UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

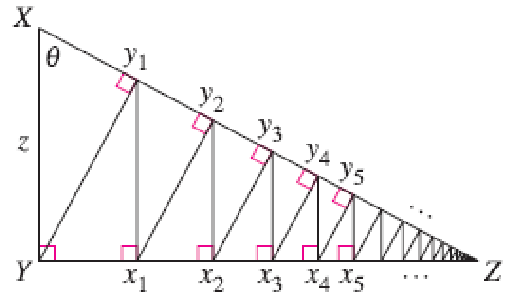
Disciplina: *Cálculo com Geometria Analítica II*

Semestre: 2012-2 **Turma: M2** **Prof.:** *Germán Suazo*

Gabarito da Primeira Prova Escrita

Nome: ....

1. (**2 ptos.**) No triângulo retângulo XYZ mostrado na figura ao lado, $z = 3\, u.c.$ e $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Encontre o comprimento total dos segmentos verticais: $|YX| + |x_1y_1| + |x_2y_2| + |x_3y_3| + \cdots$



Solução:

Temos que $|Yy_1| = z \cdot \text{sen}(\theta)$.

Agora, considerando o triângulo Yy_1x_1, temos que o ângulo x_1Yy_1 é θ, e então $|x_1y_1| = |Yy_1| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^2(\theta)$.

Considerando o triângulo $x_1y_1y_2$, temos que o ângulo $x_1y_1y_2$ é θ, e então $|x_1y_2| = |x_1y_1| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^3(\theta)$.

Considerando o triângulo $x_1x_2y_2$, temos que o ângulo $x_2x_1y_2$ é θ, e então $|x_2y_2| = |x_1y_2| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^4(\theta)$. E assim pela frente.

Logo, temos uma série geométrica com termo inicial z e razão $\text{sen}^2(\theta)$:

$$|YX| + |x_1y_1| + |x_2y_2| + |x_3y_3| + \cdots = z + z \cdot \text{sen}^2(\theta) + z \cdot \text{sen}^4(\theta) + \cdots$$
$$= \frac{z}{1 - \text{sen}^2(\theta)} = \frac{3}{1 - \text{sen}^2(\pi/3)}$$
$$= \frac{3}{1 - 3/4} = 12 \text{ u.c.}$$

2. **(2 ptos.)** Determine a convergência ou divergência das séries a seguir, justificando sua resposta:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos(n)}{n^3 + 1}$; b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$.

Solução:

a. Vamos aplicar o critério de comparação ao limite com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (que converge, pois é a série p com $p = 2$). Temos que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n + \cos(n)}{n^3 + 1} \cdot \frac{n^2}{1} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + n^2 \cos(n)}{n^3 + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \dfrac{\cos(n)}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}}$$
$$= 1 > 0$$

pois $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}=0$, desde que $-\frac{1}{n}\leq\frac{\cos(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$.

Assim, pelo critério de comparação ao limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos(n)}{n^3+1}$ **converge.**

b. Vamos aplicar o critério da integral. Temos que

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2(x)}dx=-\frac{1}{\ln(x)}\Bigg|_{x=2}^{x=+\infty}=0-\left(-\frac{1}{\ln(2)}\right),$$

sendo que esta última expressão é um número finito. Portanto, a integral $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2(x)}dx$ converge. Desta maneira, também, a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}$ converge.

3. **(2 ptos.)**
   a. Encontre a série de MacLaurin ($x_0=0$) da função $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.
   b. Sem derivar, calcule o valor de $f^{(20)}(0)$.

Solução:

a. Temos que $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, para $|x|<1$, e derivando termo a termo resulta $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+n\,x^{n-1}+\cdots$, para $|x|<1$, e multiplicando por x temos

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\cdots+n\,x^n+\cdots, \text{ para } |x|<1.$$

b. Como a série de MacLaurin para $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ tem a forma:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

temos, por comparação, que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=n$, para $n\geq1$. Desta maneira, $\frac{f^{(20)}(0)}{20!}=20$, ou seja, $f^{(20)}(0)=20\cdot(20!)$.

4. (**2 ptos.**) Identifique a seção cônica representada pela equação $x^2-4y^2+2x+8y-4=0$, e determine o(s) vértice(s), foco(s) e centro, se houver.

Solução:

Fazemos a completação de quadrados no lado direito da equação:

$$\begin{aligned} x^2-4y^2+2x+8y-4 &= (x^2+2x)-(4y^2-8y)-4 \\ &= (x^2+2x+1)-4(y^2-2y+1)-4-1+4 \\ &= (x+1)^2-4(y-1)^2-1 \end{aligned}$$

e então $x^2-4y^2+2x+8y-4=0$ é equivalente a

$$(x+1)^2-4(y-1)^2-1=0,$$

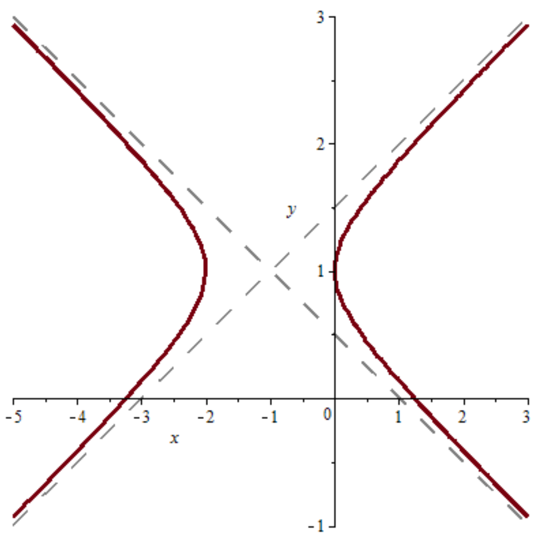
ou

$$(x+1)^2-4(y-1)^2=1,$$

e colocando a equação na forma padrão temos

$$\frac{(x+1)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{1/4}=1,$$

que representa uma hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo x, com centro no ponto $C=(-1,1)$, e com valores dos parâmetros $a=1$, $b=1/2$ e $c=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Desta maneira os vértices são $V_{1,2}=(-1\pm 1,1)$ e os focos $F_{1,2}=(-1\pm\sqrt{5}/2,1)$ (veja a figura).



5. **(2 ptos.)** Determine a equação cartesiana da elipse com excentricidade $e=\frac{1}{10}$, centro em $(0,-1)$. O eixo menor é vertical e tem comprimento $2\sqrt{99}$ u.c. Forneça, também, as coordenadas dos vértices e focos.

Solução:

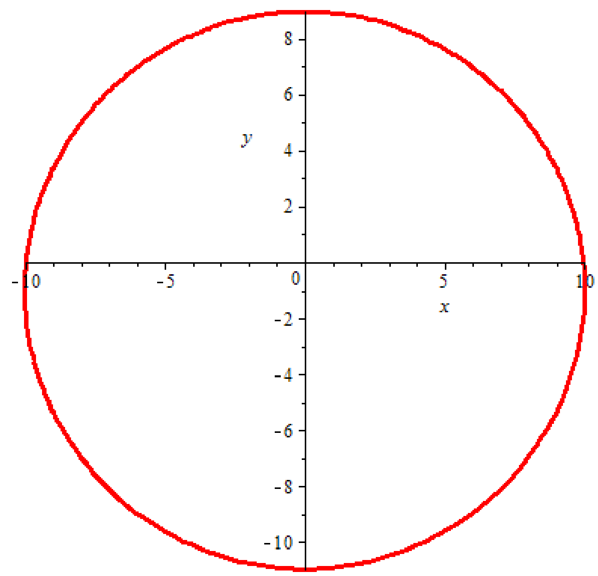
Como o eixo menor é vertical, então o eixo focal é horizontal, ou seja, paralelo ao eixo x. Então a equação da elipse terá a forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Já temos as coordenadas do centro e então só faltam os valores de a e b. Como $e=\frac{1}{10}$, então $\frac{c}{a}=\frac{1}{10}$, ou seja, $a=10c$. Por outro lado, $2b=2\sqrt{99}$, e portanto, $b=\sqrt{99}$. Também temos a relação $a^2=b^2+c^2$, ou seja, $100c^2=99+c^2$, de onde, $c=1$. Assim, $a=10$. Colocando esta informação na equação resulta

$$\frac{x^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{99}=1.$$

As coordenadas dos vértices são $V_{1,2}=(\pm 10,-1)$.

As coordenadas dos focos são $F_{1,2}=(\pm 1,-1)$.

Veja a figura:



Pelotas, 17 de dezembro de 2012