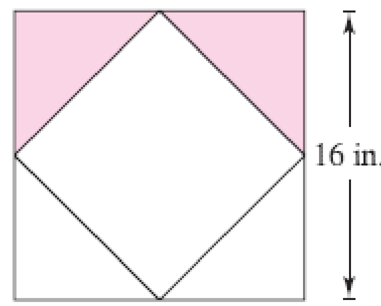
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO

Disciplina: *Cálculo II* **Prof.:** *Germán Suazo*

Primeira Prova Escrita

Nome: ....

1. (**2 ptos.**) Os lados de um quadrado medem 16 polegadas. Um novo quadrado é formado unindo os pontos médios dos lados do quadrado original, e dois dos triângulos externos ao segundo triângulo são sombreados (veja a figura ao lado). Se este procedimento é realizado indefinidamente, calcule a área das regiões sombreadas, justificando sua resposta.



2. **(2 ptos.)** Determine a convergência ou divergência das séries a seguir, justificando sua resposta:
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{e^n}$;   b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$.

3. **(2 ptos.)** Encontre a série de MacLaurin ($x_0 = 0$) da função $f(x) = \frac{x^2}{(2+x)^2}$.

4. (**2 ptos.**) Identifique a seção cônica representada pela equação $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 4 = 0$, e determine o(s) vértice(s), foco(s) e centro, se houver.

5. **(2 ptos.)** Determine a equação cartesiana da parábola com vértice em $(-1,2)$ e foco em $(1,2)$.

Pelotas, 08 de maio de 2012

Soluções:

1. Considerando o quadrado original, cuja área é $16^2 = 256$, a área da parte sombreada é $\frac{1}{4} \cdot 256 = 64$.

   Depois, o quadrado a ser considerado tem área $(8\sqrt{2})^2 = 128$, e a área da parte sombreada é $\frac{1}{4} \cdot 128 = 32$.

   A seguir, o quadrado a ser considerado tem área $8^2 = 64$, e a área da parte sombreada é $\frac{1}{4} \cdot 64 = 16$.

   Logo, o quadrado a ser considerado tem área $(4\sqrt{2})^2 = 32$, e a área da parte sombreada é $\frac{1}{4} \cdot 32 = 8$.

   Este processo continua indefinidamente.
   Então, a área da parte sombreada é

$$64 + 32 + 16 + 8 + \cdots = \frac{64}{1 - \frac{1}{2}} = 128.$$

2.
   a. Queremos determinar a convergência ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{e^n}$. Para isto, analisaremos a convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n}$ por separado.

      - A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n}$ é geométrica com razão $\frac{2}{e} < 1$, e portanto, convergente.
      - A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n}$ é geométrica com razão $\frac{3}{e} > 1$, e portanto, divergente.

      Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n}$ diverge, então a sua soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{e^n}$ também **diverge**.

   b. Para determinar a convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$, utilizamos o teste da integral. Observamos que

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)} dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \left(-\frac{1}{u} \right)\Bigg|_{u=\ln(2)}^{\infty} = \frac{1}{\ln(2)};$$

   concluímos que $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)} dx$ é convergente.

Logo, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$ é convergente.

3. Considerando $f(x) = \frac{x^2}{(2+x)^2}$, temos que

$$\frac{1}{(2+x)^2} = \frac{1}{\left(2 \cdot \frac{2+x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot \left(\frac{2+x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2+x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}$$

Podemos aproveitar o fato que $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$, para $|x| < 1$, e estabelecer que

$$\frac{1}{(2+x)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[1 - 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots\right],$$

para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

Então

$$f(x) = \frac{x^2}{(2-3x)^2} = x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[1 - 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[x^2 - 2x^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4x^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 5x\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[x^2 - \frac{2}{2}x^3 + \frac{3}{2^2}x^4 - \frac{4}{2^3}x^4 + \frac{5}{2^4}x^5 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{2^{n-2}} x^n$$

para $|x| < 2$.

4. A equação $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 4 = 0$ pode ser escrita como

$$0 = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 4 = (x^2 - 2x) + (4y^2 + 8y) - 4$$
$$= (x^2 - 2x) + 4(y^2 + 2y) - 4 = (x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) - 4$$
$$= \left[(x-1)^2 - 1\right] + 4\left[(y+1)^2 - 1\right] - 4$$
$$= (x-1)^2 - 1 + 4(y+1)^2 - 4 - 4$$
$$= (x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 9$$

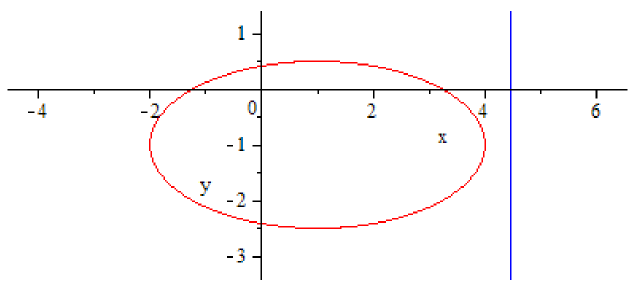
ou seja, $(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 9$, que após dividir por 9 fica

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{9/4} = 1.$$

Esta equação cartesiana corresponde à uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo x, com parâmetros $a=\sqrt{9}=3$, $b=\sqrt{9/4}=3/2$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Desta forma, o centro é $C=(1,-1)$, os vértices são $V_{1,2}=(1\pm 3,-1)$, os focos, $F_{1,2}=(1\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-1)$, e os extremos do eixo menor, $B_{1,2}=(1,-1\pm\dfrac{3}{2})$.

Veja a figura:



5. Como a parábola tem vértice em $(h,k)=(-1,2)$ e foco em $(1,2)$, o eixo focal é paralelo ao eixo x, a tal parábola abre-se para a direita. Nesse caso, a equação cartesiana é $(y-k)^2=4p(x-h)$. O valor de p é igual a 2, por ser a distância do vértice ao foco. A equação cartesiana fica $(y-2)^2=8(x+1)$. Veja a figura: