GABARITO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 06

Disciplina: Cálculo Operacional **Prof. Germán Suazo**

1. Calcule a transformada de Laplace de cada função a seguir:

   a. $f(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ t^2-2t+2, & t\geq 1,\end{cases}$

Solução:

Observe que a função $f(t)$ pode ser escrita em termos da função de Heaviside $u(t)$ (degrau unitário) como $f(t)=\left(t^2-2t+2\right)\cdot u(t-1)$. Esta função pode ser escrita considerando $u(t-a)\cdot g(t-a)$ para poder aplicar a propriedade 17 da tabela.

Então temos que $f(t)=\left(t^2-2t+2\right)\cdot u(t-1)=\left((t-1)^2+1\right)\cdot u(t-1)$ $=(t-1)^2u(t-1)+u(t-1)$.

Tomando transformada de Laplace:

$$L[f(t)]=L\left[(t-1)^2u(t-1)+u(t-1)\right]=L\left[(t-1)^2u(t-1)\right]+L[u(t-1)]$$

$$=e^{-s}\cdot L\left[t^2\right]+\frac{e^{-s}}{s}\quad \text{(propriedades 17 e 2)}$$

$$=e^{-s}\cdot\frac{2!}{s^3}+\frac{e^{-s}}{s}\quad \text{(propriedade 8)}$$

$$=e^{-s}\cdot\left(\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s}\right)$$

   b. $f(t)=t\cdot u(t)-(t-1)\cdot u(t-2)-u(t-3)$;

Solução:

Podemos escrever $f(t)=t\cdot u(t)-(t-2)\cdot u(t-2)-u(t-2)-u(t-3)$

Tomando transformada de Laplace:

$$L[f(t)]=L[t\cdot u(t)-(t-2)\cdot u(t-2)-u(t-2)-u(t-3)]$$

$$=L[t\cdot u(t)]-L[(t-2)\cdot u(t-2)]-L[u(t-2)]-L[u(t-3)]$$

$$=L[t]-e^{-2s}L[t]-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}\quad \text{(propriedades 17 e 2)}$$

$$=\frac{1}{s^2}-e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}\quad \text{(propriedade 8)}$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

   c. $f(t)=\cos(t)\cdot\left(u(t)-u(t-2\pi)\right)-u(t-3\pi)$;

Solução:

$f(t)=\cos(t)\cdot u(t)-\cos(t-2\pi)\cdot u(t-2\pi)-u(t-3\pi)$, desde que $\cos(t-2\pi)=\cos(t)$.

Tomando transformada de Laplace:

$$L[f(t)]=L[\cos(t)\cdot u(t)-\cos(t-2\pi)\cdot u(t-2\pi)-u(t-3\pi)]$$

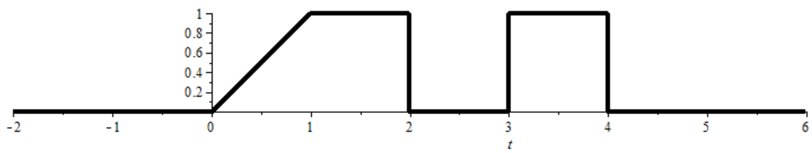
$$=L[\cos(t)\cdot u(t)]-L[\cos(t-2\pi)\cdot u(t-2\pi)]-L[u(t-3\pi)]$$

$$=L[\cos(t)]-e^{-2\pi s}L[\cos(t)]-\frac{e^{-3\pi s}}{s}\quad \text{(propriedades 17 e 2)}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}-e^{-2\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{e^{-3\pi s}}{s}\quad \text{(propriedade 4)}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}\cdot\left(1-e^{-2\pi s}\right)-\frac{e^{-3\pi s}}{s}$$

d.



Solução:

Escrevemos a função observando os intervalos $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ $[2,3]$, $[3,4]$ e $[4,+\infty[$:

Intervalo	Valor da função
$t < 0$	0
$0 < t < 1$	t
$1 < t < 2$	1
$2 < t < 3$	0
$3 < t < 4$	1
$4 < t$	0

Assim, a função pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(t) &= t\cdot[u(t)-u(t-1)]+[u(t-1)-u(t-2)]+[u(t-3)-u(t-4)] \\ &= t\cdot u(t)-t\cdot u(t-1)+u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)-u(t-4) \\ &= t\cdot u(t)-(t-1)\cdot u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)-u(t-4) \end{aligned}$$

Tomando transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L[t\cdot u(t)-(t-1)\cdot u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)-u(t-4)] \\ &= L[t\cdot u(t)]-L[(t-1)\cdot u(t-1)]-L[(u(t-2)]+L[(u(t-3)]-L[(u(t-4)] \\ &= L[t]-e^{-s}L[t]-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-4s}}{s} \text{ (propriedades 17 e 2)} \\ &= \frac{1}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-4s}}{s} \quad \text{(propriedade 8)} \\ &= \frac{1}{s^2}\cdot(1-e^{-s})-\frac{1}{s}\cdot(e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}) \end{aligned}$$

e. $f(t)=t^2e^{-3t}\cos(t)$;

Solução:

Temos que $L[\cos(t)]=\dfrac{s}{s^2+1}$.

Então, pela propriedade 16, $L[t^2\cos(t)]=(-1)^2\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)=\dfrac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$ (os cálculos da segunda derivada não são mostrados).

Agora, pela propriedade 12, $L[t^2e^{-3t}\cos(t)]=\dfrac{2(s+3)((s+3)^2-3)}{((s+3)^2+1)^3}=\dfrac{2(s+3)(s^2+6s+6)}{(s^2+6s+10)^3}$

f. $f(t)=\dfrac{e^{3t}-1}{t}$;

Solução:

Como $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{3t}-1}{t}=3$, então podemos aplicar a propriedade 20 e temos

$$L[f(t)] = L\left[\frac{e^{3t}-1}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L[e^{3t}-1](v)\,dv = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{v-3}-\frac{1}{v}\right)dv = (\ln(v-3)-\ln(v))\Big|_{v=s}^{v=+\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{v-3}{v}\right)\Big|_{v=s}^{v=+\infty} = 0-\ln\left(\frac{s-3}{s}\right)\Bigg| = \ln\left(\frac{s}{s-3}\right)$$

g. $f(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t}$;

Solução:

Como $\lim_{t\to 0}\dfrac{1-\cos(t)}{t} = 1$, então podemos aplicar a propriedade 20, e temos

$$L[f(t)] = L\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L[1-\cos(t)](v)\,dv = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+1}\right)dv$$

$$= \left(\ln(v)-\frac{1}{2}\ln(v^2+1)\right)\Bigg|_{v=s}^{v=+\infty} = \ln\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\right)\Bigg|_{v=s}^{v=+\infty} = 0-\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Bigg| = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right)$$

h. $f(t) = t^2e^{-t}\cos^2(t)$;

Solução:

Temos que $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ e assim,

$$f(t) = t^2e^{-t}\cdot\frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}\cos(2t).$$

Observe que $L[t^2e^{-t}] = \dfrac{2}{(s+1)^3}$, pela propriedade 9.

Também, $L[\cos(2t)] = \dfrac{s}{s^2+4}$.

Então, pela propriedade 16, $L[t^2\cos(2t)] = (-1)^2\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right) = \dfrac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}$ (os cálculos da segunda derivada não são mostrados).

Agora, pela propriedade 12,

$$L[t^2e^{-t}\cos(2t)] = \frac{2(s+1)((s+1)^2-12)}{((s+1)^2+4)^3} = \frac{2(s+1)(s^2+2s-11)}{(s^2+2s+5)^3}.$$

Enfim, $L[t^2e^{-t}\cos^2(t)] = \dfrac{1}{2}L[t^2e^{-t}] + \dfrac{1}{2}L[t^2e^{-t}\cos(2t)] = \dfrac{1}{(s+1)^3} + \dfrac{(s+1)(s^2+2s-11)}{(s^2+2s+5)^3}$.

i. $f(t) = \dfrac{\mathrm{sen(t)}}{\mathrm{t}}$;

Solução:

Como $\lim_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(t)}{t} = 1$, então podemos aplicar a propriedade 20, e temos

$$L[f(t)] = L\left[\frac{\mathrm{sen}(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L[\mathrm{sen}(t)](v)\,dv = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{v^2+1}\right)dv$$

$$= (\arctan(v))\Big|_{v=s}^{v=+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

j. $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - e^{-t}}{\mathrm{t}}$.

Solução:

Como $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^t - e^{-t}}{t} = 2$, então podemos aplicar a propriedade 20 e temos

$$L[f(t)] = L\left[\frac{e^t - e^{-t}}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L[e^t - e^{-t}](\nu)\, d\nu = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu + 1}\right) d\nu$$

$$= \left(\ln(\nu - 1) - \ln(\nu + 1)\right)\Big|_{\nu = s}^{\nu = +\infty} = \ln\left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1}\right)\Bigg|_{\nu = s}^{\nu = +\infty} = 0 - \ln\left(\frac{s - 1}{s + 1}\right) = \ln\left(\frac{s + 1}{s - 1}\right)$$

2. Calcule as transformadas inversas de Laplace das funções a seguir:

a. $\dfrac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)}$;

Solução:
Decompondo em frações parciais

$$\frac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5} = \frac{A(s+2)(s+5) + B(s-1)(s+5) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+5)}$$

Então $s^2 - 26s - 47 = A(s+2)(s+5) + B(s-1)(s+5) + C(s-1)(s+2)$.
Para $s = 1$ temos: $-72 = 18A$, que implica $A = -4$.
Para $s = -2$ temos: $9 = -9B$, que implica $B = -1$.
Para $s = -5$ temos: $108 = 18C$, que implica $C = 6$.

Assim, $\dfrac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)} = -\dfrac{4}{s-1} - \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{6}{s+5}$.

Então, pela propriedade 3, temos que a transformada inversa de $\dfrac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)}$ é a função $f(t) = -4e^t - e^{-2t} + 6e^{-5t}$.

b. $\dfrac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}$;

Solução:
Decompondo em frações parciais

$$\frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs}{s(s+1)^2}$$

Então $-2s^2 - 3s - 2 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs$.
Para $s = 0$ temos: $-2 = A$, que implica $A = -2$.
Para $s = -1$ temos: $-1 = -C$, que implica $C = 1$.
Para $s = 1$ temos: $-7 = 4A + 2B + C$, que implica $B = \dfrac{-7 - 4A - C}{2} = \dfrac{-7 + 8 - 1}{0} = 0$.

Assim, $\dfrac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2} = \dfrac{-2}{s} + \dfrac{1}{(s+1)^2}$

Então, pelas propriedades 3 e 9, temos que a transformada inversa de $\dfrac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}$ é a função $f(t) = -2 + t\,e^{-t}$.

c. $\dfrac{-2s^2 + 8s - 14}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)}$;

Solução:
Decompondo em frações parciais

$$\frac{-2s^2+8s-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5}=\frac{A(s^2-2s+5)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2-2s+5)}$$

Então $-2s^2+8s-14=A(s^2-2s+5)+(Bs+C)(s+1)$.

Para $s=-1$ temos: $-24=8A$, que implica $A=-3$.

Para $s=0$ temos: $-14=5A+C$, que implica $C=-14-5A=-14+15=1$.

Para $s=1$ temos: $-8=4A+2(B+C)$, que implica $B=-4-2A-C=-4+6-1=1$.

Assim, $\frac{-2s^2+8s-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}=\frac{-3}{s+1}+\frac{s+1}{s^2-2s+5}=\frac{-3}{s+1}+\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}+\frac{2}{(s-1)^2+2^2}$

Então, pelas propriedades 3, 10 e 11, temos que a transformada inversa de $\frac{-2s^2+8s-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}$ é a função $f(t)=-3e^{-t}+3e^t\cos(2t)+2e^t\operatorname{sen}(2t)$.

d. $\frac{3s^2+5s+3}{s^4+s^3}$;

Solução:

Decompondo em frações parciais

$$\frac{3s^2+5s+3}{s^4+s^3}=\frac{3s^2+5s+3}{s^3(s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}+\frac{D}{s^3}=\frac{As^3+Bs^2(s+1)+Cs(s+1)+D(s+1)}{s^3(s+1)}$$

Então $3s^2+5s+3=As^3+Bs^2(s+1)+Cs(s+1)+D(s+1)$.

Para $s=0$ temos: $3=D$, que implica $D=3$.

Para $s=-1$ temos: $1=-A$, que implica $A=-1$.

Para $s=1$ temos: $11=A+2B+2C+2D$, que implica $B+C=3$.

Para $s=-2$ temos: $5=-8A-4B+2C-D$, que implica $-2B+C=0$.

Resolvendo estas duas últimas equações temos que $B=1$ e $C=2$.

Assim, $\frac{3s^2+5s+3}{s^4+s^3}=\frac{3s^2+5s+3}{s^3(s+1)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s^3}$.

Então, pelas propriedades 3, 8 e 9, temos que a transformada inversa de $\frac{3s^2+5s+3}{s^4+s^3}$ é a função $f(t)=-e^{-t}+1+2t+\frac{3}{2}t^2$.

e. $\frac{1}{(s-1)^2(s^2-2s+2)}$;

Solução:

Decompondo em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2-2s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$
$$=\frac{A(s-1)(s^2-2s+2)+B(s^2-2s+2)+(Cs+D)(s-1)^2}{(s-1)^2(s^2+2s+2)}$$

Então $1=A(s-1)(s^2-2s+2)+B(s^2-2s+2)+(Cs+D)(s-1)^2$.

Para $s=1$ temos: $1=B$, que implica $B=1$.

Para $s=0$ temos: $1=-2A+2B+D$, que implica $-2A+D=-1$.

Para $s=-1$ temos: $1=-10A+5B+4(-C+D)$, que implica $-10A-4C+4D=-4$.

Para $s=2$ temos: $1=2A+2B+(2C+D)$, que implica $2A+2C+D=-1$.

Assim, temos o sistema $\begin{cases} -2A + D = -1, \\ -10A - 4C + 4D = -4, \\ 2A + 2C + D = -1 \end{cases}$ cuja solução é $A = 0$, $C = 0$ e $D = -1$.

Assim, $\dfrac{1}{(s-1)^2(s^2-2s+2)} = \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{s^2-2s+2} = \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{(s-1)^2+1^2}$.

Então, pelas propriedades 8 e 11, temos que a transformada inversa de $\dfrac{1}{(s-1)^2(s^2-2s+2)}$ é a função $f(t) = t\,e^t - e^t \mathrm{sen}(t)$.

f. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$;

Solução:

Observe que $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = -\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$, que dá $L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)\right] = L^{-1}\left[\dfrac{-2s}{(s^2+1)^2}\right]$, ou seja, $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right] = -\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)\right]$ Mas, pela propriedade 16, $L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)\right] = (-1)\,t\,L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = -t\,\mathrm{sen}(t)$.

Logo, $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right] = -\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)\right] = -\dfrac{1}{2}\cdot\big(-t\,\mathrm{sen}(t)\big) = \dfrac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)$.

Método alternativo:

A transformada inversa anterior também pode ser calculada mediante a propriedade de convolução (propriedade 19):

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right] = \int_0^t \cos(t-\tau)\,\mathrm{sen}(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(2\tau - t)\,d\tau\,,$$

$$(\text{propriedade}\ \mathrm{sen}(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(A+B) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(A-B))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(t)\,\tau - \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}\left(t\,\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) - 0 + \frac{1}{2}\cos(-t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t),\ \text{pois}\ \cos(t) = \cos(-t).$$

g. $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$;

Solução:

Pela propriedade 15 e considerando o resultado da parte f, temos que:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \int_0^t L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]_{(\tau)} d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{sen}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\big(\mathrm{sen}(\tau) - \tau\cos(\tau)\big)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{sen}(t) - t\cos(t)\big)$$

Método alternativo:

A transformada inversa anterior também pode ser calculada mediante a propriedade de convolução (propriedade 19):

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]=\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\ \operatorname{sen}(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(-\cos(t)+\cos(2\tau-t)\right)d\tau\ ,$$

$$(\text{propriedade}\ \operatorname{sen}(A)\cdot\operatorname{sen}(B)=-\frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B))$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos(t)\,\tau+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\tau-t)\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{2}\left(-t\cos(t)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)-0-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(-t)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-t\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\right),\ \text{pois}\ \ \operatorname{sen}(t)=-\operatorname{sen}(-t).$$

Observação:
Para o exemplo dado em aula, temos que

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right]=-\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)\right]=-\frac{1}{4}\cdot\left(-t\operatorname{sen}(2t)\right)=\frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t)\,.$$

Assim,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\int_0^t L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]_{(\tau)}d\tau$$

$$=\int_0^t\frac{1}{2}\tau\operatorname{sen}(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\tau)-\tau\cos(\tau)\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(t)-t\cos(t)\right)$$

h. $\ln\left(\dfrac{s-2}{s+2}\right)$;

Solução:
Muito importante: a propriedade 15 também pode ser expressa de uma forma diferente mas muito prática:

$$L^{-1}[F(s)]=\frac{(-1)^n}{t^n}L^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right].$$

Em particular, para $n=1$ **temos que** $L^{-1}[F(s)]=-\dfrac{1}{t}L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}F(s)\right]$.

Aplicamos a última igualdade e temos:

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s-2}{s+2}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s-2}{s+2}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\ln(s-2)-\ln(s+2)\right)\right].$$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}\right]=-\frac{1}{t}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)$$

i. $\ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right)$;

Solução:

Aplicamos $L^{-1}[F(s)]=-\dfrac{1}{t}L^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}F(s)\right]$ e temos:

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\ln\left(s^2+1\right)-\ln(s^2+4)\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2s}{s^2+4}\right]=-\frac{1}{t}\left(2\cos(t)-2\cos(2t)\right)$$

j. $\arctan\left(\frac{3}{s+2}\right)$.

Solução:

Aplicamos $L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}F(s)\right]$ e temos:

$$L^{-1}\left[\arctan\left(\frac{3}{s+2}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{3}{s+2}\right)\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{\left(\frac{3}{s+2}\right)^2+1}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{(s+2)^2}{(s+2)^2+3^2}\cdot\left(-\frac{3}{(s+2)^2}\right)\right]=\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=\frac{1}{t}\left(e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)\right)$$

Na última igualdade, foi utilizada a propriedade 11.

3. Mediante a transformada de Laplace, resolva os seguintes PVI:

a. $x''+x=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi/2,\\ 0, & \pi/2<\text{t},\end{cases}\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1$;

Solução:

Observe que a função $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi/2,\\ 0, & \pi/2<\text{t},\end{cases}$ pode ser expressa como $f(t)=u(t)-u(t-\pi/2)$. Agora, aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']+L[x]=L[f(t)],$$

$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+L[x]=L[u(t)-u(t-\pi/2)],$$

$$s^2L[x]-1+L[x]=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s\pi/2}}{s},$$

$$(s^2+1)L[x]=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s\pi/2}}{s}+1,$$

$$L[x]=\frac{1}{s(s^2+1)}-\frac{e^{-s\pi/2}}{s(s^2+1)}+\frac{1}{(s^2+1)},\qquad\text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}.$$

Considerando que $1=A(s^2+1)+(Bs+C)s$:

para $s=0$, $1=A+0$ que implica $A=1$,

para $s=1$, $1=2A+(B+C)$, que implica $B+C=-1$,

para $s=-1$, $1=2A-(-B+C)$, que implica $B-C=-1$,

e resolvendo estas duas últimas equações, temos que $B=-1$ e $C=0$.

Logo, $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos $L[x] = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{e^{-s\pi/2}}{s} + \dfrac{e^{-s\pi/2}s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2+1}$.

Utilizando as propriedades 3, 4, 5 e 17 temos que

$$x = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{e^{-s\pi/2}}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{e^{-s\pi/2}s}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= 1 - \cos(t) - u(t-\pi/2) + u(t-\pi/2)\cdot\cos(t-\pi/2) + \operatorname{sen}(t)$$

Assim, a solução do PVI é

$$x = 1 - \cos(t) - u(t-\pi/2) + u(t-\pi/2)\cdot\cos(t-\pi/2) + \operatorname{sen}(t).$$

b. $x'' + 4x = \operatorname{sen}(t) - u(t-2\pi)\cdot\operatorname{sen}(t-2\pi) \quad x(0)=0,\ \ x'(0)=0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais nulas:

$$L[x''] + 4L[x] = L[\operatorname{sen}(t) - u(t-2\pi)\cdot\operatorname{sen}(t-2\pi)],$$

$$s^2L[x] - sx(0) - x'(0) + 4L[x] = L[\operatorname{sen}(t)] - L[u(t-2\pi)\cdot\operatorname{sen}(t-2\pi)],$$

$$s^2L[x] + 4L[x] = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

$$(s^2+4)L[x] = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1},$$

$$L[x] = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+4)(s^2+1)}, \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}.$$

Considerando que $1 = (As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)$:

para $s=0$, $1 = B+4D$ que implica $B+4D=1$,

para $s=1$, $1 = 2(A+B)+5(C+D)$, que implica $2A+2B+5C+5D=1$,

para $s=-1$, $1 = 2(-A+B)+5(-C+D)$, que implica $-2A+2B-5C+5D=1$,

para $s=2$, $1 = 5(2A+B)+8(2C+D)$, que implica $10A+5B+16C+8D=1$,

e resolvendo o sistema de equações, temos que $A=0$, $B=-\dfrac{1}{3}$, $C=0$ e $D=\dfrac{1}{3}$.

Logo, $\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+4} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos $L[x] = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+4} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\left(-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+4} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+1}\right)$.

Utilizando as propriedades 5 e 17 temos que

$$x = -\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \frac{1}{6}L^{-1}\left[e^{-2\pi s}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right] - \frac{1}{3}L^{-1}\left[e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2(t-2\pi))u(t-2\pi) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$$

Assim, a solução do PVI é

$$x = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2t)u(t-2\pi) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t)u(t-2\pi).$$

c. $x'' + 3x' + 2x = u(t-2) \quad x(0)=0,\ \ x'(0)=1$;

Solução:
Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']+3L[x']+2L[x]=L[u(t-2)],$$
$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+3sL[x]-3x(0)+2L[x]=L[u(t-2)],$$
$$s^2L[x]-1+3sL[x]+2L[x]=\frac{e^{-2s}}{s},$$
$$(s^2+3s+2)L[x]=\frac{e^{-2s}}{s}+1,$$
$$L[x]=\frac{e^{-2s}}{s(s^2+3s+2)}+\frac{1}{(s^2+3s+2)},$$
$$L[x]=\frac{e^{-2s}}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)},$$

e considerando que $1=A(s+2)+B(s+1)$:
para $s=-1$, $1=A$ que implica $A=1$,
para $s=-2$, $1=-B$, que implica $B=-1$.
Agora, decompomos $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$,

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s+1}+\frac{\gamma}{s+2}=\frac{\alpha(s+1)(s+2)+\beta s(s+2)+\gamma s(s+1)}{s(s+1)(s+2)},$$

e considerando que $1=\alpha(s+1)(s+2)+\beta s(s+2)+\gamma s(s+1)$
para $s=0$, $1=2\alpha$, que implica $\alpha=\frac{1}{2}$,
para $s=-1$, $1=-\beta$, que implica $\beta=-1$,
para $s=-2$, $1=2\gamma$, que implica $\gamma=\frac{1}{2}$.
Logo, $\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$ e $\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$.
Assim, na igualdade (A), temos

$$L[x]=\frac{e^{-2s}}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2s}}{s+2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}.$$

Utilizando as propriedades 2, 3 e 17 temos que

$$x=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}u(t-2)-u(t-2)\cdot e^{-t+2}+\frac{1}{2}u(t-2)\cdot e^{-2t+4}+e^{-t}-e^{-2t}$$

Assim, a solução do PVI é

$$x=\frac{1}{2}u(t-2)-u(t-2)\cdot e^{-t+2}+\frac{1}{2}u(t-2)\cdot e^{-2t+4}+e^{-t}-e^{-2t}.$$

d. $x''+4x=u(t-\pi)-u(t-3\pi) \quad x(0)=0,\ x'(0)=0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais nulas:

$$L[x'']+4L[x]=L[u(t-\pi)-u(t-3\pi)],$$

$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+4L[x]=L[u(t-\pi)]-L[u(t-3\pi)],$$

$$s^2L[x]+4L[x]=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-3\pi s}}{s},$$

$$(s^2+4)L[x]=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-3\pi s}}{s},$$

$$L[x]=\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}-\frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+4)}, \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)s}{s(s^2+4)}.$$

Considerando que $1=A(s^2+4)+(Bs+C)s$:

para $s=0$, $1=4A$ que implica $A=\frac{1}{4}$,

para $s=1$, $1=5A+B+C$, que implica $5A+B+C=1$,
para $s=-1$, $1=5A-(-B+C)$, que implica $5A+B-C=1$

e resolvendo o sistema de equações, temos que $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$ e $C=0$.

Logo, $\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}$.

Assim, na igualdade (A), temos

$$L[x]=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{1}{4}e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-3\pi s}}{s}+\frac{1}{4}e^{-3\pi s}\frac{s}{s^2+4}.$$

Utilizando as propriedades 2 e 17 temos que

$$x=\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s}\right]-\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4}\right]-\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi s}}{s}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-3\pi s}\frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{1}{4}u(t-\pi)-\frac{1}{4}\mathrm{u(t-}\pi)\cdot\cos(2(t-\pi))-\frac{1}{4}u(t-3\pi)+\frac{1}{4}\cos(2(t-3\pi))u(t-3\pi)$$

Assim, a solução do PVI é

$$x=\frac{1}{4}u(t-\pi)-\frac{1}{4}u(t-\pi)\cdot\cos(2t)-\frac{1}{4}u(t-3\pi)+\frac{1}{4}u(t-3\pi)\cdot\cos(2t).$$

e. $x^{(iv)}-x=u(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais nulas:

$$L\left[x^{(iv)}\right]-L[x]=L[u(t)],$$

$$s^4L[x]-L[x]=\frac{1}{s},$$

$$(s^4-1)L[x]=\frac{1}{s},$$

$$L[x]=\frac{1}{s(s^4-1)},$$

$$L[x]=\frac{1}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)} \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+1}+\frac{Ds+E}{s^2+1}$$

$$=\frac{A(s-1)(s+1)(s^2+1)+Bs(s+1)(s^2+1)+Cs(s-1)(s^2+1)+(Ds+E)s(s-1)(s+1)}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Considerando que

$$1=A(s-1)(s+1)(s^2+1)+Bs(s+1)(s^2+1)+Cs(s-1)(s^2+1)+(Ds+E)s(s-1)(s+1)$$

para $s=0$, $1=-A$ que implica $A=-1$,

para $s=1$, $1=4B$, que implica $B=\frac{1}{4}$,

para $s=-1$, $1=4C$, que implica $C=\frac{1}{4}$,

para $s=2$, $1=15A+30B+10C+6(2D+E)$, que implica

$$12D+6E=1-15A-30B-10C,$$

para $s=-2$, $1=15A+10B+30C-6(-2D+E)$, que implica

$$12D-6E=1-15A-10B-30C,$$

e resolvendo o sistema de equações, temos que $A=-1$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{2}$ e $E=0$.

Logo, $\frac{1}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos $L[x]=-\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$.

Utilizando as propriedades 3 temos que

$$x=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)$$

Assim, a solução do PVI é $x=-1+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)$.

f. $x^{(iv)}-x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=0$, onde $f(t)$ é uma função contínua.

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais nulas:

$$L[x^{(iv)}]-L[x]=L[f(t)],$$

$$s^4L[x]-L[x]=L[f(t)],$$

$$(s^4-1)L[x]=F(s),$$

$$L[x]=\frac{F(s)}{s^4-1},$$

$$L[x]=\frac{F(s)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Considerando que

$$1 = A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)$$

para $s=-1$, $1=-4B$ que implica $B=-\frac{1}{4}$,

para $s=1$, $1=4A$, que implica $A=\frac{1}{4}$,

para $s=0$, $1=A-B-D$, que implica $D=A-B-1=-\frac{1}{2}$,

para $s=-2$, $1=-5A-15B-3(-2C+D)$, que implica $6C=1+5A+15B+3D$,

e resolvendo o sistema de equações, temos que $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$ e $D=-\frac{1}{2}$.

Logo, $\frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos

$$L[x] = \frac{F(s)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{4}F(s)\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}F(s)\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}F(s)\frac{1}{s^2+1}.$$

Utilizando a propriedade 19 temos que

$$x = \frac{1}{4}L^{-1}\left[F(s)\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{4}L^{-1}\left[F(s)\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[F(s)\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^t f(t-\tau)\cdot e^{\tau}d\tau - \frac{1}{4}\int_0^t f(t-\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)\cdot \mathrm{sen}(\tau)\,d\tau$$

Assim, a solução do PVI é

$$x = \frac{1}{4}\int_0^t f(t-\tau)\cdot e^{\tau}d\tau - \frac{1}{4}\int_0^t f(t-\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)\cdot \mathrm{sen}(\tau)\,d\tau.$$

4. Um certo sistema massa-mola-amortecedor satisfaz o problema de valor inicial $x''+\frac{1}{4}x'+x = k\cdot g(t)$, $x(0)=x'(0)=0$, onde $g(t)=u(t-3/2)-u(t-5/2)$ e $k>0$ é um parâmetro.
   a. Resolva o PVI.

Solução:

Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial e considerando as condições iniciais nulas temos

$$s^2L[x] + \tfrac{1}{4}sL[x] + L[x] = k\cdot L[u(t-3/2)-u(t-5/2)],$$
$$\left(s^2+\tfrac{1}{4}s+1\right)L[x] = k\cdot L[u(t-3/2)-u(t-5/2)],$$
$$(s^2+\tfrac{1}{4}s+1)L[x] = k\cdot\left(\frac{e^{-3s/2}}{s} - \frac{e^{-5s/2}}{s}\right),$$
$$L[x] = k\cdot\left(\frac{e^{-3s/2}}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)} - \frac{e^{-5s/2}}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}\right)$$

Considerando que $s^2+\frac{1}{4}s+1=\left(s+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{63}{64}$, decompomos em frações parciais a expressão $\frac{1}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+\frac{1}{4}s+1}$.

Temos que $\frac{1}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+\frac{1}{4}s+1}=\frac{A(s^2+\frac{1}{4}s+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}$, do qual:

$$1=A(s^2+\tfrac{1}{4}s+1)+(Bs+C)s;$$

para $s=0$, $1=A$, que implica $A=1$,
para $s=1$, $1=\frac{9}{4}A+B+C$, que implica $B+C=-\frac{5}{4}$,
para $s=-1$, $1=\frac{7}{4}A-(-B+C)$, que implica $B-C=-\frac{3}{4}$,
e resolvendo as equações temos $B=-1$ e $C=-\frac{1}{4}$.

Assim,

$$\frac{1}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{4}}{s^2+\frac{1}{4}s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{8})^2+\frac{63}{64}}=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{8}}{(s+\frac{1}{8})^2+\frac{63}{64}}-\frac{1}{\sqrt{63}}\frac{\frac{\sqrt{63}}{8}}{(s+\frac{1}{8})^2+\frac{63}{64}}$$

Logo, a transformada inversa de $\frac{e^{-3s/2}}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}$ é

$$h_1(t)=u(t-3/2)\cdot\left(1-e^{-(t-3/2)/8}\cos\left(\frac{\sqrt{63}}{8}(t-3/2)\right)-\frac{1}{\sqrt{63}}e^{-(t-3/2)/8}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{63}}{8}(t-3/2)\right)\right).$$

Também, a transformada inversa de $\frac{e^{-5s/2}}{s(s^2+\frac{1}{4}s+1)}$ é

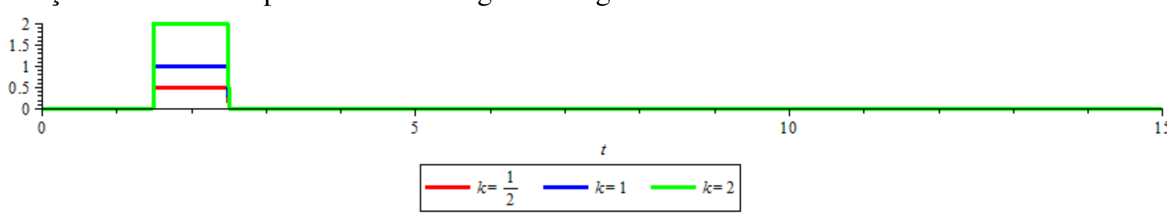
$$h_2(t)=u(t-5/2)\cdot\left(1-e^{-(t-5/2)/8}\cos\left(\frac{\sqrt{63}}{8}(t-5/2)\right)-\frac{1}{\sqrt{63}}e^{-(t-5/2)/8}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{63}}{8}(t-5/2)\right)\right).$$

Enfim, a solução do PVI é $x(t)=k(h_1(t)-h_2(t))$

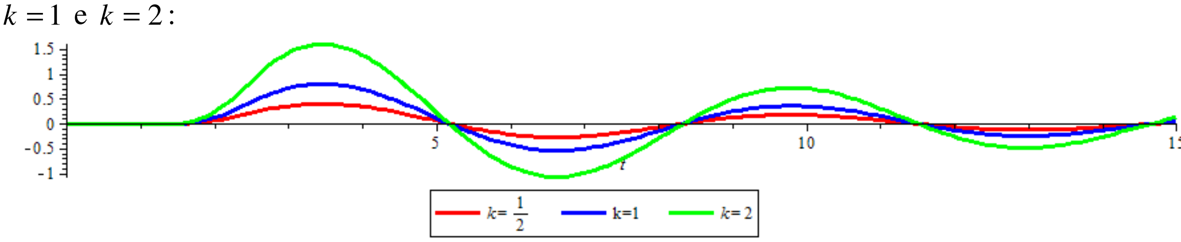
b. Grafique a solução para $k=1/2$, $k=1$ e $k=2$ e descreva as características principais da solução e como depende de k.

Solução:

A forças externas são apresentadas nas figuras a seguir:



A seguir, apresentamos os gráficos das soluções correspondentes aos valores $k=1/2$, $k=1$ e $k=2$:



A massa possui um movimento oscilatório amortecido, cuja amplitude cresce quanto maior o valor de k. O movimento se anulará no infinito e só aparece no instante $t = 3/2$. Também ressaltamos que o movimento continua, a pesar de não existir mais força externa após $t = 5/2$.

5. Resolva os seguintes PVI:
   a. $x''+2x'+2x = \delta(t-\pi)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais nulas:

$$L[x''] + 2L[x'] + 2L[x] = L[\delta(t-\pi)],$$
$$s^2 L[x] - sx(0) - x'(0) + 2sL[x] - 2x(0) + 2L[x] = L[\delta(t-\pi)],$$
$$s^2 L[x] + 2sL[x] + 2L[x] - s - 2 = e^{-\pi s},$$
$$(s^2 + 2s + 2)L[x] = e^{-\pi s} + s + 2,$$
$$L[x] = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+2},$$
$$L[x] = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2} + \frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+2s+2}$$
$$L[x] = e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{1}{(s+1)^2+1^2} \qquad \text{(A)}$$

Decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Considerando que

$$1 = A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)$$

para $s=-1$, $1=-4B$ que implica $B = -\frac{1}{4}$,

para $s=1$, $1=4A$, que implica $A = \frac{1}{4}$,

para $s=0$, $1 = A - B - D$, que implica $D = A - B - 1 = -\frac{1}{2}$,

para $s=-2$, $1 = -5A - 15B - 3(-2C + D)$, que implica $6C = 1 + 5A + 15B + 3D$,

e resolvendo o sistema de equações, temos que $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$ e $D = -\frac{1}{2}$.

Logo, $\dfrac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 10 e 17 temos

$$x(t) = L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right]$$
$$= u(t-\pi)\cdot e^{-(t-\pi)}\text{sen}(t-\pi) + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\text{sen}(t)$$

Enfim, a solução do PVI é $x(t) = -u(t-\pi)\cdot e^{-(t-\pi)}\text{sen}(t) + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\text{sen}(t)$, desde que $\text{sen}(t-\pi) = -\text{sen}(t)$.

   b. $x''+3x'+2x = \delta(t-5) + u(t-10)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

Solução:
Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']+3L[x']+2L[x]=L[\delta(t-5)+u(t-10)],$$

$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+3sL[x]-3x(0)+2L[x]=L[\delta(t-5)]+L[u(t-10)],$$

$$s^2L[x]+3sL[x]+2L[x]-1=e^{-5s}+\frac{e^{-10s}}{s},$$

$$(s^2+3s+2)L[x]=e^{-5s}+\frac{e^{-10s}}{s}+1,$$

$$L[x]=\frac{e^{-5s}}{s^2+3s+2}+\frac{e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)}+\frac{1}{s^2+3s+2},$$

$$L[x]=\frac{e^{-5s}}{(s+1)(s+2)}+\frac{e^{-10s}}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{(A)}$$

Decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Considerando que

$$1=A(s+2)+B(s+1)$$

para $s=-1$, $1=A$ que implica $A=1$,
para $s=-2$, $1=-B$, que implica $B=-1$.

Logo, $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}$.

Também $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=\dfrac{C}{s}+\dfrac{D}{s+1}+\dfrac{E}{s+2}=\dfrac{C(s+1)(s+2)+Ds(s+2)+Es(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$.

Considerando que

$$1=C(s+1)(s+2)+Ds(s+2)+Es(s+1)$$

para $s=0$, $1=2C$ que implica $C=\dfrac{1}{2}$,

para $s=-1$, $1=-D$ que implica $D=-1$,

para $s=-2$, $1=2E$, que implica $E=\dfrac{1}{2}$.

Logo, $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+2}$.

Assim, na igualdade (A), temos

$$L[x]=\frac{e^{-5s}}{s+1}-\frac{e^{-5s}}{s+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-10s}}{s}-\frac{e^{-10s}}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-10s}}{s+2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\ .$$

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 2, 3 e 17 temos que a solução do PVI é

$$x(t)=L^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s+2}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s+1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{e^{-10s}}{s+2}\right]$$

$$+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

.

$$=u(t-5)\cdot e^{-(t-5)}-u(t-5)\cdot e^{-2(t-5)}+\frac{1}{2}u(t-10)-u(t-10)e^{-(t-10)}+\frac{1}{2}u(t-10)e^{-2(t-10)}$$

$$+e^{-t}-e^{-2t}$$

c. $x''+2x'+3x=\text{sen}(t)+\delta(t-3\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais **nulas**:

$$L[x'']+2L[x']+2L[x]=L[\text{sen}(t)+\delta(t-3\pi)],$$
$$s^2L[x]+2sL[x]+3L[x]=L[\text{sen}(t)]+L[\delta(t-3\pi)],$$
$$(s^2+2s+3)L[x]=\frac{1}{s^2+1}+e^{-3\pi s},$$
$$L[x]=\frac{1}{(s^2+2s+3)(s^2+1)}+\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+3}, \qquad \text{(A)}$$

Decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s^2+2s+3)(s^2+1)}=\frac{As+B}{s^2+2s+3}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+2s+3)}{(s^2+2s+3)(s^2+1)}.$$

Considerando que

$$1=(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+2s+3)$$

para $s=0$, $1=B+3D$ que implica $B+3D=1$,
para $s=1$, $1=2(A+B)+5(C+D)$, que implica $2A+2B+5C+5D=1$,
para $s=-1$, $1=2(-A+B)+2(-C+D)$, que implica $-2A+2B-2C+2D=1$,
para $s=-2$, $1=5(-2A+B)+3(-2C+D)$, que implica $-10A+5B-6C+3D=1$,

e resolvendo as quatro igualdades resultantes, temos que $A=B=D=-C=\frac{1}{4}$.

Logo, $\frac{1}{(s^2+2s+3)(s^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s+1}{s^2+2s+3}-\frac{1}{4}\frac{s-1}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos $L[x]=\frac{1}{4}\cdot\frac{s+1}{s^2+2s+3}-\frac{1}{4}\frac{s-1}{s^2+1}+\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+2s+3}$. Preparamos a igualdade anterior para aplicar a transformada inversa:

$$L[x]=\frac{1}{4}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+1}+\frac{e^{-3\pi s}}{(s+1)^2+2}.$$

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 10 e 17 temos que a solução do PVI é

$$x(t)=\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2}\right]-\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}\left[e^{-3\pi s}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}\right]$$
$$.\quad =\frac{1}{4}e^{-t}\cos(\sqrt{2}\,t)-\frac{1}{4}\cos(t)+\frac{1}{4}\text{sen}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}u(t-3\pi)e^{-(t-3\pi)}\text{sen}(\sqrt{2}(t-3\pi))$$

d. $x''+x=\delta(\text{t}-2\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais **nulas**:

$$L[x'']+L[x]=L[\delta(t-2\pi)],$$
$$s^2L[x]+L[x]=L[\delta(t-2\pi)],$$
$$(s^2+1)L[x]=e^{-2\pi s},$$
$$L[x]=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}. \qquad \text{(A)}$$

Assim, na igualdade (A), temos $L[x]=e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$.

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 5 e 17 temos que a solução do PVI é $x(t) = L^{-1}\left[e^{-2\pi s} \cdot \dfrac{1}{s^2+1}\right] = u(t-2\pi)\ \mathrm{sen}(t-2\pi) = u(t-2\pi)\ \mathrm{sen}(t)$ desde que $\mathrm{sen}(t-2\pi) = \mathrm{sen}(t)$.

e. $x^{(iv)} - x = \delta(t) + \delta(t-1)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $x'''(0) = 0$.

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais **nulas**:

$$L\left[x^{(iv)}\right] - L[x] = L[\delta(t)] + L[\delta(t-1)],$$

$$s^4 L[x] - L[x] = 1 + e^{-s},$$

$$(s^4 - 1)L[x] = 1 + e^{-s},$$

$$L[x] = \frac{1+e^{-s}}{s^4-1},$$

$$L[x] = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} + e^{-s}\frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \qquad \text{(A)}$$

e decompomos em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Considerando que

$$1 = A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1)$$

para $s = -1$, $1 = -4B$ que implica $B = -\dfrac{1}{4}$,

para $s = 1$, $1 = 4A$, que implica $A = \dfrac{1}{4}$,

para $s = 0$, $1 = A - B - D$, que implica $D = A - B - 1 = -\dfrac{1}{2}$,

para $s = 2$, $1 = 15A + 5B + 3(2C + D)$, que implica $15A + 5B + 6C + 3D = 1$,

temos que $A = \dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{1}{4}$, $C = 0$ e $D = -\dfrac{1}{2}$.

Logo, $\dfrac{1}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s^2+1}$.

Assim, na igualdade (A), temos

$$L[x] = \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} + e^{-s}\cdot\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\right).$$

Utilizando as propriedades 3, 5 e 17 temos que a solução do PVI é

$$x = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t) + u(t-1)\cdot\left(\frac{1}{4}e^{t-1} - \frac{1}{4}e^{-(t-1)} - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t-1)\right).$$

IMPORTANTE. LEIA COM ATENÇÃO:

Dado o PVI: $\begin{cases} a\,x''+b\,x'+cx=f(t) \\ x(0)=\alpha, \quad x'(0)=\beta \end{cases}$

A função de transferência é $H(s)=\dfrac{1}{as^2+bs+c}$**.**

A resposta-impulso é $h(t)=L^{-1}\left[H(s)\right]$**.**

A solução do PVI é $x(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+x_h(t)$**, onde** $x_h(t)$ **é a solução do PVI homogêneo** $\begin{cases} a\,x_h''+b\,x_h'+cx_h=0 \\ x_h(0)=\alpha, \quad x_h'(0)=\beta \end{cases}$ **que pode ser resolvido facilmente considerando a equação característica e os casos da duas raízes complexas ou reais (diferentes ou iguais).**

6. Considere os PVI a seguir. Encontre a função de transferência $H(s)$, a função de resposta ao impulso $h(t)$ e a solução do PVI:
   a. $x''+9x=g(t)$, $x(0)=2$, $x'(0)=-3$;

Solução:

A função de transferência é $H(s)=\dfrac{1}{s^2+9}$.

A resposta-impulso é $h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+9}\right]=\dfrac{1}{3}L^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+3^2}\right]=\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(t)$.

Agora, consideramos o PVI homogêneo $\begin{cases} x_h''+9\,x_h=0 \\ x_h(0)=2, \quad x_h'(0)=-3 \end{cases}$

A equação característica é $r^2+9=0$, cujas raízes são $r=\pm 3i$, que conduz à solução $x_h(t)=c_1\cos(3t)+c_2\operatorname{sen}(3t)$. Levando em conta as condições iniciais temos que

$$c_1\cos(0)+c_2\operatorname{sen}(0)=2,$$
$$-3c_1\operatorname{sen}(0)+3c_2\cos(0)=-3,$$

cuja solução é $c_1=2$, $c_2=1$. Assim, $x_h(t)=2\cos(3t)+\operatorname{sen}(3t)$.
Portanto, a solução do PVI original é

$$x(t)=\frac{1}{3}\int_0^t \operatorname{sen}(3(t-\tau))g(\tau)\,d\tau+2\cos(3t)+\operatorname{sen}(3t).$$

   b. $x''-x'-6x=g(t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=8$;

Solução:

A função de transferência é $H(s)=\dfrac{1}{s^2-s-6}$.

Decompomos $\dfrac{1}{s^2-s-6}=\dfrac{1}{(s-3)(s+2)}=\dfrac{A}{s-3}+\dfrac{B}{s+2}=\dfrac{A(s+2)+B(s-3)}{(s-3)(s+2)}$, do qual resulta $1=A(s+2)+B(s-3)$:

para $s=3$, $1=5A$ e temos $A=\dfrac{1}{5}$;

para $s=-2$, $1=-5B$ e temos $B=-\dfrac{1}{5}$;

e logo $\dfrac{1}{s^2-s-6}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{s+2}$

A resposta-impulso é $h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-6}\right]=\dfrac{1}{5}L^{-1}\left[\dfrac{1}{s-3}\right]-\dfrac{1}{5}L^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right]=\dfrac{1}{5}\left(e^{3t}-e^{-2t}\right)$.

Agora, consideramos o PVI homogêneo $\begin{cases} x_h''-x_h'-6x_h=0 \\ x_h(0)=1, \quad x_h'(0)=8 \end{cases}$

A equação característica é $r^2-r-6=0$, cujas raízes são $r=3$ e $r=-2$, que conduz à solução $x_h(t)=c_1 e^{3t}+c_2 e^{-2t}$. Levando em conta as condições iniciais temos que

$$c_1 e^0+c_2 e^0=1,$$
$$3c_1 e^0-2c_2 e^0=8,$$

cuja solução é $c_1=2$, $c_2=-1$. Assim, $x_h(t)=2e^{3t}-e^{-2t}$.

Portanto, a solução do PVI original é

$$x(t)=\frac{1}{5}\int_0^t\left(e^{3(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\right)g(\tau)\,d\tau+2e^{3t}-e^{-2t}.$$

c. $x''-2x'+5x=g(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$;

Solução:

A função de transferência é $H(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+5}$.

A resposta-impulso é

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}e^t\operatorname{sen}(2t).$$

Agora, consideramos o PVI homogêneo $\begin{cases} x_h''-2x_h'+5x_h=0 \\ x_h(0)=0, \quad x_h'(0)=2 \end{cases}$

A equação característica é $r^2-2r+5=0$, cujas raízes são $r=1\pm 2i$, que conduz à solução $x_h(t)=c_1 e^t\cos(2t)+c_2 e^t\operatorname{sen}(2t)$. Levando em conta a condição inicial $x_h(0)=0$, temos que $c_1 e^0\cos(0)+c_2 e^0\operatorname{sen}(0)=1$, que dá $c_1=1$. Logo, $x_h(t)=e^t\cos(2t)+c_2 e^t\operatorname{sen}(2t)$ e derivando temos

$$x_h'(t)=e^t\cos(2t)-2e^t\operatorname{sen}(2t)+c_2 e^t\operatorname{sen}(2t)+2c_2 e^t\cos(2t),$$

e levando em conta a condição inicial $x_h'(0)=2$, temos

$$e^0\cos(0)-2e^0\operatorname{sen}(0)+c_2 e^0\operatorname{sen}(0)+2c_2 e^0\cos(0)=2,$$

que dá $c_2=\dfrac{1}{2}$.

Assim, $x_h(t)=e^t\cos(2t)+\dfrac{1}{2}e^t\operatorname{sen}(2t)$.

Portanto, a solução do PVI original é

$$x(t)=\frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-\tau)}\operatorname{sen}(2(t-\tau))g(\tau)\,d\tau+e^t\cos(2t)+\frac{1}{2}e^t\operatorname{sen}(2t).$$

7. Mediante a transformada de Laplace, resolva os PVI a seguir:

a. $x''+2x'-3x=\delta(t-1)-\delta(t-2)$, $x(0)=2$, $x'(0)=-2$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']+2L[x']-3L[x]=L[\delta(t-1)-\delta(t-2)],$$
$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+2sL[x]-2x(0)-3L[x]=L[\delta(t-1)]-L[\delta(t-2)],$$
$$s^2L[x]-2s+2+2sL[x]-4-3L[x]=L[\delta(t-1)]-L[\delta(t-2)]$$

$$s^2L[x]+2sL[x]-3L[x]=e^{-s}-e^{-2s}+2s+2\,,$$
$$(s^2+2s-3)L[x]=e^{-s}-e^{-2s}+2s+2\,,$$
$$L[x]=\frac{e^{-s}}{s^2+2s-3}-\frac{e^{-2s}}{s^2+2s-3}+\frac{2(s+1)}{s^2+2s-3}\,,$$
$$L[x]=\frac{1}{2}e^{-s}\frac{2}{(s+1)^2-2^2}-\frac{1}{2}e^{-2s}\frac{2}{(s+1)^2-2^2}+2\frac{s+1}{(s+1)^2-2^2} \qquad \text{(A)}$$

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 6, 7 e 17 temos que a solução do PVI é

$$x(t)=\frac{1}{2}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right]+2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2-2^2}\right]$$
.
$$=\frac{1}{2}u(t-1)\cdot e^{-(t-1)}\operatorname{senh}(2(t-1))-\frac{1}{2}u(t-2)\cdot e^{-(t-2)}\operatorname{senh}(2(t-2))+2e^{-t}\cosh(2t)$$

b. $x''-x=4\delta(t-2)+t^2\,,\ \ x(0)=0\,,\ x'(0)=-2$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']-L[x]=L[4\delta(t-2)+t^2],$$
$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)-L[x]=4L[\delta(t-2)]+L[t^2],$$
$$s^2L[x]+2-L[x]=4e^{-2s}+\frac{2}{s^3}$$
$$s^2L[x]-L[x]=4e^{-2s}+\frac{2}{s^3}-2\,,$$
$$(s^2-1)L[x]=4e^{-2s}+\frac{2}{s^3}-2\,,$$
$$L[x]=\frac{e^{-s}}{s^2-1}+\frac{2}{s^3(s^2-1)}-\frac{2}{s^2-1}\,, \qquad \text{(A)}$$

Decompomos

$$\frac{2}{s^3(s^2-1)}=\frac{2}{s^3(s+1)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+1}+\frac{E}{s-1}$$
$$=\frac{As^2(s+1)(s-1)+Bs(s+1)(s-1)+C(s+1)(s-1)+Ds^3(s-1)+Es^3(s+1)}{s^3(s+1)(s-1)},$$

do qual resulta

$$2=As^2(s+1)(s-1)+Bs(s+1)(s-1)+C(s+1)(s-1)+Ds^3(s-1)+Es^3(s+1):$$

para $s=0$, $2=-C$ e temos $C=-2$;

para $s=1$, $2=2E$ e temos $E=1$;

para $s=-1$, $2=2D$ e temos $D=1$;

para $s=2$, $2=12A+6B+3C+8D+24E$ e temos

$$12A+6B=2-3C-8D-24E=-24;$$

para $s=-2$, $2=12A-6B+3C-24D+8E$ e temos

$$12A-\ddot{}6B=2-3C-24D-8E=-24;$$

e resolvendo as duas últimas igualdades temos que $A=-2$ e $B=0$.

Então temos $\dfrac{2}{s^3(s^2-1)}=\dfrac{2}{s^3(s+1)(s-1)}=-\dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-1}$.

Logo, substituindo em (A), temos

$$L[x]=4\frac{e^{-s}}{s^2-1}-\frac{2}{s}-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s^2-1}.$$

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 2, 3, 7 e 17 temos que a solução do PVI é

$$x(t)=4u(t-1)\cdot\operatorname{senh}(t-1)-2-t^2+e^{-t}+e^{t}-2\operatorname{senh}(t).$$

c. $x''+x=\delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

Solução:

Aplicamos transformada de Laplace à equação diferencial, levando em conta as condições iniciais:

$$L[x'']+L[x]=L[\delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi)],$$

$$s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+L[x]=L[\delta(t-\pi)]+L[\delta(t-2\pi],$$

$$s^2L[x]-1+L[x]=L[\delta(t-\pi)]+L[\delta(t-2\pi],$$

$$(s^2+1)L[x]=e^{-\pi s}+e^{-2\pi s}+1,$$

$$L[x]=e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\qquad\text{(A)}$$

Agora, aplicando transformada inversa e considerando as propriedades 5 e 17 temos que a solução do PVI é

$$\begin{aligned}x(t)&=u(t-\pi)\cdot\operatorname{sen}(t-\pi)+u(t-2\pi)\cdot\operatorname{sen}(t-2\pi)+\operatorname{sen}(t)\\&=-u(t-\pi)\cdot\operatorname{sen}(t)+u(t-2\pi)\cdot\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}(t)\end{aligned}.$$

8. Usando a transformada de Laplace, resolva os seguintes sistemas de EDO:

a. $\begin{cases}x'=3x-2y, & x(0)=1,\\ y'=-2x+3y, & y(0)=1;\end{cases}$

Solução:

Aplicando transformada de Laplace às duas EDO, e considerando as condições iniciais temos:

$$\begin{cases}L[x']=3L[x]-2L[y],\\ L[y']=-2L[x]+3L[y],\end{cases}$$

$$\begin{cases}s\,L[x]-x(0)=3L[x]-2L[y],\\ s\,L[y]-y(0)=-2L[x]+3L[y],\end{cases}$$

$$\begin{cases}(s-3)L[x]+2L[y]=x(0)=1,\\ 2L[x]+(s-3)L[y]=y(0)=1,\end{cases}$$

e resolvendo temos que

$$L[x]=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & s-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-3 & 2\\ 2 & s-3\end{vmatrix}}=\frac{s-3-2}{(s-3)(s-3)-4}=\frac{s-5}{(s-3)^2-4}=\frac{s-3}{(s-3)^2-2^2}-\frac{2}{(s-3)^2-2^2}$$

$$L[y]=\frac{\begin{vmatrix}s-3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-3 & 2\\ 2 & s-3\end{vmatrix}}=\frac{s-3-2}{(s-3)(s-3)-4}=\frac{s-5}{(s-3)^2-4}=\frac{s-3}{(s-3)^2-4}-\frac{2}{(s-3)^2-4}$$

Agora, tomamos transformada inversa às duas últimas igualdades, considerando as propriedades 6, 7 e 12:

$$x=e^{3t}\cosh(2t)-e^{3t}\operatorname{senh}(2t),\qquad y=e^{3t}\cosh(2t)-e^{3t}\operatorname{senh}(2t).$$

b. $\begin{cases} x' = x - y, & x(0) = -1, \\ y' = 2x + 4y, & y(0) = 0; \end{cases}$

Solução:
Aplicando transformada de Laplace às duas EDO, e considerando as condições iniciais temos:

$$\begin{cases} L[x'] = L[x] - L[y], \\ L[y'] = 2L[x] + 4L[y], \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L[x] - x(0) = L[x] - L[y], \\ s\,L[y] - y(0) = 2L[x] + 4L[y], \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)L[x] + L[y] = x(0) = -1, \\ -2L[x] + (s-4)L[y] = y(0) = 0, \end{cases}$$

e resolvendo temos que

$$L[x] = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & s-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-4 \end{vmatrix}} = \frac{-s+4}{(s-1)(s-4)+2} = \frac{-s-4}{s^2-5s+6} = -\frac{s-\frac{5}{2}}{(s-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}} + 3\frac{\frac{1}{2}}{(s-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$L[y] = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{(s-1)(s-4)+2} = \frac{-2}{s^2-5s+6} = -\frac{2}{(s-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}} = -4\frac{\frac{1}{2}}{(s-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

Agora, tomamos transformada inversa às duas últimas igualdades, considerando as propriedades 6, 7 e 17:

$$x = -e^{-5t/2}\cosh(t/2) + 3e^{-5t/2}\operatorname{senh}(t/2), \qquad y = -4e^{5t/2}\operatorname{senh}(t/2).$$

c. $\begin{cases} x' + y = 1 - u(t-2), & x(0) = 0, \\ x + y' = 0, & y(0) = 0; \end{cases}$

Solução:
Aplicando transformada de Laplace às duas EDO, e considerando as condições iniciais temos:

$$\begin{cases} L[x'] + L[y] = L[1] - L[u(t-2)] \\ L[x] + L[y'] = L[0], \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L[x] - x(0) + L[y] = L[1] - L[u(t-2)], \\ L[x] + s\,L[y] - y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL[x] + L[y] = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-2s}}{s} \\ L[x] + sL[y] = 0, \end{cases}$$

e resolvendo temos que

$$L[x] = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{1-e^{-2s}}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1} - e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2-1} \qquad \text{(A)}$$

$$L[y]=\frac{\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}}=-\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2-1)}.$$

Decompomos $\frac{1}{s(s^2-1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-1}=\frac{A(s^2-1)+(Bs+C)s}{s(s^2-1)}$, que dá

$$1=A(s^2-1)+(Bs+C)s\,;$$

para $s=0$, $1=-A$, ou seja, $A=-1$;
para $s=1$, $1=B+C$, ou seja, $B+C=1$;
para $s=-1$, $1=-(-B+C)$, ou seja, $B-C=1$,
e então temos $A=-1$, $B=1$ e $C=0$.
Logo,

$$L[y]=-\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2-1)}=-\frac{1}{s(s^2-1)}+e^{-2s}\frac{1}{s(s^2-1)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}-\frac{e^{-2s}}{s}+e^{-2s}\cdot\frac{s}{s^2-1} \qquad \text{(B)}$$

Agora, tomamos transformada inversa às igualdades (A) e (B), considerando as propriedades 2,6 e 17:

$$x=\operatorname{senh}(t)-u(t-2)\operatorname{senh}(t-2),$$
$$y=1-\cosh(t)-u(t-2)\cosh(t-2).$$

d. $\begin{cases} x'-2x+y'=-\cos(t), & x(0)=0, \\ -2x+y'=\operatorname{sen}(t), & y(0)=3; \end{cases}$

Solução:
Aplicando transformada de Laplace às duas EDO, e considerando as condições iniciais temos:

$$\begin{cases} L[x']-2L[x]+L[y']=-L[\cos(t)] \\ -2L[x]+L[y']=L[\operatorname{sen}(t)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL[x]-x(0)-2L[x]+sL[y]-y(0)=-L[\cos(t)] \\ -2L[x]+sL[y]-y(0)=L[\operatorname{sen}(t)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)L[x]+sL[y]=-\frac{s}{s^2+1}+3 \\ -2L[x]+sL[y]=\frac{1}{s^2+1}+3, \end{cases}$$

e resolvendo temos que

$$L[x]=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{s}{s^2+1}+3 & s \\ \frac{1}{s^2+1}+3 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & s \\ -2 & s \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{s^2}{s^2+1}+3s-\frac{s}{s^2+1}-3s}{s^2}=-\frac{s^2+s}{s^2(s^2+1)}=-\frac{s+1}{s(s^2+1)} \qquad \text{(A)}$$

$$L[y]=\frac{\begin{vmatrix} s-2 & -\frac{s}{s^2+1}+3 \\ -2 & \frac{1}{s^2+1}+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & s \\ -2 & s \end{vmatrix}}=\frac{\frac{s-2}{s^2+1}+3s-6-2\frac{s}{s^2+1}+6}{s^2}=-\frac{s+2}{s^2(s^2+1)}+\frac{3}{s} \qquad \text{(B)}$$

Temos as decomposições

$$-\frac{s+1}{s(s^2+1)}=-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1},$$

$$-\frac{s+2}{s^2(s^2+1)}+\frac{3}{s}=-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}+2\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{3}{s}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}+2\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

Logo,

$$L[x]=-\frac{s+1}{s(s^2+1)}=-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1},$$

$$L[y]=-\frac{s+2}{s^2(s^2+1)}+\frac{3}{s}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}+2\cdot\frac{1}{s^2+1};$$

Agora, tomamos transformada inversa às duas últimas igualdades, considerando as propriedades 3,4, 5 e 8:

$$x=-1-\operatorname{sen}(t)+\cos(t),$$

$$y=2-2t+\cos(t)+2\operatorname{sen}(t).$$

e. $\begin{cases} x''+2y'=-x, & x(0)=2, \quad x'(0)=-7, \\ -3x''+2y''=3x-4y, & y(0)=4, \quad y'(0)=-9. \end{cases}$

Solução:

Aplicando transformada de Laplace às duas EDO, e considerando as condições iniciais temos:

$$\begin{cases} L[x'']+2L[y']=-L[x] \\ -3L[x'']+2L[y'']=3L[x]-4L[y], \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L[x]-sx(0)-x'(0)+2sL[y]-2y(0)=-L[x] \\ -3s^2L[x]+3sx(0)+3x'(0)+2s^2L[y]-2sy(0)-2y'(0)=3L[x]-4L[y], \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+1)L[x]+2sL[y]-x'(0)-2y(0)=2s-7+8=2s+1 \\ -3(s^2+1)L[x]+2(s^2+2)L[y]=-6s+21+8s-18=2s+3 \end{cases}$$

e resolvendo temos que

$$L[x]=\frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & 2s \\ 2s+3 & 2(s^2+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 2s \\ -3(s^2+1) & 2(s^2+2) \end{vmatrix}}=\frac{2s^3-s^2+s+2}{s^4+3s^3+3s^2+3s+2}=\frac{2s^3-s^2+s+2}{(s+2)(s+1)(s^2+1)} \qquad \text{(A)}$$

$$L[y]=\frac{\begin{vmatrix} s^2+1 & 2s+1 \\ -3(s^2+1) & 2s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 2s \\ -3(s^2+1) & 2(s^2+2) \end{vmatrix}}=\frac{4s^3+3s^2+4s+3}{(s+2)(s+1)(s^2+1)} \qquad \text{(B)}$$

Temos as decomposições

$$\frac{2s^3-s^2+s+2}{(s+2)(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s+2}-\frac{s}{s^2+1},$$

$$\frac{4s^3+3s^2+4s+3}{(s+2)(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{s+1}+\frac{5}{s+2}$$

Logo,

$$L[x]=-\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s+2}-\frac{s}{s^2+1},$$

$$L[y] = -\frac{1}{s+1} + \frac{5}{s+2};$$

Agora, tomamos transformada inversa às duas últimas igualdades, considerando as propriedades 3 e 5:

$$x = -e^{-t} + 4e^{-2t} - \cos(t),$$

$$y = -e^{-t} + 5e^{-2t}.$$