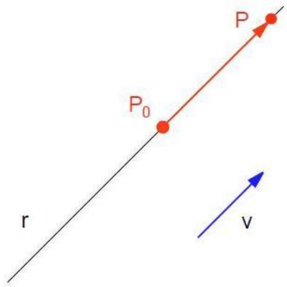
Universidade Federal de Pelotas
Vetores e Álgebra Linear
Prof^a: Msc. Merhy Heli Rodrigues
Vetores: Retas e Planos

Equação Paramétrica da Reta no Espaço

Considere o espaço tridimensional, um vetor $v = (a;\ b;\ c)$ determina uma direção no espaço. Dado um ponto $P_0 = (x_0;\ y_0;\ z_0)$, existe uma única reta r paralela ao vetor v passando pelo ponto P_0.



Um ponto $P = (x;\ y;\ z)$ pertence a esta reta se e somente se o vetor é paralelo a v, ou seja, $\overrightarrow{P_0P}$ é múltiplo escalar de v, isto é, $\overrightarrow{P_0P} = tv$ para algum escalar $t \in \mathbb{R}$. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0P}$ são dadas por $\overrightarrow{P_0P}$ = P – P_0 = $(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$:

Portanto, P pertence a esta reta se e somente se: $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z0) = (ta,\ tb,\ tc)$, ou seja:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Assim, qualquer ponto P de coordenadas $(x_0 + ta,\ y_0 + tb,\ \ z_0 + tc) = \overrightarrow{OP_0} + tv$ pertence à reta dada. Esta equação é chamada uma equação paramétrica da reta r e v *é* chamado um vetor direção da reta.

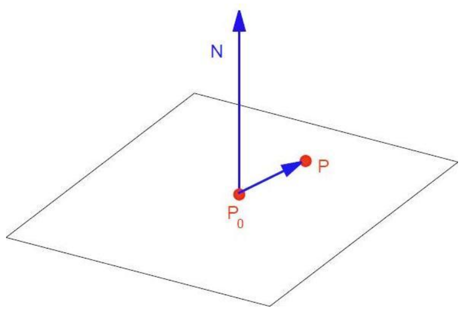
Exemplos:

1) Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (1;\ 0;¡2)$ e é paralela ao vetor v = (- 5, 8, 3).

2) Encontre uma equação paramétrica para a reta que passa pelos pontos $P_1 = (1, 3, - 2)$ e
$P_2 = (4, -5, -2)$.

Equação Geral do Plano

Um plano no espaço tridimensional é determinado de forma única por um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos. Portanto, dado um vetor $N = (a,\ b,\ c)$ e um ponto $P_0 = (x_0;\ y_0;\ z_0)$, existe um único plano π perpendicular ao vetor v passando pelo ponto P_0.



Um ponto $P = (x; y; z)$ pertence a este plano se, e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ *é* perpendicular ao vetor N, ou seja, $N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, o que equivale a $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, ou $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$. Chamando $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, isso pode ser escrito na forma $ax + by + cz + d = 0$, que é chamada uma equação geral do plano π.

Exemplos:

1) Encontre uma equação geral para o plano perpendicular ao vetor N = (-1, 4, 3) que passa pelo ponto (5, -2, 7). Encontre uma equação geral para o plano perpendicular a este mesmo vetor, mas que passa pelo ponto (0, 0, 0).

2) Encontre uma equação geral para o plano que passa pelos pontos $P_1 = (5, -2, 7)$, $P_2 = (3, 4, -1)$ e $P_3 = (2, 2, 2)$.

Equação Paramétrica do Plano

Existe um único plano paralelo a dois vetores não colineares $v = (v_1; v_2; v_3)$ e $w = (w_1; w_2; w_3)$, passando pelo ponto $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$. Um ponto $P = (x; y; z)$ pertence a este plano se, e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a ambos os vetores v e w, ou seja, $\overrightarrow{P_0P}$ é uma combinação linear de v e w, isto é, $\overrightarrow{P_0P} = tv + sw$, sendo $t, s \in \mathbb{R}$.

Dado um vetor N perpendicular a este plano, para qualquer combinação linear $u = tv + sw$, nós temos $u . N = t(v . N) + s(w . N) = 0$, o que mostra que o segmento orientado com ponto inicial P_0 representante de u pertence a este plano.

Portanto, P pertence a este plano se, e somente se: $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tv_1 + sw_1, tv_2 + sw_2, tv_3 + sw_3)$, ou seja,

$$x = x_0 + tv_1 + sw_1$$
$$y = y_0 + tv_2 + sw_2$$
$$z = z_0 + tv_3 + sw_3$$

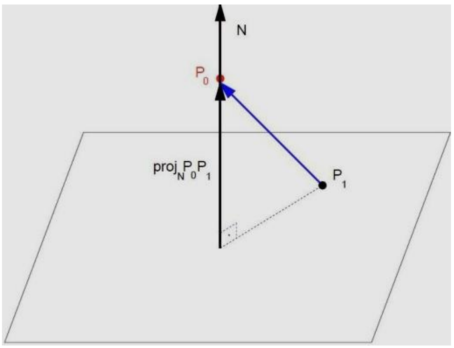
Assim, qualquer ponto P de coordenadas $(x_0 + tv_1 + sw_1, y_0 + tv_2 + sw_2\ z_0 + tv_3 + sw_3) = \overrightarrow{OP_0} + tv + sw$ pertence ao plano dado, assim temos a equação paramétrica do plano.

Exemplo: Encontre uma equação paramétrica para o plano π, sendo que $P_1 = (5, -2, 7)$, $P_2 = (3, 4, -1)$ e $P_3 = (2, 2, 2)$ pertencem ao plano.

Distâncias

Distância entre um Ponto e um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e π: $ax + by + cz + d = 0$ um plano, a distância do ponto P_0 ao plano π é a distância de P_0 ao ponto de π que está mais próximo de P_0.



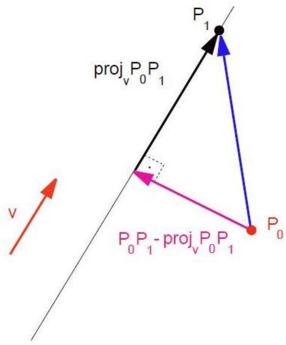
Dado qualquer ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas componentes: uma componente na direção do vetor normal $N = (a, b, c)$ a π e outra perpendicular a N. A componente na direção de N é a projeção ortogonal $proj_N^{\overrightarrow{P_1P_0}}$ de $\overrightarrow{P_1P_0}$ sobre N.

Então: $dist(P_0,\pi) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\ .\ N|}{\|N\|}$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $P_0 = (1, 0, 2)$ ao plano π: $2x - 3y + 5z - 10 = 0$.

Distância entre um Ponto e uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e r uma reta, a distância do ponto P_0 a reta r, é a distância de P_0 ao ponto de r que está mais próximo de P_0.



Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas componentes: uma componente na direção do vetor-direcional v da reta r e outra perpendicular a v.

Então: $dist(P_0,\pi) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times v\|}{\|v\|}$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $P_0 = (1, 0, - 2)$ a reta r dada pela equação paramétrica:

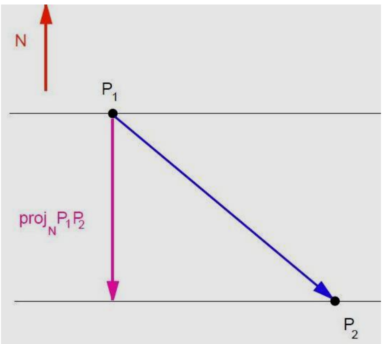
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = -5t \end{cases}$$

Distância entre Dois Planos

Sejam dois planos quaisquer π_1 e π_2, se:

- os planos não são paralelos, e portanto se intersectam ao longo de uma reta, ou se eles são coincidentes, temos $dist(\pi_1, \pi_2)$=0

- são paralelos e não coincidem, escolha dois pontos quaisquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, pertencentes aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Seja N um vetor normal a qualquer um dos planos (como eles são paralelos, seus vetores normais são também paralelos).



Então: $dist(\pi_1, \pi_2) = \left\| proj_N^{\overrightarrow{P_1P_2}} \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{\|N\|}$

Exemplo: Calcule a distância entre os planos $\pi_1: 2x - 3y + 5z + 1 = 0$ e $\pi_2: 4x - 6y + 10z - 10 = 0$

Distância entre Duas Retas

Sejam duas retas quaisquer r_1 e r_2 quaisquer, se:

- as duas retas se intersectarem em um ponto ou forem coincidentes, temos $dist(r_1, r_2) = 0$.
- as retas são paralelas, a distância entre as duas retas é a distância entre um ponto de uma reta e a outra reta. Ou seja, se r_1 e r_2 são duas retas paralelas, $dist(r_1, r_2)$ é a distância $dist(P_1, r_2)$ entre um ponto qualquer $P_1 \in r_1$ e a reta r_2, ou também a distância $dist(P_2, r_1)$ entre um ponto qualquer $P_2 \in r_2$ e a reta r_1.