GABARITO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 02
Disciplina: Cálculo Operacional Prof. Germán Suazo

1. Resolva as equações diferenciais a seguir, considerando-as como equações de variáveis separáveis ou reduzíveis a elas:
   a. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$;

Solução:
Dada a EDO $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$, podemos separar as variáveis dividindo essa equação por $x(1+y^2)$:

$$\frac{(1+y^2)}{x(1+y^2)}dx + \frac{xy}{x(1+y^2)}dy = 0,$$

ou seja, $$\frac{1}{x}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0,$$

e agora, integramos: $$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = c.$$

A integral $\int \frac{y}{1+y^2}dy$ pode ser calculada pela substituição $u = y^2 + 1$. Nesse caso, $du = 2y\,dy$ ou $\frac{1}{2}du = y\,dy$ e substituindo na integral temos

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

Agora, voltando à equação, temos que $\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = c$ conduz ao resultado

$$\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = c$$

e tomando exponenciais a ambos os lados temos

$$e^{\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)} = e^c,$$

ou seja, $x\cdot\sqrt{1+y^2} = e^c$, que elevando ao quadrado fica $x^2\cdot\left(1+y^2\right) = e^{2c}$, ou, $x^2y^2 + x^2 = k$, com $k = e^{2c}$ (que é uma constante).

   b. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$;

Solução:
Dada a EDO $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$, podemos tirar em evidência y', de modo que $y' = \frac{yx^2 - x^2}{y^2 + xy^2}$, ou, $y' = \frac{x^2(y-1)}{y^2(1+x)}$, que, equivalentemente, pode ser escrita como $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(y-1)}{y^2(1+x)}$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $\frac{y^2}{(y-1)}dy = \frac{x^2}{(1+x)}dx$.

Integrando temos que: $$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{x^2}{1+x}dx + c.$$

A integral $\int \frac{y^2}{y-1}dy$ pode ser calculada por substituição ($u = y-1$), ou, expressando a integral da forma

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{y^2-1+1}{y-1}dy = \int \frac{y^2-1}{y-1}dy + \int \frac{1}{y-1}dy = \int \frac{(y-1)(y+1)}{y-1}dy + \int \frac{1}{y-1}dy$$
$$= \int (y+1)dy + \int \frac{1}{y-1}dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1)$$

A integral $\int \frac{x^2}{1+x}dx$ pode ser calculada por substituição $u = 1+x$, ou expressando a integral na forma

$$\int \frac{x^2-1+1}{1+x}dx = \int \frac{x^2-1}{x+1}dy + \int \frac{1}{x+1}dy = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dy + \int \frac{1}{x+1}dy$$
$$= \int (x-1)dy + \int \frac{1}{x+1}dy = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

Substituindo os resultados das integrais na equação $\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{x^2}{1+x}dx + c$ temos

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + c.$$

que pode ser escrita como $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - x - y + \ln(x+1) - \ln(y-1) = -c$, ou,

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2\ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right) = -2c\text{, ou,}$$

$$(x+y)(x-y) - 2(x+y) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = -2c\text{, ou,}$$

$$(x+y)(x-y-2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = k\text{, com } k = -2c.$$

c. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y(0) = 1$;

Solução:

Primeiro, resolvemos a EDO $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, podemos separar as variáveis dividindo essa equação por $\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-x^2}$:

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-x^2}}dy = 0.$$

e fica, então, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$ com as variáveis separadas.

Integrando temos que: $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = c.$$

A integral c pode ser calculada por substituição $u = 1-x^2$. Nesse caso, $du = -2x\,dx$ ou $-\frac{1}{2}du = x\,dx$ e substituindo na integral temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{2}2\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Similarmente, $\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\sqrt{1-y^2}$.

Substituindo os resultados das integrais na equação $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = c$ temos

$$-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = c.$$

Agora, impondo a condição inicial $y(0)=1$, substituímos $x=0$ e $y=1$ na última igualdade: $-\sqrt{1-0^2} - \sqrt{1-1^2} = c$, que implica que $c=-1$. Assim, a solução correspondente ao PVI proposto é $-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = -1$, ou equivalentemente, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$.

d. $y\ln(y)\,dx + x\,dy = 0,\ y(1)=1$;

Solução:

Primeiro, resolvemos a EDO $y\ln(y)\,dx + x\,dy = 0$, podemos separar as variáveis dividindo essa equação por $x\,y\ln(y)$:

$$\frac{y\ln(y)}{x\,y\ln(y)}dx + \frac{x}{x\,y\ln(y)}dy = 0$$

e fica, então, $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y\ln(y)}dy = 0$ com as variáveis separadas.

Integrando temos que: $$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y\ln(y)}dy = c.$$

A integral $\int \frac{1}{y\ln(y)}dy$ pode ser calculada por substituição $u=\ln(y)$. Nesse caso, $du = \frac{1}{y}dy$ e substituindo na integral temos

$$\int \frac{1}{y\ln(y)}dy = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) = \ln(\ln(y)).$$

Substituindo o resultado anterior na equação $\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y\ln(y)}dy = c$ temos

$$\ln(x) + \ln(\ln(y)) = c.$$

Esta última expressão pode ser escrita como $x\ln(y) = k$, com $k = e^c$, ou, $y = e^{\frac{k}{x}}$

Agora, impondo a condição inicial $y(1)=1$, substituímos $x=1$ e $y=1$ na última igualdade: $1 = e^{\frac{k}{1}}$, que implica que $k=0$. Assim, a solução correspondente ao PVI proposto é $y = e^{\frac{0}{x}} = e^0 = 1$.

e. $y' = a^{x+y}, \qquad a>0,\ a\neq 1$;

Solução:

Dada a EDO $y' = a^{x+y}$, esta pode ser escrita como $\frac{dy}{dx} = a^x a^y$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $a^{-y}dy = a^x dx$.

Integrando temos que: $$\int a^{-y}dy = \int a^x dx + c.$$

Temos $\int a^{-y}dy = \int e^{-y\ln(a)}dy = \frac{1}{-\ln(a)}e^{-y\ln(a)} = -\frac{a^{-y}}{\ln(a)}$.

Similarmente, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$.

.

Substituindo os resultados das integrais na equação $\int a^{-y}dy = \int a^{x}dx + c$ temos

$$-\frac{a^{-y}}{\ln(a)} = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c.$$

que pode ser escrita como $a^{x} + a^{-y} = -c\ln(a)$, ou, $a^{x} + a^{-y} = k$, com $k = -c\ln(a)$.

f. $(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\,dy = 0$;

Solução:

Dada a EDO $(xy^2 - y^2 + x - 1)\,dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\,dy = 0$, podemos fatorar, de forma que fique $\left[y^2(x-1) + (x-1)\right]dx + \left[x^2(y+1) - 2x(y+1) + 2(y+1)\right]dy = 0$, ou, $(x-1)(y^2+1)\,dx + (y+1)(x^2-2x+2)\,dy = 0$. Para separar as variáveis, dividimos a última equação por $(y^2+1)(x^2-2x+2)$ e temos

$$\frac{(x-1)(y^2+1)}{(y^2+1)(x^2-2x+2)}dx + \frac{(y+1)(x^2-2x+2)}{(y^2+1)(x^2-2x+2)}dy = 0 \text{ , ou}$$

$$\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \frac{y+1}{y^2+1}dy = 0.$$

Integrando temos que: $$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{y+1}{y^2+1}dy = c.$$

A integral $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$ pode ser escrita como

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2).$$

A integral $\int \frac{y+1}{y^2+1}dy$ pode ser escrita como

$$\int \frac{y+1}{y^2+1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}dy + \int \frac{1}{y^2+1}dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \arctan(y).$$

Substituindo os resultados das integrais na equação $\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{y+1}{y^2+1}dy = c$ temos

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \arctan(y) = c.$$

que pode ser escrita como $\ln\left[(x^2-2x+2)(y^2+1)\right] + 2\arctan(y) = 2c$, ou,

$$(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\arctan(y)} = k \text{, com } k = e^{2c}.$$

g. $y' = \operatorname{sen}(x-y)$; (dica: use a mudança de variável $u = x - y$);

Solução:

Para reduzir a EDO a uma com variáveis separáveis, usamos a mudança de variáveis $u = x - y$. Assim, derivando em relação a x temos $u' = 1 - y'$, ou $y' = 1 - u'$. Agora, substituindo na equação, conseguimos $1 - u' = \operatorname{sen}(u)$. Podemos tirar em evidência u', de modo que $u' = 1 - \operatorname{sen}(u)$, ou, $\frac{du}{dx} = 1 - \operatorname{sen}(u)$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $\frac{1}{1-\operatorname{sen}(u)}du = dx$.

Integrando temos que: $$\int \frac{1}{1-\text{sen}(u)}du = \int dx + c.$$

A integral $\int \frac{1}{1-\text{sen}(u)}du$ pode ser calculada usando a substituição $v = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$. Nesse caso, $dv = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{u}{2}\right)du$, ou, $du = 2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)dv = 2\frac{1}{v^2+1}dv$. Também, temos que

$$1-\text{sen}(u) = 1-2\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) = 1-2\frac{v}{v^2+1} = \frac{v^2+1-2v}{v^2+1} = \frac{(v-1)^2}{v^2+1},$$

e substituindo na integral temos

$$\int \frac{1}{1-\text{sen}(u)}du = \int \frac{2\frac{1}{v^2+1}}{\frac{(v-1)^2}{v^2+1}}dv = \int \frac{2}{(v-1)^2} = -2\frac{1}{v-1} = \frac{-2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)-1}.$$

Substituindo o resultado na equação $\int \frac{1}{1-\text{sen}(u)}du = \int dx + c$ temos que

$$\frac{-2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)-1} = x + c.$$

que pode ser escrita como $(x+c)\cdot\left(\tan\left(\frac{u}{2}\right)-1\right) = -2$, ou,

$$(x+c)\cdot\left(\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)-1\right) = -2.$$

h. $y' = ax + by + c$, $a,\ b,\ c$ constantes;

Solução:

Se $b = 0$, a equação $y' = ax + by + c$ fica $y' = ax + c$, ou, $\frac{dy}{dx} = ax + c$, que é de variáveis separáveis, $dy = (ax+c)dx$, e integrando, $y = a\frac{x^2}{2} + cx + k$, onde k é uma constante.

Agora, vejamos o caso em que $b \neq 0$. Para reduzir a EDO a uma com variáveis separáveis, usamos a mudança de variáveis $u = ax + by + c$. Assim, derivando em relação a x temos $u' = a + b\,y'$, ou $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$. Agora, substituindo na equação $y' = ax + by + c$, conseguimos $\frac{1}{b}(u'-a) = u$. Podemos tirar em evidência u', de modo que $u' = bu + a$, ou, $\frac{du}{dx} = bu + a$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $\frac{1}{bu+a}du = dx$.

Integrando temos que: $$\int \frac{1}{bu+a}du = \int dx + c.$$

A integral $\int \frac{1}{bu+a}du = \frac{1}{b}\ln|bu+a|$ e substituindo o resultado na equação $\int \frac{1}{bu+a}du = \int dx + k$ temos que $\frac{1}{b}\ln|bu+a| = x + k$, ou, $\ln|bu+a| = b(x+k)$, que pode ser escrita como $b(ax+by+c) + a = Ke^{bx}$, com $K = e^{bk}$.

i. $(x+y)^2 y' = a^2$;

Solução:

Para reduzir a EDO a uma com variáveis separáveis, usamos a mudança de variáveis $u = x + y$. Assim, derivando em relação a x temos $u' = 1 + y'$, ou $y' = u' - 1$. Agora, substituindo na equação $(x+y)^2 y' = a^2$, conseguimos $u^2(u'-1) = a^2$. Podemos tirar em evidência u', de modo que $u' = \frac{a^2}{u^2} + 1$, ou, $\frac{du}{dx} = \frac{a^2 + u^2}{u^2}$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $\frac{u^2}{a^2 + u^2} du = dx$.

Integrando temos que: $$\int \frac{u^2}{a^2+u^2} du = \int dx + c.$$

A integral $\int \frac{u^2}{a^2+u^2} du = \int \frac{a^2+u^2-a^2}{a^2+u^2} du = \int \left(1 - \frac{a^2}{a^2+u^2}\right) du = u - a \cdot \arctan \frac{u}{a}$ e substituindo o resultado na equação $\int \frac{u^2}{a^2+u^2} du = \int dx + c$ temos que $u - a \cdot \arctan \frac{u}{a} = x + c$, ou, $x + y - a \cdot \arctan \frac{x+y}{a} = x + c$, que pode ser escrita como $y - c = a \cdot \arctan \frac{x+y}{a}$, ou, $x + y = a \cdot \tan\left(\frac{1}{a}(y-c)\right)$.

j. $(x^2 y^2 + 1)\, dx + 2x^2\, dy = 0$; (dica: use $u = xy$).

Solução:

Para reduzir a EDO a uma com variáveis separáveis, usamos a mudança de variáveis $u = xy$. Assim, derivando em relação a x temos $u' = x y' + y$, ou $y' = \frac{u' - y}{x} = \frac{u' - \frac{u}{x}}{x} = \frac{xu' - u}{x^2}$. Agora, a equação $(x^2 y^2 + 1)\, dx + 2x^2\, dy = 0$ pode ser escrita como $(x^2 y^2 + 1) + 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$, ou, $(x^2 y^2 + 1) + 2x^2 y' = 0$ e então substituindo as igualdades anteriores, a equação fica $u^2 + 1 + 2x^2 \cdot \frac{xu' - u}{x^2} = 0$ conseguimos $u^2 + 1 - 2u + 2xu' = 0$. Podemos tirar em evidência u', de modo que $2xu' = -(u-1)^2$, ou, $2x\frac{du}{dx} = -(u-1)^2$. Agora, separando as variáveis na última equação temos $\frac{-2}{(u-1)^2} du = \frac{1}{x} dx$.

Integrando temos que: $$\int \frac{-2}{(u-1)^2} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Por integração direta temos que $\int \frac{-2}{(u-1)^2} du = \frac{2}{u-1}$ e substituindo o resultado na equação $\int \frac{-2}{(u-1)^2} du = \int \frac{1}{x} dx$ temos que $\frac{2}{u-1} = \ln(x) + c$, ou, $\frac{2}{xy-1} = \ln(x) + c$.

2. Encontrar uma curva que passa pelo ponto $(0,-2)$ de modo que o coeficiente angular da reta tangente em qualquer ponto da curva é igual ao triplo do valor da ordenada do mesmo ponto.

Solução:

Seja $y = y(x)$ uma função cujo gráfico é a curva $(x, y(x))$. Pelo enunciado do exercício, temos que $y' = 3y$ e como a curva passa pelo ponto $(0,-2)$, então temos que $y(0) = -2$.

Então resolvemos a EDO $y' = 3y$ que é de variáveis separáveis: $\frac{dy}{dx} = 3y$ que implica que $\frac{1}{3y}dy = dx$ e integrando, resulta em $\int \frac{1}{3y}dy = \int dx + c$, ou, $\frac{1}{3}\ln|y| = x + c$, que dá a família de funções $y = e^{3x} \cdot e^{3c}$, ou, $y = ke^{3x}$, com k constante. Impondo a condição inicial $y(0) = -2$, substituímos $x = 0$ e $y = -2$ em $y = ke^{3x}$ e temos $-2 = ke^{0}$, que dá $k = -2$. Enfim, substituindo o valor de k, a solução fica $y = -2e^{3x}$

3. Uma partícula de massa 1 g se desloca ao longo do eixo x devido a uma força horizontal diretamente proporcional ao tempo, calculado desde o instante $t = 0$ e inversamente proporcional à velocidade da partícula. No instante $t = 10$ s, a velocidade é 50 cm/s e a força, 4 dinas. Determine a velocidade da partícula após um minuto de iniciado o movimento.

Solução:

Da segunda lei de Newton temos $m \cdot a = F(t)$, onde m é a massa da partícula, a é sua aceleração e $F(t)$ é uma força agindo sobre a partícula. Lembrando que $a = \frac{dv}{dt}$, onde v é a velocidade da partícula, temos que $m \cdot \frac{dv}{dt} = k\,\frac{t}{v}$, onde k é uma constante de proporcionalidade. Então $F(t) = k\frac{t}{v}$, e pelas condições dadas, a igualdade é válida para $t = 10$, $v = 50$ e $F = 4$, e então $4 = k\frac{10}{50}$, que dá $k = 20$. A EDO fica $\frac{dv}{dt} = 20\,\frac{t}{v}$ que é de variáveis separáveis, que toma a forma $v\,dv = 20t\,dt$, e ao integrar $\int v\,dv = \int 20t\,dt + c$, que resulta em $\frac{v^2}{2} = 10t^2 + c$. Agora, no instante $t = 10$ s, a velocidade é 50 cm/s, e substituindo na igualdade $\frac{v^2}{2} = 10t^2 + c$ temos $\frac{50^2}{2} = 10 \cdot 10^2 + c$, que dá $c = 250$. Assim, $\frac{v^2}{2} = 10t^2 + 250$. Se $t = 60$, então $\frac{v^2}{2} = 10 \cdot 60^2 + 250$, e $v^2 = 72500$, que dá $v = 50\sqrt{29}\ cm/s$.

4. Um navio retarda seu deslocamento devido à ação da resistência da água, que é proporcional à velocidade do barco. A velocidade inicial do navio é 10 m/s, e após 5 s, a velocidade é 8 m/s. Determine o instante em que a velocidade é 1 m/s.

Solução:

Pela segunda lei de Newton temos que $m \cdot a = kv$ e como $a = \frac{dv}{dt}$, temos que $m \cdot \frac{dv}{dt} = kv$. Separando as variáveis temos que $\frac{1}{v}dv = \frac{k}{m}dt$ e integrando $\int \frac{1}{v}dv = \int \frac{k}{m}dt + c$ temos que $\ln(v) = \frac{k}{m}t + c$, ou, $v = Ke^{\frac{k}{m}t}$. Se $t = 0$, $v = 10$, que significa $10 = Ke^{0}$, ou seja, $K = 10$. Assim, $v = 10e^{\frac{k}{m}t}$. Agora, se $t = 5$, $v = 8$, que significa $8 = 10e^{\frac{k}{m}5}$, ou seja, $\frac{k}{m} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)$. Enfim, $v = 10e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)t}$, ou, $v = 10\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}}$.

Se $v=1$, então $1=10\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}}$, ou seja, $\frac{1}{10}=e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)t}$, ou, $\ln\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)t$, que resulta em $t=5\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.

5. De acordo com a lei de esfriamento de Newton, a taxa instantânea de esfriamento de um corpo no ambiente é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente. Se a temperatura do ambiente é 20º C e um corpo esfria em 20 min de 100º C até 60º C, determine em que instante a temperatura será 30º C.

Solução:

Se T é a temperatura do corpo e $T_0=20$ é a temperatura ambiente, a lei de esfriamento de Newton afirma que $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$, sendo esta última uma EDO de variáveis separáveis, que pode ser resolvida se escrita na forma $\frac{1}{T-T_0}dT=k\,dt$, e integrando resulta em $\ln(T-T_0)=kt+c$, ou, $T=T_0+K_0e^{kt}$. Agora, se $t=0$, $T=100$, e assim, $100=T_0+K_0e^0$, e $K_0=100-T_0$. Então $T=T_0+(100-T_0)e^{kt}$. E quando $t=20$, $T=60$, ou seja, $60=T_0+(100-T_0)e^{20k}$, ou, $k=\frac{1}{20}\ln\left(\frac{60-T_0}{100-T_0}\right)$. Lembrando que $T_0=20$, temos que $k=\frac{1}{20}\ln\left(\frac{60-T_0}{100-T_0}\right)=\frac{1}{20}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{20}\ln(2)$. Logo, a temperatura está dada por $T=20+80e^{-\frac{t}{20}\ln(2)}$, e quando $T=30$, a temperatura fica $30=20+80e^{-\frac{t}{20}\ln(2)}$, temos que $\ln\left(\frac{1}{8}\right)=-\frac{t}{20}\ln(2)$, ou, $t=-20\cdot\frac{(-3\ln(2))}{\ln(2)}$, e assim, $t=60$ min.

6. O rádio radiativo tem uma vida média de aproximadamente 1599 anos. Calcule a porcentagem que sobra de uma quantidade dada após 100 anos.

Solução:

A lei de decaimento radiativo afirma que se y é a quantidade de rádio radiativo então $\frac{dy}{dt}=ky$ para certa constante de proporcionalidade k. Essa EDO é de variáveis separáveis, $\frac{1}{y}dy=k\,dt$, e integrando fica $\int\frac{1}{y}dy=\int k\,dt+c$, que dá $\ln(y)=kt+c$, ou equivalentemente, $y=K_0e^{kt}$. Se $t=1599$, $y=\frac{1}{2}K_0$, e assim, $\frac{1}{2}K_0=K_0e^{1599k}$, do qual resulta $k=-\frac{1}{1599}\ln(2)$. Assim, $y=K_0e^{-\frac{t}{1599}\ln(2)}$. Se $t=100$, $y=K_0{}^{-\frac{100}{1599}\ln(2)}\approx 0{,}957577K_0$. A porcentagem que sobra após 100 anos é $95{,}7577\%$.

7. A datação por carbono-14 supõe que o dióxido de carbono na Terra hoje tem o mesmo conteúdo radiativo que tinha séculos atrás. Se isto for verdade, a quantidade de ${}^{14}C$ absorvido por uma árvore que cresceu vários séculos atrás seria a mesma que a absorvida por uma árvore que cresce hoje. Uma amostra de carvão vegetal antigo contem 15% da quantidade de ${}^{14}C$ de uma amostra de carvão moderno. Determine

quanto tempo atrás foi queimada a árvore para produzir a amostra antiga. (A vida média do ${}^{14}C$ é 5715 anos)

Solução:

A lei de decaimento radiativo afirma que se y é a quantidade de carbono 14, então $\frac{dy}{dt} = ky$ para certa constante de proporcionalidade k. Essa EDO é de variáveis separáveis, $\frac{1}{y}dy = k\,dt$, e tem solução $y = K_0 e^{kt}$. Se $t = 5715$, $y = \frac{1}{2}K_0$, e assim, $\frac{1}{2}K_0 = K_0 e^{5715k}$, do qual resulta $k = -\frac{1}{5715}\ln(2)$. A quantidade de carbono 14 fica estabelecida como $y = K_0 e^{-\frac{t}{5715}\ln(2)}$ Se a quantidade achada na amostra antiga é $0{,}15K_0$, então temos que $0{,}15K_0 = K_0 e^{-\frac{t}{5715}\ln(2)}$, do qual resulta que $t = -5715\frac{\ln(0{,}15)}{\ln(2)}$ anos. Isto dá $t \approx 15642$ anos.

8. Descreva as trajetórias ortogonais à família de curvas (pode utilizar programas computacionais algébricos)

   a. $y = \frac{c}{x}$;

Solução:

Se a EDO da família de curvas é $\Phi(x, y, y') = 0$, então a EDO da família de curvas ortogonais é $\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$. Aqui, substitui-se y' por $-\frac{1}{y'}$ na EDO da família de curvas.

No caso que $y = \frac{c}{x}$, temos que $y' = -\frac{c}{x^2}$ e como $c = xy$, a EDO da família de curvas fica $y' = -\frac{xy}{x^2}$, ou, $y' = -\frac{y}{x}$.

A EDO da família de curvas ortogonais fica $-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}$, ou seja, $y' = \frac{x}{y}$ que é uma EDO de variáveis separáveis, e fica $y\,dy = x\,dx$ que integrando dá $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$, ou, $y^2 = x^2 + k$ que é uma família de hipérboles.

   b. $x^2 + y^2 = c$;

Como $x^2 + y^2 = c$, temos que $2x + 2y\,y' = 0$, e a EDO da família de curvas fica $y' = -\frac{2x}{2y}$, ou, $y' = -\frac{x}{y}$.

A EDO da família de curvas ortogonais fica $-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}$, ou seja, $y' = \frac{y}{x}$ que é uma EDO de variáveis separáveis, e fica $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$ que integrando dá $\ln(y) = \ln(x) + c$, ou, $y = kx$ que é uma família de retas.

   c. $x^2 = cy$;

   d. $y^2 = cx^3$;

e. $y = ce^{x}$.

9. Resolva as equações diferenciais a seguir sabendo que são equações homogêneas ou reduzíveis a homogêneas:

a. $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$. Então temos que $y = xu$ e derivando em relação a x conseguimos $y' = xu' + u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$ que resulta em $4x - 3xu + (2xu - 3x)(xu' + u) = 0$. Cortando x em todos os termos da EDO temos $4 - 3u + (2u - 3)(xu' + u) = 0$, ou seja, $xu' + u = \frac{3u - 4}{2u - 3}$, ou, $xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3} - u = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3}$, ou, $x\frac{du}{dx} = -2\frac{u^2 - 3u + 4}{2u - 3}$, que, separando as variáveis fica $-\frac{1}{2}\frac{2u - 3}{u^2 - 3u + 4}du = \frac{1}{x}dx$, e integrando, $\int -\frac{1}{2}\frac{2u - 3}{u^2 - 3u + 4}du = \int \frac{1}{x}dx + c$.

Temos que $\int -\frac{1}{2}\frac{2u - 3}{u^2 - 3u + 4}du = -\frac{1}{2}\ln(u^2 - 3u + 4)$.

Logo, a expressão $\int -\frac{1}{2}\frac{2u - 3}{u^2 - 3u + 4}du = \int \frac{1}{x}dx + c$ fica $-\frac{1}{2}\ln(u^2 - 3u + 4) = \ln(x) + c$.

Lembrando que $u = \frac{y}{x}$, a última igualdade fica

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 4\right) = \ln(x) + c\text{, ou,}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2 - 3xy + 4x^2}{x^2}\right) = \ln(x) + c\text{, ou,}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(y^2 - 3xy + 4x^2) + \ln(x) = \ln(x) + c\text{, ou,}$$

$$y^2 - 3xy + 4x^2 = K\text{, com } K = e^{-2c}.$$

b. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$. Então temos que $y = xu$ e $y' = xu' + u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ que resulta em $x(xu' + u) = xu + \sqrt{x^2u^2 - x^2}$. Cortando x em todos os termos da EDO temos $xu' + u = u + \sqrt{u^2 - 1}$, ou seja, $xu' = \sqrt{u^2 - 1}$, ou, $x\frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 1}$, que, separando as variáveis, fica $\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}du = \frac{1}{x}dx$, e integrando, $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}du = \int \frac{1}{x}dx + c$.

Temos que $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}du = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$.

Logo, a expressão $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}du = \int \frac{1}{x}dx + c$ fica $\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right) = \ln(x) + c$. Lembrando que $u = \frac{y}{x}$, a última igualdade fica

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}\right)=\ln(x)+c\text{, ou,}$$

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)-\ln(x)=\ln(x)+c\text{, ou,}$$

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)=\ln(x^2)+c\text{, ou,}$$

$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Kx^2\text{, com } K=e^c\text{, ou,}$$

$$\sqrt{y^2-x^2}=Kx^2-y\text{, ou,}$$

$$y^2-x^2=K^2x^4-2Kx^2y+y^2\text{, ou,}$$

$$-x^2=K^2x^4-2Kx^2y\text{, ou,}$$

$$-1=K^2x^2-2Ky\text{, ou,}$$

$$y=\frac{K^2x^2+1}{2K}.$$

c. $4x^2-xy+y^2+(x^2-xy+4y^2)y'=0$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u=\frac{y}{x}$. Então temos que $y=xu$ e $y'=xu'+u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $4x^2-xy+y^2+(x^2-xy+4y^2)y'=0$, que resulta em $4x^2-x^2u+x^2u^2+(x^2-x^2u+4x^2u^2)\cdot(xu'+u)=0$. Cortando x^2 em todos os termos da EDO temos $4-u+u^2+(1-u+4u^2)\cdot(xu'+u)=0$, ou seja,

$$xu'=-\frac{4-u+u^2}{1-u+4u^2}-u\text{, ou,}$$

$$xu'=-\frac{4-4u^3}{1-u+4u^2}\text{, ou,}$$

$x\frac{du}{dx}=-\frac{4+4u^3}{1-u+4u^2}$, e após separar as variáveis fica $-\frac{1}{4}\frac{1-u+4u^2}{1+u^3}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}dx$, e integrando, $-\frac{1}{4}\int\frac{1-u+4u^2}{1+u^3}\,du=\int\frac{1}{x}dx+c$.

Temos que

$$-\frac{1}{4}\int\frac{1-u+4u^2}{1+u^3}\,du=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{2}{u+1}+\frac{2u-1}{u^2-u+1}\right)du=-\frac{1}{2}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln(u^2-u+1).$$

Logo, a expressão $-\frac{1}{4}\int\frac{1-u+4u^2}{1+u^3}\,du=\int\frac{1}{x}dx+c$ fica

$$-\frac{1}{2}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln(u^2-u+1)=\ln(x)+c.$$

Lembrando que $u=\frac{y}{x}$, a última igualdade fica

$$-\frac{1}{2}\ln(\frac{y}{x}+1)-\frac{1}{4}\ln(\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1)=\ln(x)+c\text{, ou,}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(y+x)+\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(y^2-xy+x^2)+\frac{1}{2}\ln(x)=\ln(x)+c\text{, ou,}$$

$$2\ln\left(y+x\right)+\ln(y^2-xy+x^2)=4c\text{, ou,}$$

$$\left(y+x\right)^2(y^2-xy+x^2)=K\text{, com } K=e^{4c}.$$

d. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$. Então temos que $y = xu$ e $y' = xu' + u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$ que resulta em $x(xu' + u) = \sqrt{x^2u^2 - x^2}$. Cortando x em todos os termos da EDO temos $xu' + u = \sqrt{u^2 - 1}$, ou seja, $xu' = \sqrt{u^2 - 1} - u$, ou, $x\frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 1} - u$, que, separando as variáveis, fica $\frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u}du = \frac{1}{x}dx$, e integrando, $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u}du = \int \frac{1}{x}dx + c$.

Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u}du &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - 1} + u}{\sqrt{u^2 - 1} + u}du = -\int \left(\sqrt{u^2 - 1} + u\right)du \\ &= -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{u^2 - 1} + u\right)\end{aligned}.$$

Logo, a expressão $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} - u}du = \int \frac{1}{x}dx + c$ fica

$$-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{u^2 - 1} + u\right) = \ln(x) + c.$$

Lembrando que $u = \frac{y}{x}$, a última igualdade fica

$$-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} + \frac{y}{x}\right) = \ln(x) + c, \text{ ou,}$$

$$-y^2 - y\sqrt{y^2 - x^2} + x^2\ln\left(\sqrt{y^2 - x^2} + y\right) = 3x^2\ln(x) + cx^2.$$

e. $(y^4 - 3x^2)\,dy = -xy\,dx$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{y^2}{x}$. Então temos que $y^2 = xu$ e $2yy' = xu' + u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $(y^4 - 3x^2)\,y' = -xy$ que resulta em $(x^2u^2 - 3x^2)\,2yy' = -2xy^2$, ou, $(x^2u^2 - 3x^2)(xu' + u) = -2x^2u$ Cortando x^2 em todos os termos da EDO temos $xu' + u = -\frac{2u}{u^2 - 3}$, ou seja, $xu' = -\frac{2u}{u^2 - 3} - u$, ou, $x\frac{du}{dx} = -\frac{u^3 - u}{u^2 - 3}$, que, separando as variáveis, fica $-\frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = \frac{1}{x}dx$, e integrando, $-\int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = \int \frac{1}{x}dx + c$.

Temos que $-\int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = -\int \left(-\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} + \frac{3}{u}\right)du = \ln(u - 1) + \ln(u + 1) - 3\ln(u)$.

Logo, a expressão $-\int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = \int \frac{1}{x}dx + c$ fica

$$\ln(u - 1) + \ln(u + 1) - 3\ln(u) = \ln(x) + c.$$

Lembrando que $u = \dfrac{y^2}{x}$, a última igualdade fica

$$\ln(\frac{y^2}{x} - 1) + \ln(\frac{y^2}{x} + 1) - 3\ln(\frac{y^2}{x}) = \ln(x) + c \text{, ou,}$$

$$\ln\left[\frac{(y^2 - x)(y^2 + x)}{y^6}\right] = c \text{, ou,}$$

$$\frac{(y^2 - x)(y^2 + x)}{y^6} = K \text{, com } K = e^c .$$

f. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$;

Solução:

Fazemos a mudança de variável $u = \dfrac{y}{x}$. Então temos que $y = xu$ e $y' = xu' + u$. Estas igualdades são substituídas na EDO $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$ que resulta em $\left(xu - x(xu' + u)\right)^2 = x^2 + x^2u^2$. Então $x^4\left(u'\right)^2 = x^2(1 + u^2)$, ou seja, $x^2\left(u'\right)^2 = 1 + u^2$, ou, $\dfrac{du}{dx} = \pm\dfrac{1}{x}\sqrt{1 + u^2}$, que, separando as variáveis, fica $\dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \pm\dfrac{1}{x}dx$, e integrando, $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \pm\int\frac{1}{x}dx + c$.

Temos que $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$.

Logo, a expressão $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \pm\int\frac{1}{x}dx + c$ fica

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \pm\ln(x) + c .$$

Lembrando que $u = \dfrac{y}{x}$, a última igualdade fica

$$\ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}\right) = \pm\ln(x) + c \text{, ou,}$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = \pm Kx \text{, ou,}$$

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = \pm Kx^2 \text{, ou,}$$

$$y \pm Kx^2 = -\sqrt{y^2 + x^2} \text{, ou,}$$

$$y^2 \pm 2Kx^2y + K^2x^4 = y^2 + x^2 \text{, ou,}$$

$$y = \pm\frac{x^2 - K^2x^4}{2Kx^2} \text{, ou,}$$

$$y = \pm\frac{1 - K^2x^2}{2K}$$

g. $(3x + y - 2)\,dx + (x - 1)\,dy = 0$;

h. $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$;

i. $(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1})\,dx + 2x\,dy = 0$;

j. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$

10. Utilizando coordenadas retangulares, determine a forma do espelho se os raios que saem de um ponto fixo, quando refletidos são paralelos a uma direção dada.
11. Resolva as equações diferenciais a seguir, sabendo que elas são exatas ou reduzíveis a elas mediante o uso do fator integrante

a. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

Solução:

Aqui, $M = x(2x^2 + y^2)$ e $N = y(x^2 + 2y^2)$. Então $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, que confirma que e EDO é exata.

Agora, integramos M em relação a x:

$$\Phi = \int x(2x^2 + y^2)dx + g(y) = \int \left(2x^3 + xy^2\right)dx + g(y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + g(y).$$

Logo, derivamos a última igualdade em relação a y: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 y + g'(y)$ que deve ser igual a $N = y(x^2 + 2y^2)$. Comparando temos que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 y + g'(y) = y(x^2 + 2y^2) = N$, o que conduz à igualdade $g'(y) = 2y^3$, e então $g(y) = \int 2y^3\, dy = \dfrac{y^4}{2}$.

Assim, a função potencial fica $\Phi = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^4}{2}$ e a solução da EDO é $\Phi = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^4}{2} = c$, ou, $x^4 + x^2y^2 + y^4 = K$.

b. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$;

Solução:

Aqui, $M = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ e $N = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}$. Então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2},$$

que confirma que e EDO é exata.

Agora, para conseguir a função potencial, integramos M em relação a x:

$$\Phi = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + g(y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(x) + \frac{x}{y} + g(y).$$

Logo, derivamos a última igualdade em relação a y:

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{y^2} + g'(y)$ que deve ser igual a $N = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}$.

Comparando temos que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{y^2} + g'(y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2} = N$, o que conduz à igualdade $g'(y) = \dfrac{1}{y}$, e então $g(y) = \int \dfrac{1}{y} dy = \ln(y)$.

Assim, a função potencial fica $\sqrt{x^2+y^2}+\ln(x)+\frac{1}{y}+\ln(y)$ e a solução da EDO é $\Phi=\sqrt{x^2+y^2}+\ln(x)+\frac{x}{y}+\ln(y)=c$.

c. $\left(\frac{\text{sen}(2x)}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}\right)dy=0$;

Solução:

Aqui, $M=\frac{\text{sen}(2x)}{y}+x$ e $N=y-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}$. Então

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\text{sen}(2x)}{y^2} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{y^2},$$

que confirma que e EDO é exata.

Agora, para conseguir a função potencial, integramos M em relação a x:

$$\Phi=\int\left(\frac{\text{sen}(2x)}{y}+x\right)dx+g(y)=-\frac{\cos(2x)}{2y}+\frac{x^2}{2}+g(y).$$

Logo, derivamos a última igualdade em relação a y:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\cos(2x)}{2y^2}+g'(y)=\frac{1-2\text{sen}^2(x)}{2y^2}+g'(y)=\frac{1}{2y^2}-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}+g'(y)$$

que deve ser igual a $N=y-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}$.

Comparando temos que $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{1}{2y^2}-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}+g'(y)=y-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}=N$, o que conduz à igualdade $g'(y)=y-\frac{1}{2y^2}$, e então $g(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}$.

Assim, a função potencial fica $\Phi=\frac{1}{2y^2}-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}$ e a solução da EDO é $\Phi=\frac{1}{2y^2}-\frac{\text{sen}^2(x)}{y^2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}=c$.

d. $(3x^2-2x-y)\,dx+(2y-x+3y^2)\,dy=0$;

Solução:

Aqui, $M=3x^2-2x-y$ e $N=2y-x+3y^2$. Então $\frac{\partial M}{\partial y}=-1$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$, que confirma que e EDO é exata.

Agora, integramos M em relação a x:

$$\Phi=\int(3x^2-2x-y)dx+g(y)=x^3-x^2-xy+g(y).$$

Logo, derivamos a última igualdade em relação a y: $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-x+g'(y)$ que deve ser igual a $N=2y-x+3y^2$. Comparando temos que $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-x+g'(y)=2y-x+3y^2=N$, o que conduz à igualdade $g'(y)=2y+3y^2$, e então $g(y)=\int(2y+3y^2)dy=y^2+y^3$.

Assim, a função potencial fica $\Phi=x^3-x^2-xy+y^2+y^3$ e a solução da EDO é $\Phi=x^3-x^2-xy+y^2+y^3=c$.

e. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)\right)dy=0$;

Solução:

Aqui, $M=\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}$ e $N=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)$. Então

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2x-\frac{1}{x} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2x-\frac{1}{x},$$

que confirma que e EDO é exata.

Agora, para conseguir a função potencial, integramos M em relação a x:

$$\Phi=\int\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+g(y)=y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln(x)+g(y).$$

Logo, derivamos a última igualdade em relação a y:

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)+g'(y)$ que deve ser igual a $N=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)$.

Comparando temos que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)+g'(y)=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln(x)=N$, o que conduz à igualdade $g'(y)=0$, e então $g(y)=\text{constante}$.

Assim, a função potencial fica $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln(x)$ e a solução da EDO é $\Phi=y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln(x)=c$.

f. $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$;

g. $2xy\ln(y)\,dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$;

h. $(3x+2y+y^2)\,dx+(x+4xy+5y^2)\,dy=0$;
fator integrante: $\mu=\varphi(x+y^2)$;

i. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0$;
fator integrante: $\mu=\varphi(y^2-x^2)$;

j. $(3y^2-x)\,dx+(2y^3-6xy)\,dy=0$;
fator integrante: $\mu=\varphi(x+y^2)$.