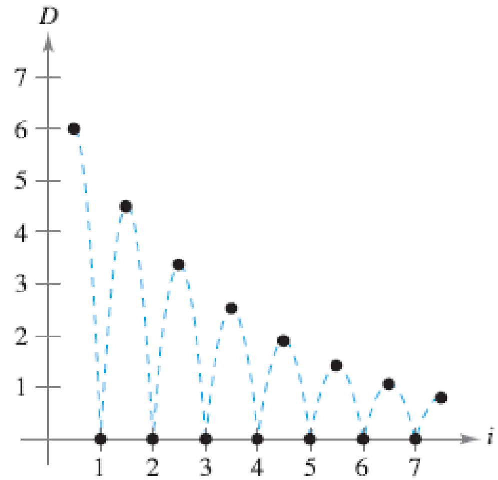
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Cálculo II* **Prof.:** *Germán Suazo*

Gabarito da Primeira Prova Escrita

Nome: ....

1. (**2 ptos.**) Uma bola é lançada de cima para baixo desde uma altura de 6 metros e começa rebotar indefinidamente, como é mostrado na figura ao lado. A altura de cada rebote é $\frac{3}{4}$ da altura do rebote anterior. Calcule a distância vertical total percorrida pela bola.



2. **(2 ptos.)** Determine a convergência ou divergência das séries a seguir, justificando sua resposta:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$;   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln(n)}}{[\arctan(n)]^n}$.

3. **(2 ptos.)** Encontre a série de MacLaurin ($x_0 = 0$) da função $f(x) = \frac{x}{(2-3x)^2}$.

4. (**2 ptos.**) Identifique a seção cônica representada pela equação $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$, e determine o(s) vértice(s), foco(s) e centro, se houver.

5. **(2 ptos.)** Determine a equação cartesiana da hipérbole com vértices em $(0,2)$ e $(6,2)$, e focos em $(-1,2)$ e $(7,2)$.

Pelotas, 26 de abril de 2012

Soluções:

1. A distância vertical total percorrida pela bola está dada pela série:

$$\begin{aligned} D &= 6 + 2\cdot 6\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 6\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 6\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \cdots \\ &= 6 + 2\cdot 6\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= 6 + \left[2\cdot 6\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots\right] \end{aligned}$$

   onde a série que está **entre os colchetes** é uma série geométrica com termo inicial $a = 2\cdot 6\cdot\frac{3}{4} = 9$ e razão $r = \frac{3}{4}$.

   Assim, o valor de D é

$$\begin{aligned} D &= 6 + \left[2\cdot 6\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\cdot 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= 6 + \frac{a}{1-r} = 6 + \frac{9}{1-\frac{3}{4}} = 6 + \frac{9}{1/4} = 6 + 36 = 42 \end{aligned}$$

   Logo, a distância vertical total percorrida pela bola é $D = 42$ m.

2.
   a. Queremos determinar a convergência ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$. Para isto, analisaremos a convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$ por separado.

   - Quanto à última série, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$, vemos que ela é alternada. Calculamos o limite da parte positiva dos termos da série:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} = 0\,.$$

     Assim, pelo teste das séries alternadas, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$ **converge.**

   - Agora, em relação à série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$, vemos que o termo $\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ tende a zero quando $n\to+\infty$. Aplicamos o teste de comparação ao limite, considerando $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$.

     Então,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{n^2}{1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 > 0$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ converge, desde que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, por ser uma série p com $p=2$.

Como as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$ convergem, então a sua soma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$ também converge.

b. Para determinar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln(n)}}{[\arctan(n)]^n}$, utilizamos o teste da raiz, desde que o termo da série inclui potências n-ésimas. Seja $a_n = \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln(n)}}{[\arctan(n)]^n}$.

Então $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln(n)}}{[\arctan(n)]^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{\ln(n)}{2n}}}{\arctan(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2(n)}{2n}}}{\arctan(n)}$,

e como $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2(n)}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln(n)\cdot 1/n}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1/n}{1} = 0$

temos que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2(n)}{2n}}}{\arctan(n)} = \frac{e^0}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1$. Dessa maneira, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln(n)}}{[\arctan(n)]^n}$ converge.

3. Considerando $f(x) = \frac{x}{(2-3x)^2}$, temos que

$$\frac{1}{(2-3x)^2} = \frac{1}{\left(2\cdot\frac{2-3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^2\cdot\left(\frac{2-3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2-3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2}$$

Podemos aproveitar o fato que $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$, para $|x|<1$, e estabelecer que

$$\frac{1}{(2-3x)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\left[1+2\left(\frac{3}{2}x\right)+3\left(\frac{3}{2}x\right)^2+4\left(\frac{3}{2}x\right)^3+5\left(\frac{3}{2}x\right)^4+\cdots\right],$$

para $\left|\frac{3}{2}x\right|<1$.

Então

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{x}{(2-3x)^2}&=x\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[1+2\left(\frac{3}{2}x\right)+3\left(\frac{3}{2}x\right)^2+4\left(\frac{3}{2}x\right)^3+5\left(\frac{3}{2}x\right)^4+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{4}\cdot\left[x+2x\left(\frac{3}{2}x\right)+3x\left(\frac{3}{2}x\right)^2+4x\left(\frac{3}{2}x\right)^3+5x\left(\frac{3}{2}x\right)^4+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{4}\cdot\left[x+2\cdot\frac{3}{2}x^2+3\cdot\frac{3^2}{2^2}x^3+4\cdot\frac{3^3}{2^3}x^4+5\cdot\frac{3^4}{2^4}x^5+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}x^n
\end{aligned}$$

para $|x|<\frac{2}{3}$.

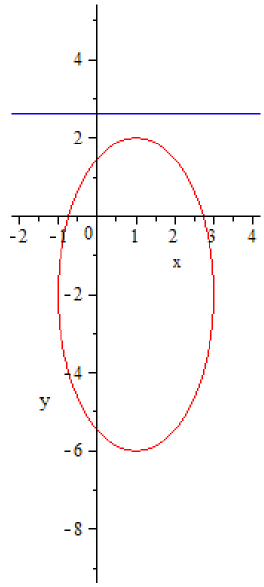
4. A equação $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
0&=4x^2+y^2-8x+4y-8=(4x^2-8x)+(y^2+4y)-8\\
&=4(x^2-2x)+(y^2+4y)=4(x^2-2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)-8\\
&=4\left[(x-1)^2-1\right]+\left[(y+2)^2-4\right]-8\\
&=4(x-1)^2-4+(y+2)^2-4-8\\
&=4(x-1)^2+(y+2)^2-16
\end{aligned}$$

ou seja, $4(x-1)^2+(y+2)^2=16$, que após dividir por 16 fica

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Escrevendo a última igualdade na forma $\frac{(y+2)^2}{16}+\frac{(x-1)^2}{4}=1$, esta equação cartesiana corresponde à uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo y, com parâmetros $a=\sqrt{16}=4$, $b=\sqrt{4}=2$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12}$. Desta forma, o centro é $C=(1,-2)$, os vértices são $V_{1,2}=(1,-2\pm 4)$, os focos, $F_{1,2}=(1,-2\pm\sqrt{12})$, e os extremos do eixo menor, $B_{1,2}=(1\pm 2,-2)$. Veja a figura:



5. Como a hipérbole tem focos em $(-1,2)$ e $(7,2)$, o eixo focal é paralelo ao eixo x. Nesse caso, a equação cartesiana é $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. O centro $C=(h,k)$ é o ponto médio do segmento que une os focos, e assim, $C=\frac{(-1,2)+(7,2)}{2}=\frac{(6,4)}{2}=(3,2)$. O valor de c é a metade da distância entre os focos, ou seja, $c=\frac{8}{2}=4$. O valor de a é a metade da distância entre os vértices, ou seja, $a=\frac{6}{2}=3$. Agora, $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7}$. A equação cartesiana fica $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{7}=1$. Veja a figura: