LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Disciplina: Cálculo Operacional **Prof. Germán Suazo**

1. Resolva as equações diferenciais a seguir, considerando-as como equações de variáveis separáveis ou redutíveis a elas:
   a. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$;
   b. $(y^2 + xy^2)\,y' + x^2 - yx^2 = 0$;
   c. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$;
   d. $y\ln(y)\,dx + x\,dy = 0$, $y(1) = 1$;
   e. $y' = a^{x+y}$, $\quad a > 0,\ a \neq 1$;
   f. $(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (x^2 y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\,dy = 0$;
   g. $y' = \text{sen}(x-y)$; (dica: use a mudança de variável $u = x - y$);
   h. $y' = ax + by + c$, $a,\ b,\ c$ constantes;
   i. $(x+y)^2\,y' = a^2$;
   j. $(x^2y^2 + 1)\,dx + 2x^2\,dx = 0$; (dica: use $u = xy$).
2. Encontrar uma curva que passa pelo ponto $(0,-2)$ de modo que o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto da curva é igual ao triplo do valor da ordenada do mesmo ponto.
3. Uma partícula de massa 1 g se desloca ao longo do eixo x devido a uma força horizontal diretamente proporcional ao tempo, calculado desde o instante $t = 0$ e inversamente proporcional à velocidade da partícula. No instante $t = 10$ s, a velocidade é $50\,\text{cm/s}$ e a força, 4 dinas. Determine a velocidade da partícula após um minuto de iniciado o movimento.
4. Um navio retarda seu deslocamento devido à ação da resistência da água, que é proporcional à velocidade do barco. A velocidade inicial do navio é 10 m/s, e após 5 s, a velocidade é 8 m/s. Determine o instante em que a velocidade é 1 m/s.
5. De acordo com a lei de esfriamento de Newton, a taxa instantânea de esfriamento de um corpo no ambiente é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente. Se a temperatura do ambiente é 20º C e um corpo esfria em 20 min de 100º C até 60º C, determine em que instante a temperatura será 30º C.
6. O rádio radiativo tem uma vida média de aproximadamente 1599 anos. Calcule a porcentagem que sobra de uma quantidade dada após 100 anos.
7. A datação por carbono-14 supõe que o dióxido de carbono na Terra hoje tem o mesmo conteúdo radiativo que tinha séculos atrás. Se isto for verdade, a quantidade de ^{14}C absorvido por uma árvore que cresceu vários séculos atrás seria a mesma que a absorvida por uma árvore que cresce hoje. Uma amostra de carvão vegetal antigo contem 15% da quantidade de ^{14}C de uma amostra de carvão moderno. Determine quanto tempo atrás foi queimada a árvore para produzir a amostra antiga. (A vida média do ^{14}C é 5715 anos)
8. Descreva as trajetórias ortogonais à família de curvas (pode utilizar programas computacionais algébricos)
   a. $y = \dfrac{c}{x}$;
   b. $x^2 + y^2 = c$;
   c. $x^2 = cy$;
   d. $y^2 = cx^3$;
   e. $y = ce^x$.

9. Resolva as equações diferenciais a seguir sabendo que são equações homogêneas ou reduzíveis a homogêneas:
   a. $4x-3y+(2y-3x)y'=0$;
   b. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$;
   c. $4x^2-xy+y^2+(x^2-xy+4y^2)y'=0$;
   d. $xy'=\sqrt{y^2-x^2}$;
   e. $(y^4-3x^2)\,dy=-xy\,dx$;
   f. $(y-xy')^2=x^2+y^2$;
   g. $(3x+y-2)\,dx+(x-1)\,dy=0$;
   h. $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$;
   i. $(y+y\sqrt{x^2y^4+1})\,dx+2x\,dy=0$;
   j. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$
10. Utilizando coordenadas retangulares, determine a forma do espelho se os raios que saem de um ponto fixo, quando refletidos são paralelos a uma direção dada.
11. Resolva as equações diferenciais a seguir, sabendo que elas são exatas ou reduzíveis a elas mediante o uso do fator integrante
   a. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$;
   b. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$;
   c. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{y^2}\right)dy=0$;
   d. $(3x^2-2x-y)\,dx+(2y-x+3y^2)\,dy=0$;
   e. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)\right)dy=0$;
   f. $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$;
   g. $2xy\ln(y)\,dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$;
   h. $(3x+2y+y^2)\,dx+(x+4xy+5y^2)\,dy=0$;
      fator integrante: $\mu=\varphi(x+y^2)$;
   i. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0$;
      fator integrante: $\mu=\varphi(y^2-x^2)$;
   j. $(3y^2-x)\,dx+(2y^3-6xy)\,dy=0$;
      fator integrante: $\mu=\varphi(x+y^2)$.

Respostas:

1.
   a. $x^2y^2+x^2=c$;
   b. $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\dfrac{1+x}{1-y}\right|=c$;
   c. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$ ou $y=1$;
   d. $y=1$;
   e. $a^x+a^{-y}=c$;
   f. $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\arctan(y)}=c$;

g. $x + c = \cot\left(\frac{y - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;
h. $b(ax + by + C) + a = Ce^{bx}$;
i. $x + a = a\tan\left(\frac{y}{a} + c\right)$;
j. $\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{2}\ln(x) = c$.

2. Equação: $y' = 3y$, y(0)=-2; solução: $y = -2e^{3x}$;
3. Equação: $\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v}$; resposta: $v = 10\sqrt{725}\ \ cm/s$;
4. Equação: $m\frac{dv}{dt} = -kv$; resposta: $t = -\frac{5\ln(10)}{\ln(0{,}8)}\ \ s$;
5. Equação: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$; resposta:
6. 95,76%;
7.
8.
   a. $y^2 = x^2 + c$;
   b. $y = cx$;
   c. $y^2 + \frac{x^2}{2} = c$ com $c > 0$;
   d. $2x^2 + 3y^2 = c$;
   e. $\frac{y^2}{2} + x = c$;
9.
   a. $y^2 - 3xy + 2x^2 = c$;
   b. $2cy = c^2x^2 + 1$;
   c. $(x + y)(x^3 + y^3) = c$;
   d. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y(y + \sqrt{y^2 - x^2})}{x^2}}$;
   e. $x^2 = y^4 + cy^6$;
   f. $c^2x^2 = 1 + 2cy$, $c^2 - x^2 = 2cy$;
   g. $(x - 1)(3x + 2y - 1) = c$;
   h. $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = c$;
   i. $\sqrt{x^2y^4 + 1} = cy^2x^2 - 1$;
   j. $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = c$, $x = 0$;
10. Parábola, $y^2 = 2cx + c^2$;
11.
   a. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$;
   b. $\sqrt{x^2 + y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = c$;

c. $\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{y}+\dfrac{x^2+y^2}{2}=c$;

d. $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=c$;

e. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln|x|=c$;

f. $\ln|x|-\dfrac{y^2}{x}=c$;

g. $x^2\ln|y|+\dfrac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}=c$;

h. $\mu=x+y^2$, $\quad x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=c$;

i. $\mu_1=\dfrac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$, $\mu_2=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad 1+y^2-x^2=cx$;

j. $\mu=\dfrac{1}{(x+y^2)^3}$, $\quad c(x+y^2)^2=x-y^2$.