GABARITO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 01

Disciplina: Cálculo Operacional **Prof. Germán Suazo**

1. Verifique se as funções dadas são soluções das equações diferenciais:

   a. $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, \quad xy' + y = \cos(x)$;

Solução:

Como $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, temos que $y' = \dfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$.

Agora, $x\,y' = \dfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x}$, e portanto,

$$xy' + y = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{x\cos(x)}{x} = \cos(x),$$

que garante que $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ é solução de $xy' + y = \cos(x)$.

   b. $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, \quad (1 - x^2)y' + xy = 2x$;

Solução:

Como $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, temos que $y' = -\dfrac{cx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Então, $(1 - x^2)y = -\dfrac{cx(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -cx\sqrt{1 - x^2}$, e portanto,

$$(1 - x^2)y' + xy = -cx\sqrt{1 - x^2} + x \cdot \left(2 + c\sqrt{1 + x^2}\right) = -cx\sqrt{1 - x^2} + 2x + cx\sqrt{1 - x^2} = 2x,$$

que garante que $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$ é solução de $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

   c. $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x, \quad y' - y = e^{x + x^2}$;

Solução:

Como $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x$, temos que

$$y' = \frac{d}{dx}\left(e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(ce^x\right) = e^x \frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) + \int_0^x e^{t^2}\,dt \cdot \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + c\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$= e^x e^{x^2} + e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x$$

Então, $y' - y = e^x e^{x^2} + e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x - e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt - ce^x = e^x e^{x^2} = e^{x + x^2}$, que garante que $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x$ é solução de $y' - y = e^{x + x^2}$.

   d. $y = x\int_0^x \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt, \quad xy' = y + x\operatorname{sen}(x)$;

Solução:

Como $y = x\int_0^x \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$, temos que

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\right) = x\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\right) + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt = \operatorname{sen}(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$$

Então, $x\,y' = x\operatorname{sen}(x) + x\int_0^x \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$.

Por outro lado, $y + x\,\text{sen}(x) = x\int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t}\,dt + x\,\text{sen}(x)$.

Concluímos que $xy' = y + x\,\text{sen}(x)$, que garante que $y = x\int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t}\,dt$ é solução da equação $xy' = y + x\,\text{sen}(x)$.

e. $\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \text{sen}(t), \end{cases} \quad x + yy' = 0$.

Solução:

Neste caso, temos que $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)}$.

Assim, $y\,y' = -\text{sen}(t)\cdot\frac{\cos(t)}{\text{sen}(t),} = -\cos(t)$.

Enfim, $x + yy' = \cos(t) - \cos(t) = 0$, que garante que a função $y = y(x)$, definida parametricamente pelas equações $\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \text{sen}(t), \end{cases}$ é solução da EDO $x + yy' = 0$.

2. Verifique que as funções dadas são as soluções gerais das equações diferenciais indicadas:

a. $y = -\frac{1}{3x+c}, \quad y' = 3y^2$;

Solução:

Primeiro, verificamos que $y = -\frac{1}{3x+c}$, com c fixo, é solução da EDO $y' = 3y^2$. Temos que $y' = \frac{3}{(3x+c)^2}$. Por outro lado, $3y^2 = 3\cdot\left(-\frac{1}{3x+c}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{(3x+c)^2}$. Isto mostra que $y = -\frac{1}{3x+c}$ é solução de $y' = 3y^2$.

Para mostrar que a família de funções $y = -\frac{1}{3x+c}$ é solução geral da EDO, consideremos qualquer condição inicial $y(x_0) = y_0$. Substituindo $x = x_0$ e $y = y_0$ na solução, podemos tirar em evidência o valor de c como $c = -3x_0 - \frac{1}{y_0}$, para $y_0 \neq 0$. Mas, particularmente, se $y_0 = 0$, a forma $y = -\frac{1}{3x+c}$ de solução apresentada não contempla uma solução para esse caso.

Concluindo, podemos dizer que a solução $y = -\frac{1}{3x+c}$ serve quando a condição inicial do problema é da forma $y(x_0) = y_0 \neq 0$, mas não quando $y(x_0) = 0$.

b. $y = \sqrt{x^2 - cx}, \qquad (x^2 + y^2)\,dx - 3xy\,dy = 0$;

Solução:

Primeiro, verificamos que $y = \sqrt{x^2 - cx}$, com c fixo, é solução da EDO $(x^2 + y^2)\,dx - 3xy\,dy = 0$. Outra forma de escrever a EDO é $(x^2 + y^2) - 3xy\frac{dy}{dx} = 0$, ou,

$(x^2+y^2)=3xy\dfrac{dy}{dx}$. Utilizaremos esta última expressão para fins de verificação. Temos que $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-c}{2\sqrt{x^2-cx}}$. Agora, $3xy\dfrac{dy}{dx}=3x\sqrt{x^2-cx}\,\dfrac{2x-c}{2\sqrt{x^2-cx}}=\dfrac{3x(2x-c)}{2}$.

Por outro lado, $x^2+y^2=x^2+x^2-cx=2x^2-cx$.

Como as expressões para $3xy\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x(2x-c)}{2}$ e $x^2+y^2=2x^2-cx$ não são idênticas, podemos concluir que $y=\sqrt{x^2-cx}$ **não** é solução da EDO $(x^2+y^2)dx-3xy\,dy=0$. Por este motivo, $y=\sqrt{x^2-cx}$ não pode ser solução geral.

c. $x=ye^{cy+1}$, $\quad y'=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$;

Solução:

Primeiro, verificamos que $x=ye^{cy+1}$, com c fixo, é solução da EDO $y'=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$.

Outra forma de escrever a EDO é $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$, ou, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x(\ln x-\ln y)}{y}=\dfrac{x}{y}\cdot\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Utilizaremos esta última expressão para fins de verificação.

Temos que $\dfrac{dx}{dy}=(1+cy)\cdot e^{cy+1}$.

Por outro lado,

$$\frac{y}{x(\ln x-\ln y)}=\frac{x}{y}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ye^{cy+1}}{y}\cdot\ln\left(\frac{ye^{cy+1}}{y}\right)=e^{cy+1}\ln\left(e^{cy+1}\right)=e^{cy+1}(1+cy).$$

Como as expressões para $\dfrac{dx}{dy}$ e $\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$ são idênticas, então $x=ye^{cy+1}$ é solução de $y'=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$.

Para mostrar que a família de funções $x=ye^{cy+1}$ é solução geral da EDO $y'=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$, consideremos qualquer condição inicial $y(x_0)=y_0$. Substituindo $x=x_0$ e $y=y_0$ na solução, podemos tirar em evidência o valor de c como $c=\dfrac{1}{y_0}\cdot\left(-1+\ln\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)\right)$, para $x_0\neq 0$ e $y_0\neq 0$. Mas, particularmente, se $x_0=0$ ou $y_0=0$, a forma $x=ye^{cy+1}$ de solução apresentada não contempla uma solução para esses casos.

Concluindo, podemos dizer que a solução $y=-\dfrac{1}{3x+c}$ serve apenas quando a condição inicial do problema é da forma $y(x_0)=y_0$, com $x_0\neq 0$ e $y_0\neq 0$.

d. $y^3=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C}{x^3}$, $\quad xy^2\,dy+y^3\,dx=\dfrac{dx}{x}$;

Solução:

Primeiro, verificamos que $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$, com c fixo, define uma curva solução da EDO $xy^2\,dy + y^3\,dx = \frac{dx}{x}$. Outra forma de escrever a EDO é $xy^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - y^3$. Utilizaremos esta última expressão para fins de verificação.

Aqui utilizaremos derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ da expressão $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$:

Temos que $3y^2 \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3C}{x^4}$, e assim, $xy^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{x} - \frac{3C}{x^3} \right) = -\frac{1}{3x} - \frac{C}{x^3}$.

Por outro lado, de $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$, temos que $\frac{1}{x} - y^3 = -\frac{C}{x^3}$.

Como as expressões obtidas para $xy^2 \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3x} - \frac{C}{x^3}$ e $\frac{1}{x} - y^3 = -\frac{C}{x^3}$, não são idênticas, podemos concluir que $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$ não define uma curva solução da EDO $xy^2\,dy + y^3\,dx = \frac{dx}{x}$.

e. $y^2 + 2cx = c^2$, $\quad y(y')^2 + 2xy' = y + 1$;

Solução:

Primeiro, verificamos que $y^2 + 2cx = c^2$, com c fixo, define uma curva solução da EDO $y(y')^2 + 2xy' = y + 1$.

Aqui utilizaremos derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ da expressão $y^2 + 2cx = c^2$:

Temos que $2y\frac{dy}{dx} + 2c = 0$, e então , e assim, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{y}$. Logo,

$$y(y')^2 + 2xy' = y \cdot \left(-\frac{c}{y} \right)^2 + 2x \cdot \left(-\frac{c}{y} \right) = \frac{c^2}{y} - \frac{2cx}{y} = \frac{y^2 + 2cx}{y} - \frac{2cx}{y} = y.$$

A última expressão não é idêntica a $y + 1$.

Como a expressão para $y(y')^2 + 2xy' = y$ não é idêntica a $y + 1$, podemos concluir que $y^2 + 2cx = c^2$ não define uma curva solução da EDO $y(y')^2 + 2xy' = y + 1$.

f. $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(c\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$; $\quad (x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

Solução:

Primeiro, verificamos que $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(c\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$, com c fixo, define uma curva solução da EDO $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

Aqui utilizaremos derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ da expressão $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(c\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) - \ln(c) = 0$:

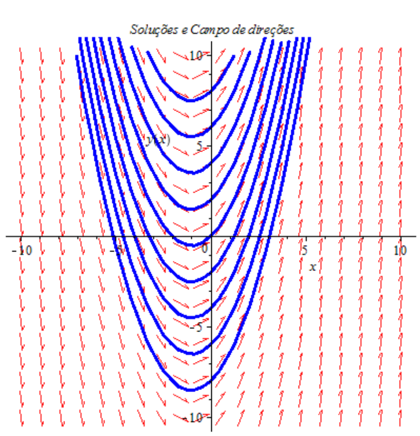
Temos que $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$, e então $\dfrac{\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=0$, ou seja, $\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2}-\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=0$ e assim, $\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y-x-y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=0$. Isto último significa que $x\dfrac{dy}{dx}-y-x-y\dfrac{dy}{dx}=0$, que na forma de Leibniz, fica $xdy-ydx-xdx-ydy=0$, e agrupando termos semelhantes $(x-y)dy-(x+y)dx=0$, que é equivalente a EDO dada: $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$.

Para mostrar que a família de curvas dada por $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-\ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$ é solução geral da EDO $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$, consideremos qualquer condição inicial $y(x_0)=y_0$. Substituindo $x=x_0$ e $y=y_0$ na solução $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-\ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$, podemos tirar em evidência o valor de c como $c=\dfrac{e^{\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)}}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}$, para $x_0\neq 0$. Mas, particularmente, se $x_0=0$, a forma $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-\ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$ apresentada não contempla uma solução para esse caso.

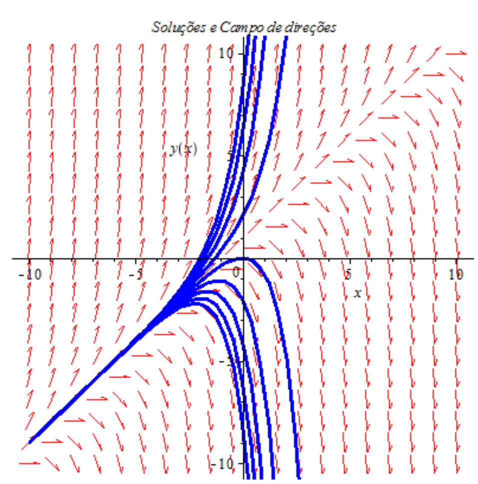
Concluindo, podemos dizer que a família de curvas $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-\ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$ fornece uma curva solução se a condição inicial do problema é da forma $y(x_0)=y_0$, com $x_0\neq 0$.

3. (Esta questão pode ser auxiliada pelo uso de algum recurso computacional) Aplicando o método das isóclinas, trace um esboço do campo de direções e das curvas integrais das equações diferenciais a seguir:
    a. $y'=x+1$;
    b. $y'=y-x$;
    c. $y'=-\dfrac{y}{x}$.

a.



b.



c.