UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Cálculo II* **Prof.:** *Germán Suazo*

Gabarito da Terceira Prova Escrita

1. Dada a função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$
    a. (**1,5 ptos.**) Diga, justificando sua resposta, se existe o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)\to(0,0)$.
    b. (**1,0 pto.**) Diga, justificando sua resposta, se a função $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

Solução:

a. Utilizando a mudança de variáveis $\begin{cases}x=r\cos(\theta),\\ y=r\,\text{sen}(\theta),\end{cases}$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{x^2+y^2}$$
$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2(\theta)-r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)}{r^2}$$
$$=\cos^2(\theta)-\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)$$

O valor desta última expressão não é único, pois, por exemplo, para $\theta=0$, o valor é 1, e para $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, o valor é 0.

Assim, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

b. Pela parte a., observamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, e portanto, a função $f(x,y)$ **não** é contínua em $(0,0)$.

2. **(2,5 ptos.)** Determine os extremos relativos da função $f(x,y)=x^2+4x-y^2$ na região limitada pela circunferência $x^2+y^2=4$.

Solução:

Primeiro, determinamos os pontos críticos da função. Temos que as equações $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+4=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$ têm como solução $x=-2$, $y=0$, indicando que $(-2,0)$ é um ponto crítico da função.

Por outro lado, $D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4<0$, indicando que o ponto $(-2,0)$ é um **ponto de sela no domínio geral da função**.

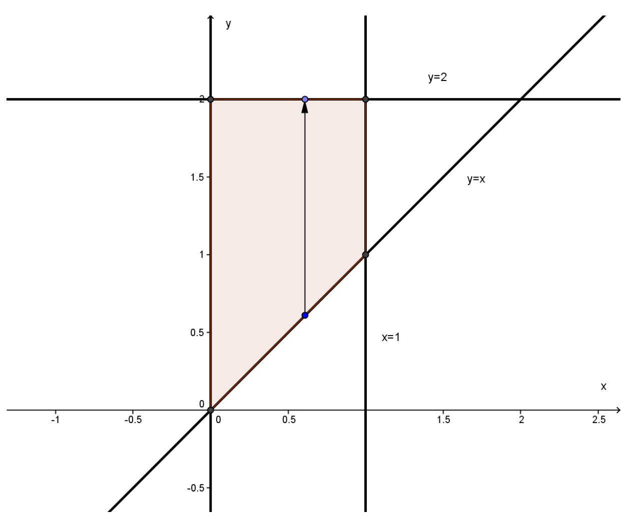
Agora, vamos determinar os extremos relativos da função no contorno da região, ou seja, na circunferência $x^2+y^2=4$. Observe que, considerando $y^2=4-x^2$, os valores da função $f(x,y)=x^2+4x-y^2$ no contorno são $g(x)=2x^2+4x-4$, com $-2\le x\le 2$. Os pontos críticos são obtidos da equação $g'(x)=4x+4=0$, ou seja, $x=-1$ Assim, vamos considerar os $x=-1$ junto com os extremos do intervalo $x=-2$, que originam os pontos $(-2,0)$ $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$ e $(2,0)$ com valores $f(-2,0)=-4$, $f(-1,\sqrt{3})=-6$, $f(-1,-\sqrt{3})=-6$. Resumindo, temos os pontos $(-2,0)$, $(2,0)$, $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$ e $(1,-\sqrt{3})$. Agora, vamos fazer uma tabela de valores para os pontos conseguidos:

(x,y)	$f(x,y)$	Condição
$(-2,0)$	-4	Ponto de sela
$(2,0)$	12	máximo
$(-1,\sqrt{3})$	-6	mínimo
$(-1,-\sqrt{3})$	-6	mínimo

3. Considere a integral dupla $\iint_R (x-y)\,dA$, onde R é a região limitada pelas retas $x=0$, $x=1$, $y=2$ e $y=x$.
   a. **(1,5 ptos.)** Escreva a integral em termos das integrais iteradas, nas duas ordens de integração.
   b. **(1,0 pto.)** Escolhendo uma das ordens da parte a, determine o valor da integral dupla.

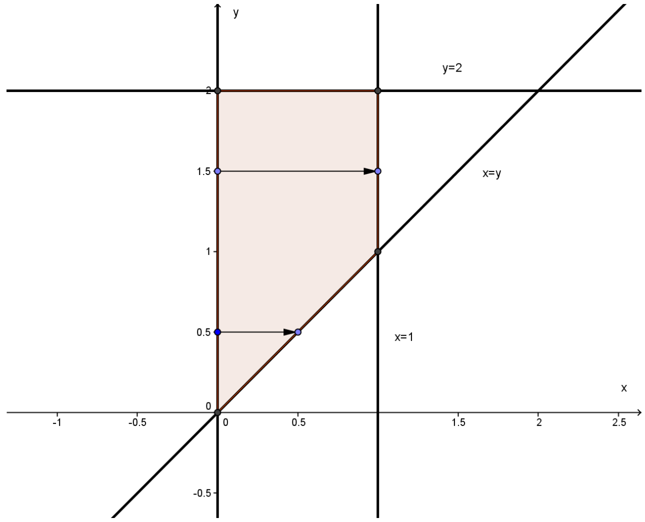
Solução:

a. Desenhando a região e escolhendo a ordem de integração $dy\,dx$ conseguimos a figura abaixo:



Assim, a integral fica $\iint_R (x-y)\,dA=\int_0^1\int_x^2 (x-y)\,dy\,dx$.

Agora, escolhendo a ordem de integraçao $dx\,dy$, observamos que a integral deve ser escrita como uma soma:



$$\iint_R (x-y)dA = \int_0^1\int_0^y (x-y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^1 (x-y)\,dx\,dy\,.$$

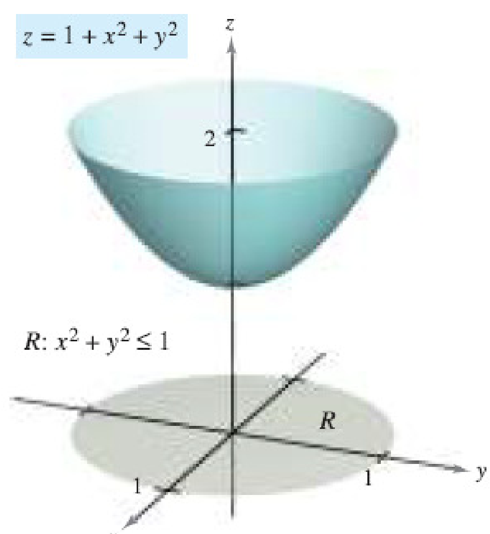
b. A integral iterada mais simples é $\iint_R (x-y)dA = \int_0^1\int_x^2 (x-y)\,dy\,dx\,.$

Logo,

$$\iint_R (x-y)dA = \int_0^1\int_x^2 (x-y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{y=x}^{y=2} dx = \int_0^1\left[(2x-2)-\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[2x-2-\frac{x^2}{2}\right]dx = \left[x^2-2x-\frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 1-2-\frac{1}{6}-0 = -\frac{7}{6}$$

4. (**2,5 ptos.**) Encontre a área (de superfície) da parte do parabolóide $z=1+x^2+y^2$ que fica acima da região R limitada pela circunferência $x^2+y^2=1$, como é mostrado da figura ao lado.



Solução:

Temos que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ e assim,

$$Area = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA,$$ ou seja,

$$Area = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Devido à geometria envolvida na questão, podemos utilizar as coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Logo,

$$Area = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\; r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} \left(1 + 4r^2\right)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[5^{3/2} - 1\right] d\theta = \frac{1}{6}\pi\left(5^{3/2} - 1\right)$$

Assim, a área da superfície é $\frac{1}{6}\pi\left(5^{3/2} - 1\right) \approx 5{,}33$ unidades de área.

Pelotas, 04 de outubro de 2012