

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Disciplina: *Cálculo com Geometria Analítica II*

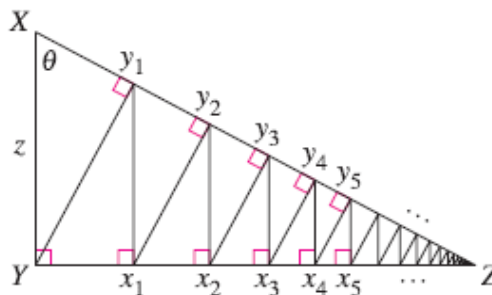
Semestre: 2012-2 Turma: M1

Prof.: *Germán Suazo*

Gabarito da Primeira Prova Escrita

Nome:

1. (2 pts.) No triângulo retângulo XYZ mostrado na figura ao lado, $z = 3$ u.c. e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Encontre o comprimento total dos segmentos oblíquos:
 $|Yy_1| + |x_1y_2| + |x_2y_3| + |x_3y_4| + \dots$



Solução:

Temos que $|Yy_1| = z \cdot \text{sen}(\theta)$.

Agora, considerando o triângulo Yy_1x_1 , temos que o ângulo x_1Yy_1 é θ , e então $|x_1y_1| = |Yy_1| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^2(\theta)$.

Considerando o triângulo $x_1y_1y_2$, temos que o ângulo $x_1y_1y_2$ é θ , e então $|x_1y_2| = |x_1y_1| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^3(\theta)$.

Considerando o triângulo $x_1x_2y_2$, temos que o ângulo $x_2x_1y_2$ é θ , e então $|x_2y_2| = |x_1y_2| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^4(\theta)$.

Considerando o triângulo $x_2y_2y_3$, temos que o ângulo $x_2y_2y_3$ é θ , e então $|x_2y_3| = |x_2y_2| \cdot \text{sen}(\theta) = z \cdot \text{sen}^5(\theta)$. E assim pela frente.

Logo, temos uma série geométrica com termo inicial $z \cdot \text{sen}(\theta)$ e razão $\text{sen}^2(\theta)$:

$$\begin{aligned} |Yy_1| + |x_1y_2| + |x_2y_3| + |x_3y_4| + \dots &= z \cdot \text{sen}(\theta) + z \cdot \text{sen}^3(\theta) + z \cdot \text{sen}^5(\theta) + \dots \\ &= \frac{z \cdot \text{sen}(\theta)}{1 - \text{sen}^2(\theta)} = \frac{3 \cdot \text{sen}(\pi/3)}{1 - \text{sen}^2(\pi/3)} \\ &= \frac{3\sqrt{3}/2}{1 - 3/4} = 6\sqrt{3} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

2. (2 pts.) Determine a convergência ou divergência das séries a seguir, justificando sua resposta:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \text{sen}(n)}{n^4 + 1}$;

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3(n)}$.

Solução:

- a. Vamos aplicar o critério de comparação ao limite com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (que converge, pois é a série p com $p = 2$). Temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + \operatorname{sen}(n) \cdot n^2}{n^4 + 1} \cdot \frac{n^2}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^2 \operatorname{sen}(n)}{n^4 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^4}}$$

$$= 1 > 0$$

pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} = 0$, desde que $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Assim, pelo critério de comparação ao limite, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \operatorname{sen}(n)}{n^4 + 1} \text{ converge.}$$

b. Vamos aplicar o critério da integral. Temos que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3(x)} dx = -\frac{1}{2 \ln^2(x)} \Big|_{x=2}^{x=+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2 \ln^2(2)} \right),$$

sendo que esta última expressão é um número finito. Portanto, a

integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3(x)} dx$ converge. Desta maneira, também, a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3(n)} \text{ converge.}$$

3. (2 pts.)

a. Encontre a série de MacLaurin ($x_0 = 0$) da função $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$.

b. Sem derivar, calcule o valor de $f^{(20)}(0)$.

Solução:

a. Temos que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, para $|x| < 1$, e derivando termo

a termo resulta $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$, para $|x| < 1$, e

multiplicando por x^2 temos

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1} + \dots, \text{ para } |x| < 1.$$

b. Como a série de MacLaurin para $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ tem a forma:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

temos, por comparação, que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n-1$, para $n \geq 1$. Desta maneira,

$$\frac{f^{(20)}(0)}{20!} = 19, \text{ ou seja, } f^{(20)}(0) = 19 \cdot (20!).$$

4. (2 ptos.) Identifique a seção cônica representada pela equação $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 = 0$, e determine o(s) vértice(s), foco(s) e centro, se houver.

Solução:

Fazemos a completção de quadrados no lado direito da equação:

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 &= (x^2 - 2x) - (4y^2 + 8y) - 7 \\ &= (x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) - 7 - 1 + 4 \\ &= (x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

e então $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 = 0$ é equivalente a

$$(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 - 4 = 0,$$

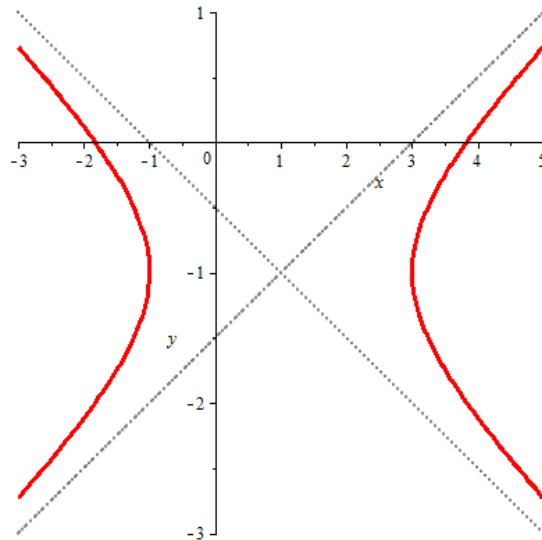
ou

$$(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 4,$$

e colocando a equação na forma padrão temos

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{1} = 1,$$

que representa uma hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo x , com centro no ponto $C = (1, -1)$, e com valores dos parâmetros $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Desta maneira os vértices são $V_{1,2} = (1 \pm 2, -1)$ e os focos $F_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5}, -1)$ (veja a figura).



5. (2 ptos.) Determine a equação cartesiana da elipse com excentricidade $e = \frac{1}{10}$, centro em $(1, 1)$. O eixo menor é horizontal e tem comprimento $2\sqrt{99}$ u.c. Forneça, também, as coordenadas dos vértices e focos.

Solução:

Como o eixo menor é horizontal, então o eixo focal é vertical, ou seja, paralelo ao eixo y . Então a equação da elipse terá a forma

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \text{ Já temos as coordenadas do centro e então só}$$

faltam os valores de a e b . Como $e = \frac{1}{10}$, então $\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$, ou seja, $a = 10c$.

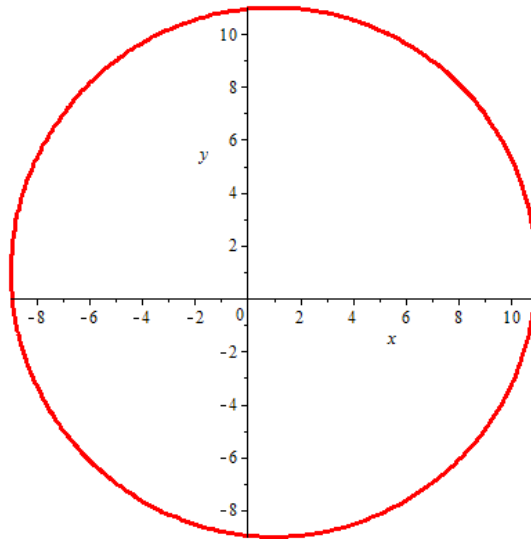
Por outro lado, $2b = 2\sqrt{99}$, e portanto, $b = \sqrt{99}$. Também temos a relação $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $100c^2 = 99 + c^2$, de onde, $c = 1$. Assim, $a = 10$. Colocando esta informação na equação resulta

$$\frac{(y-1)^2}{100} + \frac{(x-1)^2}{99} = 1.$$

As coordenadas dos vértices são $V_{1,2} = (1, 1 \pm 10)$.

As coordenadas dos focos são $F_{1,2} = (1, 1 \pm 1)$.

Veja a figura:



Pelotas, 18 de dezembro de 2012