GABARITO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 04

Disciplina: Cálculo Operacional **Prof. Germán Suazo**

Na lista a seguir, o número complexo z sempre será expresso como $z = x + i\,y$, com x e y números reais. Vale o mesmo para números complexos z_1, z_2, etc.

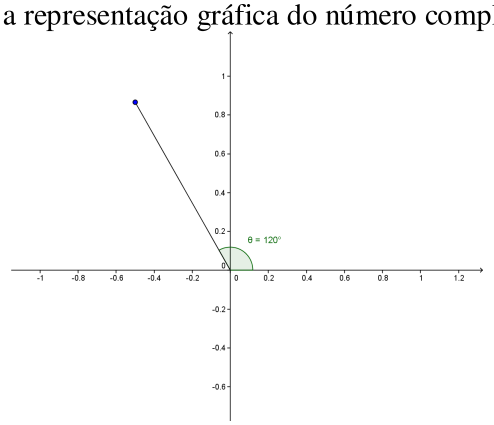
1. Encontre o módulo e argumento dos seguintes números complexos:

   a. $z = \dfrac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$;

Solução:

Temos que $z = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-2(1-i\sqrt{3})}{1+3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A figura a seguir mostra a representação gráfica do número complexo.



Assim, $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$.

Desde que o ângulo está compreendido no segundo quadrante, temos que

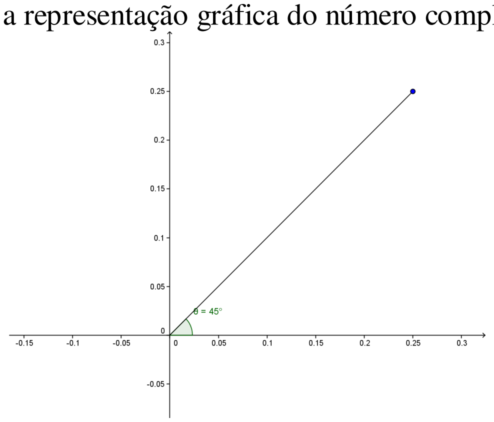
$$\theta = \pi + \arctan\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = \pi + \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

   b. $z = \dfrac{i}{-2-2i}$;

Solução:

Temos que $z = \dfrac{i}{-2-2i} = \dfrac{i}{-2-2i} \cdot \dfrac{-2+2i}{-2+2i} = \dfrac{-i(-2+2i)}{4+4} = \dfrac{2+2i}{8} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{1}{4}$.

A figura a seguir mostra a representação gráfica do número complexo.



Assim, $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Desde que o ângulo está compreendido no primeiro quadrante, temos que
$\theta = \arctan\frac{1/4}{1/4} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

c. $z = (\sqrt{3} - i)^8$.

Solução:

A forma polar de $\sqrt{3} - i = re^{i\theta}$ tem $r = \sqrt{3+1} = 2$ e $\theta = 2\pi + \arctan(-1/\sqrt{3}) = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ desde que o ângulo está compreendido no quarto quadrante.

Logo, $z = (\sqrt{3} - i)^8 = (2e^{i11\pi/6})^8 = 2^8 e^{i88\pi/6}$.

Assim, $|z| = 2^8$, e $\theta \equiv 88\pi/6 = 44\pi/3 = 7 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, ou seja, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

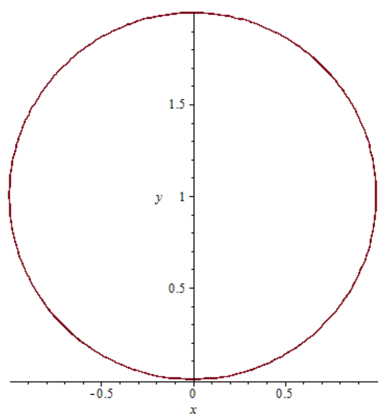
2. Em cada caso a seguir, identificar o conjuntos de pontos (x, y) determinado pela condição:

a. $|z - i| = 1$;

Solução:

Se $z = x + i\,y$, temos que $z - i = x + i\,y - i = x + i(y-1)$.

Então $|z - i| = 1$ significa que $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1$, ou seja, $x^2 + (y-1)^2 = 1$, que é a equação de uma circunferência com centro $(0,1)$ e raio 1:

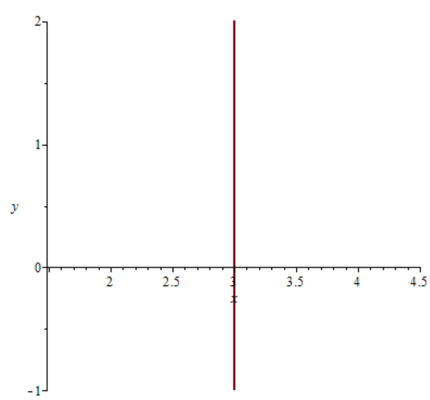


b. $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 3$;

Solução:

Se $z = x + i\,y$, temos que $\bar{z} - i = x - i\,y - i = x + i(-y-1)$.

Então $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 3$ significa que $x = 3$, que é a equação de uma reta vertical, como se mostra na figura:



c. $|z-i|=|z+i|$.

Solução:

Se $z = x + i\,y$, temos que $z - i = x + i\,y - i = x + i(y-1)$ e também, $z + i = x + i\,y + i = x + i(y+1)$.

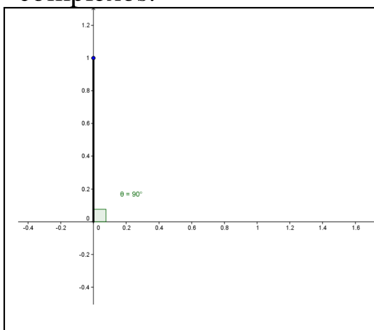
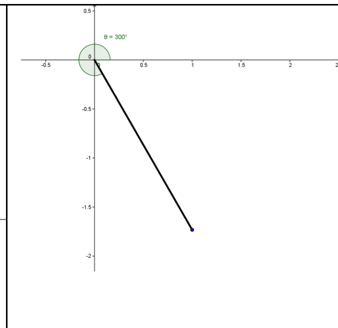
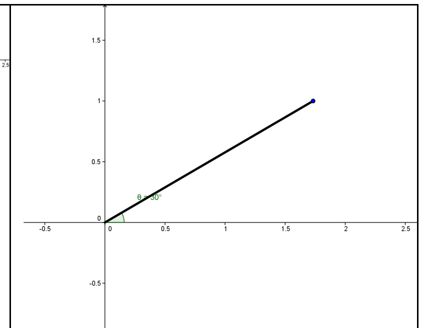
Então $|z-i|=|z+i|$ significa que $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$, ou seja, $x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2$, ou, $|y-1|=|y+1|$. Da última igualdade, temos $y-1=\pm(y+1)$; a igualdade $y-1=y+1$ é falsa, e a outra: $y-1=-y-1$ que é a equação da reta $y=0$, ou seja, o eixo x.

3. Use a forma polar para calcular os seguintes números complexos:

a. $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$;

Solução:

Mostramos a representação gráfica e a respectiva forma polar dos três números complexos:

		
$i = 1\cdot e^{i\pi/2}$	$1-i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i5\pi/3}$	$\sqrt{3}+i = 2\cdot e^{i\pi/6}$

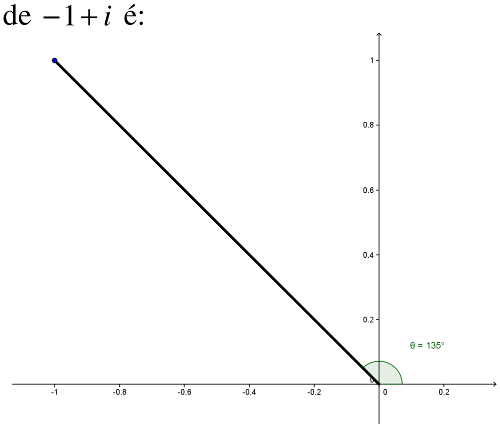
Então $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = \left(1\cdot e^{i\pi/2}\right)\cdot\left(2\cdot e^{i5\pi/3}\right)\cdot\left(2\cdot e^{i\pi/6}\right) = 4e^{i\pi(1/2+5/3+1/6)} = 4e^{i7\pi/3}$, ou seja,

$i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 4e^{i7\pi/3} = 4\cos(7\pi/3) + i4\text{sen}(7\pi/3) = 4\cdot\dfrac{1}{2} + i4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + i\,2\sqrt{3}$.

b. $(-1+i)^{20}$;

Solução:

A representação gráfica de $-1+i$ é:



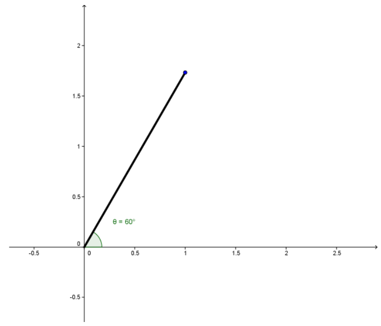
Então $(-1+i) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, e assim

$$(-1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)^{20} = 2^{20/2}e^{i15\pi} = 2^{10}(\cos(15\pi) + i\text{sen}(15\pi)) = -2^{10}.$$

c. $(1+i\sqrt{3})^{-20}$

Solução:

A representação gráfica de $1+i\sqrt{3}$ é:



Então $1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}$, e assim

$$(1+i\sqrt{3})^{-20}=\left(2e^{i\pi/3}\right)^{-20}=2^{-20}e^{-i20\pi/3}=2^{-20}(\cos(-20\pi/3)+i\,\mathrm{sen}(-20\pi/3))=2^{-20}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Logo, $(1+i\sqrt{3})^{-20}=-2^{-21}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

4. Em cada caso encontre todas as raízes e desenhe-as geometricamente:

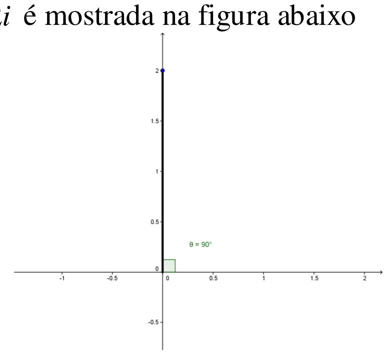
 a. $(2i)^{1/2}$;

Observação: Para calcular as raízes do número complexo $z=re^{i\theta}$ é utilizada a expressão

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\ \text{para } k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Solução:

A representação gráfica de $2i$ é mostrada na figura abaixo



Assim, a forma polar fica $2i=2e^{i\pi/2}$. Então as duas raízes quadradas são mostradas na tabela abaixo

	Valor da raiz
$k=0$	$\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi/2}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=1+i$
$k=1$	$\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi/2}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi/2}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=-1-i$

 b. $(-i)^{1/3}$;

Solução:

Temos que $-i=1\cdot e^{i3\pi/2}$. Então as três raízes cúbicas são mostradas na tabela abaixo

	Valor da raiz
$k=0$	$\sqrt[3]{1}\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi/2}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi/2}{3}\right)\right]=\left[0+i\cdot 1\right]=i$
$k=1$	$\sqrt[3]{1}\cdot\left[\cos\left(\frac{7\pi/2}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi/2}{3}\right)\right]=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$k=2$	$\sqrt[3]{1}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{11\pi/2}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi/2}{3}\right)\right]=\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

c. $(-1)^{1/4}$;

Solução:

Temos que $-1=1\cdot e^{i\pi}$. Então as raízes quartas são mostradas na tabela abaixo

	Valor da raiz
$k=0$	$\sqrt[4]{1}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$k=1$	$\sqrt[3]{1}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$k=2$	$\sqrt[4]{1}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$k=3$	$\sqrt[4]{1}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d. $8^{1/6}$.

Solução:

Temos que $8=8e^{i0}$. Então as raízes sextas são mostradas na tabela abaixo

	Valor da raiz
$k=0$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{0}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{0}{6}\right)\right]=\sqrt{2}[1+i0]=\sqrt{2}$
$k=1$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
$k=2$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
$k=3$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{6\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{6\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}[-1+i0]=-\sqrt{2}$
$k=4$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{8\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{8\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
$k=5$	$\sqrt[6]{8}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{10\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{10\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5. Use a fórmula de De Moivre para expressar:
   a. $\cos(3\theta)$, em termos de $\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$;
   b. $\operatorname{sen}(3\theta)$, em termos de $\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$.

Solução:

Observe que $e^{i3\theta}=\cos(3\theta)+i\operatorname{sen}(3\theta)$. Mas, por outro lado, lembrando que $i^2=-1$ e $i^3=-i$ temos que

$$\begin{aligned}e^{i3\theta} &= \left(e^{i\theta}\right)^3 = \left(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\right)^3 \\ &= \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)\cdot i\,\text{sen}(\theta) + 3\cos(\theta)\cdot\left(i\,\text{sen}(\theta)\right)^2 + \left(i\,\text{sen}(\theta)\right)^3 \\ &= \left(\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\cdot\text{sen}^2(\theta)\right) + i\left(3\cos^2(\theta)\cdot\text{sen}(\theta) - \text{sen}^3(\theta)\right)\end{aligned}$$

Assim, podemos afirmar que

a. $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\cdot\text{sen}^2(\theta)$, e

b. $\text{sen}(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\cdot\text{sen}(\theta) - \text{sen}^3(\theta)$.

6. Verifique que $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Solução:

Se chamamos $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, então $zS = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}$. Então $S - zS = 1 - z^{n+1}$, ou seja, $S(1 - z) = 1 - z^{n+1}$ que resulta em $S = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

7. Usando a igualdade no exercício 6, determine as somas a seguir:
   a. $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$;
   b. $\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta) + \cdots + \text{sen}(n\theta)$;

Solução:

Suponha que $z = e^{i\theta}$. Então, por um lado, temos que

$$\begin{aligned}1 + z + z^2 + \cdots + z^n &= 1 + e^{i\theta} + \left(e^{i\theta}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\theta}\right)^n = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots + e^{in\theta} \\ &= 1 + \left(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\right) + \left(\cos(2\theta) + i\,\text{sen}(2\theta)\right) + \cdots + \left(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right) \\ &= \left(1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta)\right) + i\left(\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta) + \cdots + \text{sen}(n\theta)\right)\end{aligned}$$

Também, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} &= \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\cdot\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\ &= \frac{\cos(\theta/2) - i\,\text{sen}(\theta/2) - \cos((n+1/2)\theta) - i\,\text{sen}((\text{n}+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2) - i\,\text{sen}(\theta/2) - \cos(\theta/2) - i\,\text{sen}(\theta/2)} \\ &= \frac{\cos(\theta/2) - i\,\text{sen}(\theta/2) - \cos((n+1/2)\theta) - i\,\text{sen}((\text{n}+1/2)\theta)}{-2i\,\text{sen}(\theta/2)} \\ &= \left(\frac{\text{sen}(\theta/2) + \text{sen}((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)}\right) + i\left(\frac{\cos(\theta/2) - \cos((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)}\right)\end{aligned}$$

Mas, como $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, temos que

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\text{sen}(\theta/2) + \text{sen}((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)} = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)},$$

$$\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta) + \cdots + \text{sen}(n\theta) = \frac{\cos(\theta/2) - \cos((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)} = \frac{\cot(\theta/2)}{2} - \frac{\cos((\text{n}+1/2)\theta)}{2\,\text{sen}(\theta/2)}$$

.

8. Usando a igualdade no exercício 6, determine o valor de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$, sendo z qualquer raiz n-ésima da unidade diferente da unidade.

Solução:

Como z é qualquer raiz n-ésima da unidade diferente da unidade, temos que $z^n = 1$ mas $z \neq 1$. Mas, de acordo com o exercício 6, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = \dfrac{1 - 1}{1 - z} = 0$.

9. Usando as igualdades $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, calcule expressões para $\operatorname{sen}(A)\cdot\operatorname{sen}(\mathrm{B})$, $\operatorname{sen}(A)\cdot\cos(\mathrm{B})$ e $\cos(A)\cdot\cos(\mathrm{B})$ em termos de somas de senos e cossenos.

Solução:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A)\cdot\operatorname{sen}(B) &= \frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}\cdot\frac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}=\frac{e^{i(A+B)}-e^{i(A-B)}-e^{-i(A-B)}+e^{-i(A+B)}}{-4}\\
&=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A+B)}+e^{-i(A+B)}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A-B)}+e^{-i(A-B)}}{2}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A)\cdot\cos(B) &= \frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}\cdot\frac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}=\frac{e^{i(A+B)}+e^{i(A-B)}-e^{-i(A-B)}-e^{-i(A+B)}}{4i}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A+B)}-e^{-i(A+B)}}{2i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A-B)}-e^{-i(A-B)}}{2i}\right)\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(A)\cdot\cos(B) &= \frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\cdot\frac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}=\frac{e^{i(A+B)}+e^{i(A-B)}+e^{-i(A-B)}+e^{-i(A+B)}}{4}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A+B)}+e^{-i(A+B)}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(A-B)}+e^{-i(A-B)}}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)
\end{aligned}$$