Universidade Federal de Pelotas
Cálculo com Geometria Analítica I
Prof^a: Msc. Merhy Heli Rodrigues
Plano Cartesiano, sistemas de coordenadas: pontos e retas

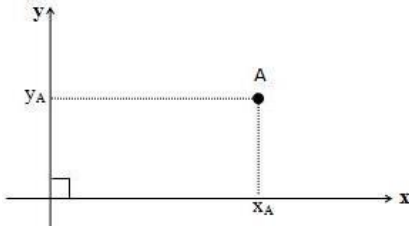
Ponto

1) Representação do Ponto

Na geometria um ponto está associado a um par ordenado (x, y) de números reais está. Os números x e y são as coordenadas desse ponto.

De um modo geral, as coordenadas de um ponto **A** são representadas por (x_A, y_A), onde:

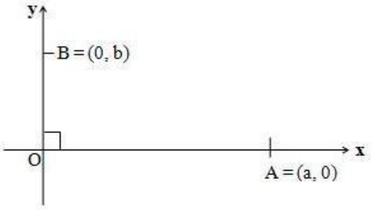
x_A é a abscissa de **A**. y_A é a ordenada de **A**.



<u>*OBSERVAÇÕES:*</u>

1) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada igual a zero. Assim, um ponto qualquer desse eixo pode ser representado por $(x, 0)$, $(a, 0)$, etc.

2) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissas igual a zero. Logo, um ponto qualquer desse eixo pode ser representado por $(0, y)$, $(0, b)$, etc.

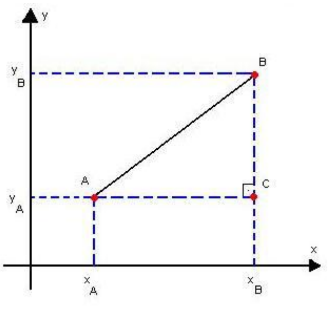


3) O ponto O (0, 0) é a origem do sistema de coordenadas.

Exemplo: Localizar os pontos A(0,0), B(2,0), C(0, -3), D(2, 5),E(4, -3), F(-1, 1) e G(-2, -3) no plano cartesiano.

2)Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, calculemos a distância d entre eles:



1º caso: AC// Ox

$d = d_{AB=}|x_B - x_A|$

2º caso: BC// Oy

$d = d_{BC=}|y_B - y_A|$

3º caso: AC $\nparallel$Ox e BC $\nparallel$Oy

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, temos:

$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, logo $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

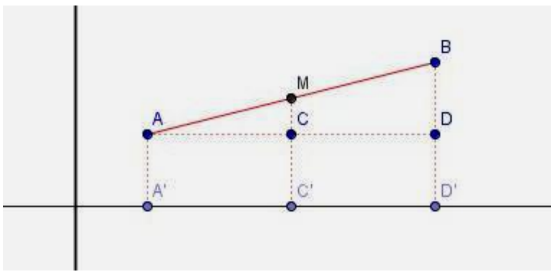
Exemplo: Calcular a distância entre os pontos A(-2, 5) e B (4, -3).

3) Ponto Médio de um segmento

Segmento de reta: é uma linha limitada por dois pontos denominados extremos.

O segmento de reta AB indica-se por $\overline{AB}$.

Seja M (a, b) o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, onde $A(x_{1,}y_1)$ e $B(x_{2,}y_2)$, vamos determinar as coordenadas "a" e "b" do ponto M em função das coordenadas dos ponto A e B.



1) Pela definição de triângulos semelhantes, temos ΔAMC ~ ΔABD;

2) Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então C é o ponto médio de $\overline{AD}$;

3) O quadrilátero ADA'D' é um retângulo e, portanto, seus lados opostos são congruentes;

4) Se C é o ponto médio de $\overline{AD}$, então C' é o ponto médio de $\overline{A'D'}$.

5) Sendo x_1 a abscissa de A', x_2 a abscissa de D' e "a" abscissa do ponto médio C', temos: $a = \frac{x_1+x_2}{2}$. Procedendo da mesma forma, sobre o eixo y, podemos demonstrar que $b = \frac{y_1+y_2}{2}$.

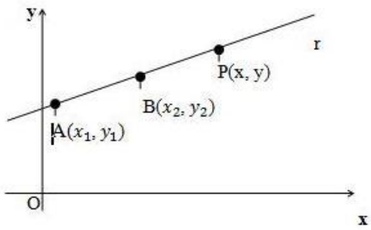
Exemplo: Determinar as coordenadas do ponto M(a, b), ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo A(-1, 4) e B(5, 2).

Reta

1) Equação geral da reta

Uma reta é definida a partir de dois pontos. Para que um ponto $P(x, y)$ qualquer pertença à reta AB, deve-se impor que P esteja alinhado com **A** e **B**.

Dada uma reta r no $\mathbb{R}^2$, vamos supor que r passe pelos pontos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2), A$\neq$ B, e consideremos um ponto genérico P(x, y).



Para que P pertença à reta r devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos:

$(y_1 - y_2)$x + $(x_2 - x_1)$y + $(x_1 y_2 - x_2 y_1)$=0 (1)

Fazendo: $y_1 - y_2$ = a, $x_1 - x_2$= b e $x_1 y_2 - x_2 y_1$= c, a equação (1) pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, que é a equação geral da reta r.

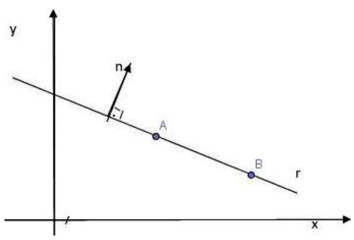
Assim no plano cartesiano, toda reta é representada por uma equação do 1º grau nas variáveis x e y, reciprocamente, toda equação do 1º grau em x e y é representada graficamente por uma reta.

Exemplo: Obter a equação da reta que passa por Q(4, 3) e R(0, 7).

2) Posições relativas e intersecções de retas

2.1) Vetor normal a uma reta

Consideremos a reta r do plano cartesiano, e equação $ax + by + c = 0$. Os coeficientes de x e y, são nesta ordem, as componentes de um vetor normal (ortogonal) à reta r, isto é,

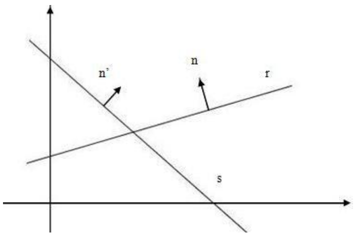


O vetor $n = (a, b)$ é um vetor normal à reta r, n e $\overline{AB}$ são ortogonais.

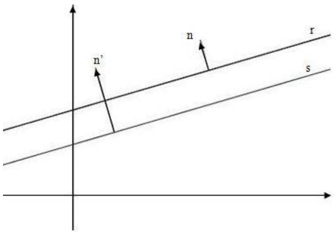
Exemplo: Um vetor normal à reta 2x-5y+4=0 é n=(2, -5).

2.2) Posições relativas de duas retas

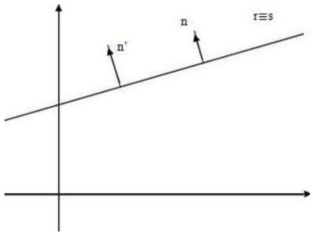
Duas retas r e s do plano cartesiano podem ser concorrentes ou paralelas.



concorrentes $\boldsymbol{r \times s}$



paralelas distintas



paralelas coincidentes

Dadas as equações de r e s, r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c = 0$, podemos reconhecer a posição das retas a partir dos coeficientes das equações. Como $n = (a, b)$ e $n' = (a', b')$ são vetores normais a r e s, respectivamente, temos que:

$$r \parallel s \Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

$$r \times s \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

OBSERVAÇÃO: Quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ as retas são paralelas coincidentes e quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ as retas são paralelas distintas.

Exemplos:

1) Dadas as retas r: $2x + 5y + 4 = 0$ e s: $4x - 10y - 3 = 0$, qual a posição relativa das duas retas?

2) Dadas as retas r: $2x - 3y + 1 = 0$ e s: $6x - 9y + 4 = 0$, qual a posição relativa das duas retas?

3) Dadas as retas r: $2x + 3y + 4 = 0$ e s: $4x + 6y + 8 = 0$, qual a posição relativa das duas retas?

2.3) Ponto de intersecção

Um ponto de intersecção $P(x_p, y_p)$ de duas retas, r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c = 0$ satisfaz as equações de ambas as retas e, então é solução do sistema:

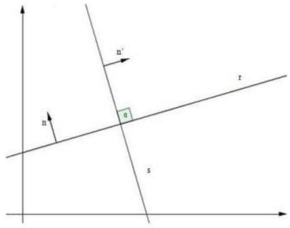
$$S: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Toda solução (x, y) do sistema S é o ponto de intersecção das duas retas.

Exemplo: Dadas r: $2x + y + 1 = 0$ e s: $x - 2y - 7 = 0$, qual é o ponto de intersecção das duas retas?

2.4) Perpendicularidade de duas retas

$$r \perp s \Leftrightarrow n \perp n' \Leftrightarrow n \cdot n' = 0 \Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0$$

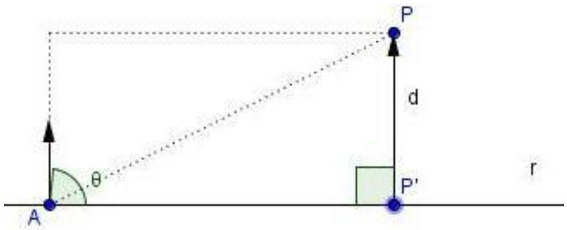


Exemplo: Dadas as retas r: 2x+5y-3=0 e s: 10x-4y-1=0, mostre que são perpendiculares.

3) Distância entre ponto e reta

A distância entre um ponto P e uma reta r é, por definição, a distância entre P e a sua projeção ortogonal P' sobre r: $d = |\overrightarrow{P'P}|$.

Dados $P(x_0, y_0)$ e r: $ax + by + c = 0$, podemos calcular d da seguinte maneira:



1º) Tomemos um ponto $A(x_1, y_1)$ em r:

$$A \in r \Rightarrow \mathrm{ax}_1 + \mathrm{by}_1 + \mathrm{c} = 0 \qquad (1)$$

2º) Notemos que $\overrightarrow{P'P}$ é a projeção $\overrightarrow{AP}$ na direção de n=(a,b), portanto sendo θ o ângulo entre $\overrightarrow{AP}$ e n temos:

$$d = |\overrightarrow{P'P}| = |\overrightarrow{AP}||\cos\theta| = |\overrightarrow{AP}| \cdot \left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot n}{|\overrightarrow{AP}||n|}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot n}{|n|}\right|$$

3º) Como $\overrightarrow{AP} = P - A = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ e n= (a, b), decorre que:

$$d = \left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot n}{|n|}\right| = \left|\frac{(x_0 - x_1) \cdot a + (y_0 - y_1) \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

de (1) temos: $c = -ax_1 - by_1$, portanto,

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

.

Exemplo:

1) Determinar a distância entre o ponto A(2, 1) e a reta r, de equação x+ 2y – 14= 0

2) Determinar a distância entre o ponto P(7,-3) e a reta r, de equação 8x+ 6y + 17= 0

4) Equação Reduzida e inclinação

4.1) Equação Reduzida

Consideremos uma reta $r: ax + by + c = 0$, onde $b \neq 0$, nota-se que $ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$.

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$, obtemos a equação: $y = mx + q$, que é denominada equação reduzida da reta.

4.2) Coeficientes na equação reduzida

Na equação reduzida $y = mx + q$, os coeficientes m e q são denominados, respectivamente, coeficiente angular e coeficiente linear da reta r. As suas interpretações geométricas são as seguintes:

- Coeficiente angular: $m = tg\alpha$, onde α é o ângulo de inclinação da reta r em relação ao eixo dos x.
- Coeficiente linear: q é a ordenada do ponto onde r corta o eixo dos y.

4.3) Paralelismo e Perpendicularidade

Consideremos duas retas r e s de equações reduzidas $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, nesta ordem.

As retas r e s são paralelas se, e somente se, suas inclinações em relação ao eixo x são iguais. Logo, podemos concluir que:

$$r \parallel s \Leftrightarrow m = m'$$

Observamos ainda que:

$$r: y = mx + q \Rightarrow -mx + y - q = 0$$
$$s: y = m'x + q' \Rightarrow -m'x + y - q' = 0$$

os vetores $n = (-m, 1)$ e $n' = (-m', 1)$ são os vetores normais a r e a s.
Logo:

$$r \parallel s \Leftrightarrow n \parallel n' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -m', & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m = m'$$

A condição de perpendicularidade é:

$$r \perp s \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

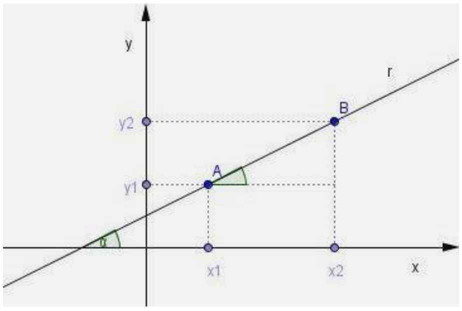
Exemplos: Informe se as retas são paralelas ou perpendiculares.

a) $r: y = 3x + 4$ e $s: y = 3x - 7$

b) $r: y = \frac{3}{2}x + 5$ e $s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

4.4) Cálculo do coeficiente angular a partir de dois pontos

Consideremos uma reta r, de equação reduzida $r: y = mx + q$, e vamos supor que A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) são dois pontos de r. Temos:



$A \in r \Rightarrow y_1 = mx_1 + q$ (1)

$B \in r \Rightarrow y_2 = mx_2 + q$ (2)

(2) – (1) $\Rightarrow y_2 - y_1 = mx_2 + q - mx_1 - q$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ logo $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Exemplo: Calcular o coeficiente da reta que passa pelos pontos A(2, 3) e B(5, 9).

4.5) Obtenção de uma reta passando num ponto $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$

1º caso: a reta é paralela ao eixo dos x

$$y = y_0$$

2º caso: a reta é paralela ao eixo dos y

$$x = x_0$$

3º caso: a reta não é paralela a nenhum dos eixos

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Exemplo: Dado o ponto P(4, 3):

a) qual a equação da reta r, que passa por P e é paralela ao eixo dos x?

b)qual é a equação da reta s, que passa por P e é paralela ao eixo dos x?

c) qual é a equação da reta t, que passa por P e tem inclinação de 45º ?