LISTA DE EXERCÍCIOS 03

Disciplina: Cálculo Operacional **Prof. Germán Suazo**

1. Resolva as equações diferenciais lineares de primeira ordem ou redutíveis a elas:
    - a. $y'+2y=x^2+2x$;
    - b. $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$;
    - c. $(x+1)\,dy-\left(2y+(x+1)^4\right)dx=0$;
    - d. $y'=\dfrac{1}{x\,\mathrm{sen}(y)+2\,\mathrm{sen}(2y)}$;
    - e. $y'-2xy=2xe^{x^2}$;
    - f. $3xy'-2y=\dfrac{x^3}{y^2}$;
    - g. $(xy+x^2y^3)y'=1$;
    - h. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-a^2}$, a constante ;
    - i. $y'=\dfrac{y}{2y\ln(y)+y-x}$;
    - j. $y'-y\tan(x)=\sec(x)$, $y(0)=0$;
    - k. $\int_0^1 f(rx)\,dr=nf(x)$;
    - l. $y'+x\,\mathrm{sen}(2y)=xe^{-x^2}\cos^2(y)$, (dica: use $u=\tan(y)$).
2. Resolva as seguintes equações de forma paramétrica:
    - a. $y=(y'-1)e^{y'}$;
    - b. $(y')^2x=e^{\frac{1}{y'}}$;
    - c. $2y=xy'+y'\ln y'$;
    - d. $y=x(1+y')+(y')^2$.
3. Verificar que as funções dadas (implícita ou explicitamente) são soluções das EDO indicadas:
    - a. $y=e^{-x}\left(3\cos(x)-2\,\mathrm{sen}(x)\right)$, $\quad y''+2y'+2y=0$;
    - b. $y=(c_1+c_2x)e^{-3x}$, $\quad y''+6y'+9y=0$;
    - c. $y=x^2\ln(x)$, $\quad xy'''=2$;
    - d. $\mathrm{sen}(y-c_2)=e^{x-c_1}$, $\quad y''=y'(1\_\,y'^2)$;
    - e. $y\ln(y)=x+\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $\quad y(1+\ln(y))y''+y'^2=2xye^{x^2}$.
4. Resolva as seguintes equações lineares homogêneas de ordem superior:
    - a. $3y''-2y'-8y=0$;
    - b. $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=10$;
    - c. $y''-2y'-2y=0$;
    - d. $y''-2y'+3y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
    - e. $y'''-2y''+2y'=0$.
5. Resolva as seguintes equações lineares não homogêneas de ordem superior, pelo método dos coeficientes indeterminados:
    - a. $y''-6y'+9y=25e^x\,\mathrm{sen}\,x$;
    - b. $y''+y=x\cos x$;

c. $y''-7y'=2$;

d. $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$;

e. $y''-4y'+5y=2x^2e^x$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

6. Resolva as seguintes equações (denominadas *equações de Euler)*, fazendo a substituição $x=e^t$ para reduzi-las a equações lineares homogêneas:

a. $x^2y''+xy'-y=0$;

b. $x^2y''+2xy'+6y=0$.

7. Resolva as seguintes equações lineares não homogêneas de ordem superior, pelo método dos coeficientes indeterminados:

a. $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$;

b. $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$;

c. $y''+2y'-y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

Respostas:

1.

a. $y=ce^{-2x}+\dfrac{1}{4}(2x^2+2x-1)$;

b. $y=c\sqrt{x^2+2x-1}+x$;

c. $y=c(x+1)^2+\dfrac{1}{2}(x+1)^4$;

d. $x=8\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{y}{2}\right)+ce^{-\cos(y)}$;

e. $y=(x^2+c)e^{x^2}$;

f. $y^3=cx^2+x^3$;

g. $\dfrac{1}{x}=2-y^2+ce^{-y^2/2}$;

h. $x^2+y^2-a^2=cy$;

i. $x=y\ln(y)+\dfrac{c}{y}$;

j. $y=x\sec(x)$;

k. $f(x)=cx^{-\frac{n-1}{n}}$;

l. $\tan(y)=\left(c+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}$.

2.

3.

a. $\begin{cases} x=e^p+c, \\ y=(p-1)e^p \end{cases}$;

b. $\begin{cases} x = \dfrac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}, \\ y = c + e^{\frac{1}{p}}\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 2cp - \ln p - 2, \\ y = cp^2 - p \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 2(1-p) + ce^{-p}, \\ y = \left[2(1-p)e^{p} + ce^{-p}\right](1+p) + p^2 \end{cases}$

4.

a. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$;

b. $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$;

c. $y = c_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + c_2 e^{(1+\sqrt{3})x}$;

d. $y = e^{x}\left(\cos\sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}\,x\right)$;

e. $y = c_1 + c_2 e^{x}\cos x + c_2 e^{x}\mathrm{sen}\,x$.

5.

a. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + e^{x}(4\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x)$;

b. $y = (c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x) + \dfrac{x\cos x + x^2\mathrm{sen}\,x}{4}$;

c. $y = c_1 + c_2 e^{7x} - \dfrac{2}{7}x$;

d. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}$;

e. $y = e^{2x}(\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x) + e^{x}(x+1)^2$.

6.

a. $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}$;

b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)\right]$.

7.

a. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 1 - xe^{-x} + (e^{x} - e^{-x})\ln(1 - e^{-x})$;

b. $y = c_1 e^{x} + c_2 + (e^{x} + 1)\ln(1 + e^{-x})$;

c.

$$y(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,e^{\frac{1}{2}x}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}x} - 1\right) - \frac{1}{3}\,e^{\frac{1}{2}x}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right) - \frac{1}{3}\,e^{-x}\ln\left(e^{x} - 1\right) + C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}$$