**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**
**CENTRO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO**

**Disciplina:** *Cálculo II* **Prof.:** *Germán Suazo*

# *Gabarito da Segunda Prova Escrita*

1. (**3 ptos.**) A reta $r$ é a interseção dos planos $x-y=4$ e $y-z=2$. A reta $s$ é a interseção dos planos $x+y+z=1$ e $x-y+z=2$.
   a. Determine a posição relativa das retas $r$ e $s$ no espaço. Justifique sua resposta.
   b. Se as retas $r$ e $s$ são concorrentes, determine o ponto de interseção; se são transversas ou paralelas, determine a distância entre elas. Em qualquer caso, mostre a metodologia e cálculos realizados.

**Solução:**

a. Para determinar o ponto de passo, $P_0$, e o vetor direcional, $\mathbf{u}$, da reta $r$ dispomos de, ao menos, duas maneiras:

- Achar dois pontos, $P_0$ e $P_1$, da reta $r$, cujas coordenadas satisfaçam, um por vez, simultaneamente as equações $x-y=4$ e $y-z=2$. Por exemplo, $P_0=(4,0,-2)$ e $P_1=(5,1,-1)$. Então, o ponto de passo é $P_0=(4,0,-2)$ e o vetor direcional é $\mathbf{u}=P_1-P_0=(5,1,-1)-(4,0,-2)=(1,1,1)$.
- Achar o ponto de passo, $P_0$, da reta $r$, escolhendo coordenadas que satisfaçam, simultaneamente, as equações $x-y=4$ e $y-z=2$. Por exemplo, $P_0=(4,0,-2)$. O vetor direcional pode ser considerado, agora, como o produto vetorial dos dois vetores normais dos planos, $\mathbf{n}_1=(1,-1,0)$ e $\mathbf{n}_2=(0,1,-1)$, ou seja, $\mathbf{u}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,-1)$.

Para determinar o ponto de passo, $Q_0$, e o vetor direcional, $\mathbf{v}$, da reta $s$ dispomos de, ao menos, duas maneiras:

- Achar dois pontos, $Q_0$ e $Q_1$, da reta $s$, cujas coordenadas satisfaçam, um por vez, simultaneamente as equações $x+y+z=1$ e $x-y+z=2$. Por exemplo, $Q_0=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ e $Q_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. Então, o ponto de passo é $Q_0=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ e o vetor direcional é $\mathbf{v}=Q_1-Q_0=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)-\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)=(-1,0,1)$.
- Achar o ponto de passo, $Q_0$, da reta $s$, escolhendo coordenadas que satisfaçam, simultaneamente, as equações $x+y+z=1$ e $x-y+z=2$. Por exemplo, $Q_0=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. O vetor direcional

pode ser considerado, agora, como o produto vetorial dos dois vetores normais dos planos, $\mathbf{n}_1 = (1,1,1)$ e $\mathbf{n}_2 = (1,-1,1)$, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,-2).$$

A partir de qualquer um dos dois últimos parágrafos, concluímos que as retas são não paralelas, e podem ser concorrentes ou transversas.

b. Para calcular a distância entre as retas $r$ e $s$, basta calcular a distância $d = \left\| \text{Proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{Q_0P_0} \right\|$ onde $\mathbf{n}$ é um vetor ortogonal aos dois vetores direcionais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Temos que $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$

$\overrightarrow{Q_0P_0} = P_0 - Q_0 = (4,0,-2) - \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$,

$\text{Proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{Q_0P_0} = \dfrac{\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \dfrac{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -2\right) \cdot (1,-2,1)}{6}(1,-2,1) = \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ e

$d = \left\| \text{Proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{Q_0P_0} \right\| = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$. Desta maneira, conclui-se também que as retas são transversas, pois se fossem concorrentes teríamos que $d = 0$.

2. **(2 ptos.)**
   a. Um ponto no espaço tem coordenadas cilíndricas $\left(3, \frac{3\pi}{4}, -5\right)$. Determine as coordenadas esféricas daquele ponto, mostrando o procedimento realizado.
   b. Um ponto no espaço tem coordenadas retangulares $(-1,0,-1)$. Determine as coordenadas esféricas daquele ponto, mostrando o procedimento realizado.

**Solução:**

a. As coordenadas cilíndricas do ponto são $r = 3$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $z = -5$. Então as coordenadas esféricas satisfazem $\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{34}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $\tan(\phi) = \frac{r}{z} = -\frac{3}{5}$, ou seja, $\phi = 2{,}601173$ radianos. As coordenadas esféricas são $\left(\sqrt{34}, \frac{3\pi}{4}, 2{,}601173\right)$.

b. As coordenadas retangulares do ponto são $x = -1$, $y = 0$ e $z = -1$. Então as coordenadas esféricas satisfazem $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$,

$\tan(\theta)=\frac{y}{x}=0$ e $\cos(\phi)=\frac{z}{\rho}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, do qual, temos que, $\theta=\pi$, pois $x$ é negativo, e $\phi=\frac{3\pi}{4}$, pois $z$ é negativo. As coordenadas esféricas são $\left(\sqrt{2},\pi,\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Considere a curva com parametrização dada por $\mathbf{r}(t)=\left(\cos(t),\sqrt{3}\,t,\mathrm{sen}(t)\right)$.
   a. **(1 pto.)** Encontre a parametrização utilizando o parâmetro de comprimento de arco.
   b. **(1,5 ptos.)** Encontre os vetores tangente, normal e binormal unitários para cada ponto da curva.
   c. **(1,5 ptos.)** Se a curva representa a trajetória de uma partícula em cada instante de tempo, determine o valor da aceleração tangencial e normal em cada ponto da curva.
   d. **(1 pto.)** Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t)$.

**Solução:**

a. O parâmetro de comprimento de arco, $s$, está relacionado com o parâmetro $t$ mediante $s=\int_0^t\|\mathbf{r}'(\tau)\|\,d\tau$. Como $\mathbf{r}'(t)=\left(-\mathrm{sen}(t),\sqrt{3},\cos(t)\right)$, temos que $\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{\mathrm{sen}(t)^2+3+\cos(t)^2}=\sqrt{4}=2$ e $s=\int_0^t\|\mathbf{r}'(\tau)\|\,d\tau=\int_0^t 2\,d\tau=2t$, ou seja, $t=\frac{s}{2}$.

Logo, a parametrização utilizando o comprimento de arco resulta $\mathbf{r}(t)=\left(\cos(\frac{s}{2}),\sqrt{3}\,\frac{s}{2},\mathrm{sen}(\frac{s}{2})\right)$.

b. O vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{\left(-\mathrm{sen}(t),\sqrt{3},\cos(t)\right)}{2}$ e assim $\mathbf{T}(t)=\left(-\frac{\mathrm{sen}(t)}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\cos(t)}{2}\right)$.

O vetor normal unitário é

$$\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}=\frac{\frac{1}{2}\left(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t)\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{\cos(t)^2+0+\cos(t)^2}}=\left(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t)\right).$$

Enfim,

$$\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\frac{\mathrm{sen}(t)}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\cos(t)}{2}\\ -\cos(t) & 0 & -\mathrm{sen}(t)\end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}(t),-\frac{\mathrm{sen}^2(t)}{2}-\frac{\cos^2(t)}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)\right)$$

ou seja, $\mathbf{B}(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}(t),-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t)\right)$.

c. A aceleração é $\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t))$. Logo, a componente tangencial da aceleração vale

$a_T=\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{T}(t)=(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t))\cdot\left(-\frac{\mathrm{sen}(t)}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\cos(t)}{2}\right)$, ou seja, $a_T=0$. A componente normal da aceleração é

$a_N=\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{N}(t)=(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t))\cdot(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t))=1$.

d. A curvatura está dada por

$$\kappa(t)=\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{\left\|\frac{1}{2}(-\cos(t),0,-\mathrm{sen}(t))\right\|}{\left\|(-\mathrm{sen}(t),\sqrt{3},\cos(t))\right\|}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}.$$