e y' na equação dada, resulta:

$$y' = \frac{C'(x).\cos x + C(x).\text{sen}x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\text{tg}x = \cos x.$$

Após algumas simplificações, temos como determinar $C(x)$ através da integração de $C'(x)$:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow C'(x) = \cos^2 x \Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x dx \Rightarrow C(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{sen}2x + C_1.$$

Então, a solução geral é: $y = \dfrac{1}{\cos x}\left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\text{sen}2x + C_1\right]$.

A seguir, vamos resolver, por esse método, alguns exemplos que já foram solucionados anteriormente.

Exemplo 3.2.2.2.2: Achar a solução geral da equação $y' + y = x$ através do método de Lagrange.

Dada a equação homogênea $y' + y = 0$, a solução é $y = Ce^{-\int dx} = Ce^{-x}$.

Logo, a solução de Lagrange será da forma:

$$y = C(x)e^{-x};$$

a derivada dessa função é dada por

$$y' = C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x}.$$

Substituindo y e y' na equação dada, temos:

$$C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x} + C(x).e^{-x} = x \Rightarrow C'(x) = xe^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \int xe^{x} dx \; C(x) = x.e^{x} - e^{x} + C_1.$$

Substituindo em $y = C(x)e^{-x}$:

$$y = \left(x.e^{x} - e^{x} + C_1\right)e^{-x} \Rightarrow y = x.e^{x}.e^{-x} - e^{x}.e^{-x} + C_1.e^{-x} \Rightarrow y = (x-1) + C_1.e^{-x}.$$

Exemplo 3.2.2.2.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt}+\frac{2}{t}y=t$ pelo método de Lagrange.

Inicialmente, resolvemos a equação homogênea $y'+\frac{2}{t}y=0$:

$$y=Ce^{-\int\frac{2}{t}dx}=Ce^{-2\ln t}=Ce^{\ln t^{-2}}=C.t^{-2}.$$

Logo, a solução a ser determinada é $y=\frac{C(t)}{t^2}$, cuja derivada é:

$$y'=\frac{C'(t)\,t^2-2t.C(t)}{t^4}.$$

Substituindo na equação dada:

$$\frac{C'(t).t^2-2t.C(t)}{t^4}+\frac{2}{t}\frac{C(t)}{t^2}=t$$

$$\frac{C'(t).t^2}{t^4}-\frac{2C(t)}{t^3}+\frac{2C(t)}{t^3}=t$$

$$\frac{C'(t).}{t^2}=t\Rightarrow C'(t)=t^3\Rightarrow C(t)=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C_1$$

Logo, a solução geral é $y=\frac{t^2}{4}+\frac{C_1}{t^2}$.

Observação 3.2.2.2.: Muitas vezes é conveniente resolvermos uma EDO linear de 1ª ordem, com função incógnita $x(y)$:

$$\left(1+\boldsymbol{y}^2\right)\boldsymbol{dx}=\left(\boldsymbol{arc}\tan\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{dy},$$

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}}=\frac{\boldsymbol{arc}\tan\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{y}^2},$$

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}}+\frac{\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{y}^2}=\frac{\boldsymbol{arc}\tan\boldsymbol{y}}{1+\boldsymbol{y}^2},$$

Solução Geral: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{arc}\tan\boldsymbol{y}-1+\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{arc}\tan\boldsymbol{y}}$.

ATIVIDADES!

Lista 3.2.2 - Ver exemplos E46 ao E52 no apêndice V.

Resolver as equações diferenciais lineares de primeira ordem:

1. $y' + \frac{2}{x} y = x^2$ **Resp:** $y = \frac{1}{5}x^3 + Cx^{-2}$

2. $x^2 y' + 2xy = 1$ **Resp:** $yx^2 = C + x$

3. $y' \cos^2 x + y = tg\, x$ **Resp:** $y + 1 = tg\, x + Ce^{-tg\, x}$

4. $y' + x^2 y - x^2 = 0$ **Resp:** $y = 1 + Ce^{-x^3/3}$

5. $\frac{dy}{dt} + \frac{ty}{1-t^2} = t + arcsen\, t$ **Resp:** $y = \sqrt{1-t^2}\left[\frac{1}{2}(arcsen\, t)^2 - \sqrt{1-t^2} + C\right]$

6. Seja a EDO linear de 1ª ordem $y' + \frac{2}{x} y - x = 0$. Determinar a solução geral. Determinar os pontos críticos da solução. Calcular $\lim_{x \to 0} y(x)$.

Resp: $y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$; se $C > 0$, os pontos críticos das soluções são $x = \pm\sqrt[4]{4C}$ e se $C < 0$ não têm pontos críticos; $\lim_{x \to 0} y(x) = +\infty$ quando $C > 0$ e $\lim_{x \to 0} y(x) = -\infty$ quando $C < 0$.

7. Dado o PVI

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' + \frac{2}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{y}(-2) = 3 \end{cases}.$$

Determinar o intervalo de validade da solução.

Resp. $(-\infty, 0)$

3.2.3. Equações transformadas em lineares

Uma **equação de Bernoulli** é uma EDO de 1ª ordem da forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

com $n \in \mathbf{R}$ e onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas em um intervalo $\mathbf{I}$. É claro que se $n = 0, n = 1$ a equação é linear. Porém, se $n \neq 0,\ n \neq 1$ a equação não é linear. Nesse caso, a mudança de variável

$$z = y^{1-n}$$

transforma a EDO de Bernoulli em uma EDO linear de 1ª ordem.

De fato, se $z = y^{1-n}$, temos:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z'.$$

Substituindo y e y' na equação de Bernoulli, resulta:

$$\frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z' + P(x) z^{\frac{1}{1-n}} = Q(x) z^{\frac{n}{1-n}} \Rightarrow \frac{1}{1-n} z' + P(x)z = Q(x),$$

que é uma EDO linear de 1ª ordem.

Observação 3.2.3.1: Com a mudança de variável proposta, se o expoente $1-n$ for negativo, precisamos verificar separadamente se $y = 0$ é uma solução da EDO de Bernoulli, pois essa solução, nesse caso particular, é eliminada ao fazermos a substituição $z = y^{1-n}$.

Uma **equação de Riccatti** é uma EDO de 1ª ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

em que $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são contínuas um intervalo $\mathbf{I}$ e $a_2(x) \neq 0$ em $\mathbf{I}$.

Se $y_1(x)$ é uma solução particular da equação de Riccatti, então a mudança de variável

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

reduz a uma EDO linear de 1ª ordem. Assim, podemos concluir que a solução geral de uma equação de Riccatti pode ser determinada desde que se conheça uma solução particular.

Observação 3.2.3.2: Uma equação de Riccatti com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0,$$

tem uma solução $y = \lambda$, λ um número real, se e somente se λ é raiz da equação quadrática

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Observação 3.2.3.3: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções particulares da equação de Riccatti, então a solução geral é dada por:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int a_2(x)(y_2 - y_1)dx},$$

com C uma constante arbitrária.

Observação 3.2.3.4: Se $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ são soluções particulares da equação de Riccatti, então a solução geral é dada por:

$$\frac{(y - y_1)(y_3 - y_2)}{(y - y_2)(y_3 - y_1)} = C,$$

com C uma constante arbitrária.

ATIVIDADES!

Lista 3.2.3 - Ver exemplos E53 ao E56 no apêndice V.

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações:

1. $y' + y = x^2y^2$;

Resp: $y = (2 + 2x + x^2 + Ce^x)^{-1}$ e $y = 0$.

2. $yy' + xy^2 - x = 0$;

Resp: > eqb:=y(x)*diff(y(x),x)+x*(y(x))^2-x=0;

$$eqb := \mathrm{y}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + x\,\mathrm{y}(x)^2 - x = 0$$

> dsolve(eqb,y(x));

$$\mathrm{y}(x) = \sqrt{1 + \mathbf{e}^{(-x^2)}\,\_C1},\ \mathrm{y}(x) = -\sqrt{1 + \mathbf{e}^{(-x^2)}\,\_C1}$$

> dsolve(eqb,y(x),'implicit');

$$\mathrm{y}(x)^2 - 1 - \mathbf{e}^{(-x^2)}\,\_C1 = 0$$

3. $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$;

Resp. $\mathrm{y}(x) = \dfrac{x + 1 + \_C1}{x + \_C1}$

4. $y' + 4y^2 - 9 = 0$;

Resp. $\mathrm{y}(x) = \dfrac{9\,x}{4} + \_C1$

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações, sendo dada uma solução particular:

1. $2y' - \dfrac{y^2}{x^2} = 1$; solução particular $y = x$;

2. $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$; solução particular $y = 1$.

3.3 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Equações diferenciais lineares de segunda ordem são equações da forma

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + f(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + g(x)y(x) = h(x),$$

onde $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções definidas num intervalo $\mathbf{I}$. Para simplificar a escrita, usaremos a notação

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x).$$

Também vamos considerar o operador diferencial linear $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$.

Em geral, para $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$, temos

$i)\ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

$ii)\ L(C\,y) = C\,L(y)$;

por isso o operador é chamado linear.

Assim, quando resolvemos a equação $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$, determinamos as funções que satisfazem

$$L(y) = h(x).$$

Teorema 3.3.1: Teorema de Existência e Unicidade

O problema de valor inicial