



Cálculo D

Márcia Rosales Ribeiro Simch Germán Ramón Canahualpa Suazo Silvia Prietsch Wendt Pinto

Ministério da Educação Universidade Federal de Pelotas Curso de Licenciatura em Matemática a Distância



Obra publicada pela Universidade Federal de Pelotas

Reitor: Prof. Dr. Antonio Cesar Gonçalves Borges Vice-Reitor: Prof. Dr. Manoel Luiz Brenner de Moraes

Pró-Reitor de Extensão e Cultura: Prof. Dr. Luiz Ernani Gonçalves Ávila

Pró-Reitora de Graduação: Prof. Dra.Eliana Póvoas Brito

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: Prof. Dr. Manoel de Souza Maia

Pró-Reitor Administrativo: Eng. Francisco Carlos Gomes Luzzardi

Pró-Reitor de Planejamento e Desenvolvimento: Prof. Ms. Élio Paulo Zonta

Pró-Reitor de Recursos Humanos: Admin. Roberta Trierweiler Pró-Reitor de Infra-Estrutura: Mario Renato Cardoso Amaral

Pró-Reitora de Assistência Estudantil: Assistente Social Carmen de Fátima de Mattos do Nascimento

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. Antonio Jorge Amaral Bezerra

Prof. Dra. Isabel Porto Nogueira

Profa. Lígia Antunes Leivas

Prof. Dr. Renato Luiz Mello Varoto
Prof. Dr. Volmar Geraldo da Silva Nunes

Prof. Dr. Elomar Antonio Callegaro Tambara

Prof. Dr. José Justino Faleiros

Profa. Dra. Neusa Mariza Leite Rodrigues Felix

Prof. Ms. Valter Eliogabalos Azambuja

Prof. Dr. Wilson Marcelino Miranda

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Coordenador do Colegiado: Prof. Msc. Maurício Braga de Paula

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO

Celina Bastos Lemos Eduardo Harry Luersen Guilherme Camargo Mateus Dias Vilela Rodrigo Pizarro dos Santos

FOTOGRAFIA DA CAPA

Grande Hotel por Marcio Kinzeski



Editora e Gráfica Universitária R Lobo da Costa, 447 – Pelotas, RS – CEP 96010-150

Fone/fax: (53) 3227 8411 e-mail: editora@ufpel.edu.br

Diretor da Editora e Gráfica Universitária: Prof. Dr. Volmar Geraldo da Silva Nu-nes Gerência Operacional: Carlos Gilberto Costa da Silva

Impresso no Brasil Edição: 2009

ISBN: 978-85-7192-627-1 Tiragem: xxx exemplares

Dados de Catalogação na Fonte Internacional: (Bibliotecária Daiane Schramm – CRB-10/1881)

S588c Simch, Márcia Rosales Ribeiro

Cálculo D. / Márcia Rosales Ribeiro Simch; Germán Ramón Canahualpa Suazo; Silvia Prietsch Wendt Pinto. – Pelotas: Editora Universitária/UFPEL, Ministério da Educação, 2009.

196p. : il. ; gráfs. ; 21 cm.

ISBN 978-85-7192-627-1

1. Matemática. 2. Integração Múltipla. 3. Integrais de Linha. 4. Equações Diferenciais Ordinárias Lineares. I. Título. II. Suazo, Germán Ramón Canahualpa. III. Pinto, Silvia Prietsch Wendt.

CDD510

Material produzido pelo Laboratório de Ensino de Matemática a Distância - LEMAD Direitos autorais do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPel

Apresentação

A literatura didática para o ensino de matemática recebe, através dessa publicação, um novo fôlego em material preparado para o ensino. Trata-se de um novo caminho que começamos a trilhar, por onde estamos aprendendo a caminhar através da pesquisa, da discussão e, acima de tudo, da dedicação de nossos professores.

Esta obra nasce a partir do esforço conjunto de professores da Universidade Federal de Santa Catarina, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, da Universidade Estadual de Maringá, da Universidade Federal de Pelotas, de alunos e profissionais do Laboratório de Ensino de Matemática a Distância desta, que, apoiados com recursos do Ministério da Educação, aceitaram o desafio de preparar os materiais necessários para a execução do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPel.

Esperamos que este livro, que ora apresentamos, seja um instrumento útil nas mãos de alunos e professores e sirva de apoio para a melhoria da educação em nosso país.

Prof. Msc. Maurício Braga de Paula
Coordenador do Colegiado do Curso de Licenciatura
em Matemática a Distância

Este trabalho é parte integrante dos materiais de apoio ao estudo da disciplina Cálculo D, do currículo do CLMD - UFPel. A complementação destes textos acontece através do ambiente virtual de aprendizagem, vídeo-aulas e webconferências.

Algumas figuras neste texto foram geradas pelo autor Carl Madigan, Professor de Matemática da *Nova Scotia Agricultural College, Truro*, N.S., B2N 5E3 e estão disponíveis na seção *Application Center* do *User Community* na página http://www.maplesoft.com.

Alguns exercícios apresentados, para a fixação de conteúdos, são resultados de pesquisas bibliográficas.

Prof^a. Márcia Rosales Ribeiro Simch Prof. Gemán Ramón Canahualpa Suazo Prof^a. Silvia Prietsch Wendt Pinto

Sumário

Capítulo 1 - Integração Múltipla

1.1 - Introdução	10
1.2 - Integrais Duplas	11
1.2.1 - Integrais Duplas Sobre Regiões Retangulares	11
1.2.2 - Alguns Teoremas e Propriedades	15
1.2.3 - Algumas Interpretações para Integral Dupla	19
1.2.3.1 - Interpretação como Área	19
1.2.3.2 - Interpretação como Volume	
1.2.3.3 - Interpretação como Valor Médio	
1.2.3.4 - Interpretação Quando o Integrador é uma Função Densidade	
1.2.3.5 - Interpretação como Centro de Massa	
1.2.4 - Integrais Duplas em Regiões Não-Retangulares	
1.2.5 - Cálculo de Integrais Duplas	
1.2.6 - Integrais Duplas em Coordenadas Polares	
1.3 - Integrals Triplas	
1.3.1 - Introdução.	
1.3.2 - Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas.	
1.3.3 - Integrals Triplas em Coordenadas Gillidinas	
1.3 - Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas: Jacobianos	
1.4 - Mudança de Variaveis em integrais Multiplas. Jacobianos	40
Capítulo 2 – Integrais de Linha	
Oapitulo 2 - Integrals de Linha	
2.1 - Integrais de Funções Escalares sobre Curvas	52
2.2 - Cálculo de Integrais de Linha	
2.3 - Integrais de Linha em Relação a x, y e z	
2.4 - Integração de Funções Vetoriais sobre Curvas	
2.5 - Campos Vetorias Conservativos e Independentes do Caminho	
2.6 - Teorema de Green	
2.0 100101110 00 010011	
Canítula 2 - Equações Diferenciais Ordinários Lineares	
Capítulo 3 – Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	
3.1 - Noções gerais	68
3.2 - Equações Lineares de 1ª Ordem	
3.2.1 - Equações em que P(x)=0	
3.2.2 - Equações em que P(x)≠0 (caso geral)	
3.2.2.1 - Método de Bernoulli	
3.2.2.2 - Método de Lagrange (Método de Variação dos Parâmetros)	
3.2.3 - Equações Transformadas em Lineares	
3.3 - Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem	
3.4 - Determinação de uma Solução Linearmente Independente a Outra Solução não Trivial de uma ED	
3.5 - EDOLH com Coeficientes Constantes	
3.6 - Equações Lineares não Homogêneas	
3.6.1 - Determinação de Soluções Particulares de Equações não Homogêneas com Coeficientes Consta	
dos Coeficientes a Determinar	
3.6.2 - Determinação de Soluções Particulares de Equações não Homogêneas com Coeficientes Constanto	es pelo Método de
Variação dos Parâmetros	128
Apêndice I	
Integrais Impróprias	134
Apêndice II	
Integrais de Superfície	138

Apêndice III

Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	142
Apêndice IV	
Aspectos Históricos	148
Apêndice V	
Coletânea de Exercícios Resolvidos Disponíveis na Bibliografia	154



Integração Múltipla

1.1 Introdução

A noção de integral definida de função de uma variável pode ser estendida para funções de várias variáveis. Existem várias situações onde necessitamos integrar em mais de uma variável, por exemplo, no cálculo de áreas, volumes, centro de massa, centro geométrico, cálculo de grandezas escalares tais como trabalho e fluxo, e cálculo de grandezas vetoriais tais como os campos de velocidades e deslocamentos. Neste capítulo trataremos de integrais duplas (para funções de duas variáveis) e integrais triplas (para funções de três variáveis), com o objetivo principal de resolvermos problemas que requeiram tal habilidade. Porém, antes de estudarmos a integração múltipla, propriamente dita, vamos relacioná-la com alguns conhecimentos de derivadas parciais.

Exemplo 1.1.1: Determinar uma primitiva para a função $f(x, y) = 3x^3y^2$ em relação a x.

Ao admitirmos y como constante e integrarmos em relação a x, resulta:

$$\int 3x^3 y^2 dx = \frac{3}{4} x^4 y^2 + C,$$

onde C=C(y) é uma função que depende unicamente de y e faz o papel de constante de integração.

Assim, uma primitiva para $f(x,y) = 3x^3y^2$ pode ser, por exemplo, a função $F(x,y) = \frac{3}{4}x^4y^2 + C(y)$, com C(y) qualquer função (polinomial, exponencial, logarítmica, etc.) na variável y. Dessa forma temos:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^3y^2 + \frac{\partial C(y)}{\partial x} = 3x^3y^2 + 0 = 3x^3y^2 = f(x,y).$$

De forma análoga podemos dizer que uma primitiva de $f(x,y)=3x^3y^2$ em relação a y pode ser a função $G(x,y)=x^3y^3+e^x$, desde que $\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}=3x^3y^2+\frac{\partial (e^x)}{\partial y}=3x^3y^2=f(x,y)$.

Exemplo 1.1.2: Calcular
$$\int\limits_0^1 G(x)dx$$
, sendo $G(x)=\int\limits_x^{x+1} 3x^3y^2dy$.

Pelo "Teorema Fundamental do Cálculo" temos $G(x) = x^3(x+1)^3 - x^3(x^3)$, ou seja, $G(x) = 3x^5 + 3x^4 + x^3$. Temos G(x) é uma função só de x.

Agora, utilizando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$\int_{0}^{1} G(x)dx = \int_{0}^{1} \left(3x^{5} + 3x^{4} + x^{3}\right) dx = \left(\frac{3}{6}x^{6} + \frac{3}{5}x^{5} + \frac{1}{4}x^{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{27}{20}.$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

No exemplo anterior podemos usar o comando do "software MAPLE", para a conferência de resultado, conforme segue:

 $\frac{27}{20}$

Observação 1.1.1: O Exemplo 1.1.2, que poderia ter sido escrito na forma:

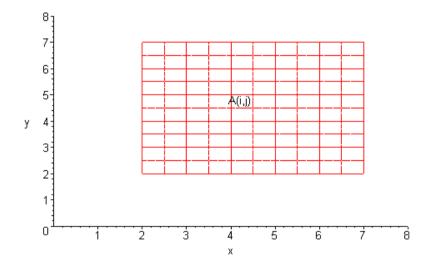
$$\int_{0}^{1} \left(\int_{x}^{x+1} 3x^{3}y^{2} dy \right) dx = \int_{0}^{1} \int_{x}^{x+1} 3x^{3}y^{2} dy dx = \frac{27}{20},$$

a qual é um exemplo de integral dupla.

1.2. Integrais Duplas

1.2.1 Integrais Duplas Sobre Regiões Retangulares

Seja z=f(x,y) uma função real limitada em uma região retangular $R=[a,b]\times[c,d]$. Inicialmente, vamos considerar uma partição regular (ou uniforme) de R, em n^2 sub-retângulos, conforme a figura abaixo,



onde $\Delta x=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$, $\Delta y=y_{j+1}-y_j=\frac{d-c}{n}$, com $i,j=0,\cdots,n-1$ e S_n uma soma de Riemann de f sobre R:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y = \sum_{i, i=0}^{n-1} f(u_i, v_j) \Delta A$$
,

com $\Delta {\bf A} = \Delta x \Delta y$ e $({\pmb u}_i\,, {\pmb v}_j\,)$ um ponto qualquer de um sub-retângulo de R .

A integral dupla de f(x,y) sobre R , denotada por $\displaystyle \int\int\limits_{p} f(x,y) dx dy$, é dada por

$$\iint_{R} f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} S_{n} = \lim_{n \to +\infty} S_{n},$$

desde que esse limite exista e seja único.

Observação 1.2.1.1: Dizemos que z=f(x,y) é uma função **limitada** em $D \subset \mathbf{R}^2$ se existe uma constante real positiva M tal que $|f(x,y)| \le M$, $\forall (x,y) \in D$.

Observação 1.2.1.2: Se a integral de z = f(x, y) sobre uma região R existe, então a função é dita **integrável** sobre R.

Observação 1.2.1.3: Toda função **contínua** numa região R é **integrável** sobre R. A demonstração dessa afirmativa será trabalhada em outras disciplinas do curso e pode ser vista em LIMA, E.L., **Curso de Análise**, Projeto Euclides, IMPA, 1981.

Observação 1.2.1.4: Se a região R é a união de duas regiões disjuntas R_1 e R_2 , então

$$\iint_{R} f(x,y) dx dy = \iint_{R_{1}} f(x,y) dx dy + \iint_{R_{2}} f(x,y) dx dy.$$

Observação 1.2.1.5: A observação anterior pode ser estendida para um número arbitrário (finito) de regiões.

Observação 1.2.1.6: A partição não necessariamente precisa ser regular, como inicialmente foi considerada, ou seja, podemos considerar uma partição $P = \left\{R_i, i = 1, \cdots, n\right\}$ interior de R, formada por sub-retângulos que podem ter áreas diferentes, para a qual denotaremos a norma (comprimento da maior de todas as diagonais das R_i) por $\|P\|$, a área de cada R_i por ΔA_i e $(u_i, v_j) \in R_i$. Nessas condições, a integral dupla de f(x, y) sobre R será definida por:

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \Delta A_i,$$

quando o limite existir e for único.

Exemplo 1.2.1.1: Calcular $\iint_R f(x,y) dx dy$, sendo $f(x,y) = x^2 + y^2$ definida na região retangular $R = [0,1] \times [0,1]$.

Como f(x,y) é contínua em R , então é integrável sobre essa região. Vamos considerar uma partição regular de

R tal que $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$. Pela definição dada em 1.2.1, temos:

$$\iint_{R} (x^2 + y^2) dx dy = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y.$$

O limite acima independe da escolha de (u_i, v_j) nos sub-retângulos da partição.

Se escolhermos $(u_i, v_j) = (x_{i+1}, y_{j+1}) \in R_i$, teremos $(u_i, v_j) = \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$. Assim:

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}\right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} \left(\frac{(i+1)^2}{n^2} + \frac{(j+1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)^2}{n^2}\right)$$

ou seja,

$$S_n = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{6n} + \frac{1}{2} + \frac{n}{3} \right) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2}.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3},$$

obtemos

$$\iint\limits_{R} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{2}{3}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Nesse exemplo também podemos usar alguns comandos do "software MAPLE", para a conferência de resultados, conforme segue:

> 2/(n)*sum(((i+1)/n)^2, i=0..n-1);

$$\frac{2\left(\frac{1}{6n} + \frac{1}{2} + \frac{n}{3}\right)}{n}$$

> limit(2/n*(1/(6*n)+1/2+1/3*n),n=infinity);

 $\frac{2}{3}$

Exemplo 1.2.1.2: Calcular $\iint_{R} (x+2y)dxdy$, com $R = [0,1] \times [0,2]$.

Observemos que f(x,y) = x + 2y é contínua em $R = [0,1] \times [0,2]$. Agora vamos considerar

$$x_i = \frac{i}{n}$$
, $i = 0, \dots, n$; $y_j = \frac{2j}{m}$, $j = 0, \dots, m$; $\Delta x = \frac{1}{n}$; $\Delta y = \frac{2}{m}$; $(u_i, v_j) = (x_{i-1}, y_{j-1}) \in R_j$.

Assim, teremos $f(u_i, v_j) = x_{i-1} + 2y_{j-1} = \frac{i-1}{n} + 2\frac{2(j-1)}{m}$.

Nessas condições, uma soma de Riemann da função sobre R será:

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{i-1}{n} + \frac{4(j-1)}{m} \right) \frac{1}{n} \frac{2}{m} = \frac{2}{nm} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i-1) + \frac{4}{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (j-1) \right],$$

então

$$S_{n,m} = \frac{2}{nm} \left[\frac{m}{n} \sum_{i=1}^{n} (i-1) + \frac{4n}{m} \sum_{j=1}^{m} (j-1) \right] = \frac{2}{nm} \left[\frac{m}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) + \frac{4n}{m} \left(\frac{m(m+1)}{2} - m \right) \right],$$

ou seja,

$$S_{n,m} = \frac{2}{n} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) + \frac{8}{m} \left(\frac{m+1}{2} - 1 \right).$$

O limite abaixo nos indica o resultado procurado:

$$\lim_{n,m\to+\infty} S_{n,m} = \lim_{n,m\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n} + \frac{4(m-1)}{m} \right) = 5.$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

A soma S_n pode ser escrita como:

$$S_n = \sum_{i,j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A, \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{n}.$$

ATIVIDADES

Lista 1.2.1 - Ver exemplo E1 no apêndice V.

1. Calcular $\iint_R f(x,y) dx dy$, sendo $f(x,y) = x^3 + y^3$ definida na região retangular $R = [0,1] \times [0,1]$,

considerando a partição uniforme $x_i = y_i = \frac{i}{n}, \ i = 0, \dots, n$.

Resp: $\frac{1}{2}$

2. Calcular $\iint_R (2x+y) dx dy$, com $R = [0,1] \times [0,2]$, considerando a partição $x_i = \frac{i}{n}, \ i = 0, \cdots, n$;

$$y_j = \frac{2j}{m}, \ j = 0, \dots, m$$

Resp: 4

3. Calcular $\iint\limits_R (4-x-y) dx dy$, com $R=[0,1] \times [0,2]$, considerando a partição $x_i=\frac{i}{n}, \ i=0,\cdots,n$;

$$y_j = \frac{2j}{m}, \ j = 0, \dots, m$$
. Verificar, também, que
$$\iint_R (4 - x - y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (4 - x - y) dx \right) dy$$
, sendo

que para integrar o lado direito, assume-se que as variáveis $x \, \, {
m e} \, \, y \,$ não dependem uma da outra.

Resp: 5

1.2.2 Alguns Teoremas e Propriedades

Teorema 1.2.2.1 - Teorema de Fubini

Se z = f(x, y) é contínua em $R = [a, b] \times [c, d]$, então:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dy \, dx = \iint\limits_c^b \int\limits_a^b f(x,y)dx \, dy.$$

Demonstração:

Vamos demonstrar que $\iint\limits_R f(x,y) dx dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y) dy \right] dx \ .$

Seja $F(x) = \int_{c}^{d} f(x, y) dy$ definida para cada $x \in [a, b]$.

Seja $P_1 = \{y_0, \cdots, y_n\}$ uma partição regular de ordem n para o intervalo [c,d] . Podemos escrever:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy.$$

Aplicando o teorema do valor médio para integrais de funções de uma variável no intervalo $[y_j, y_{j+1}], j = 0, \cdots, n-1$, temos

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy = f(x, Y_j) (y_{j+1} - y_j),$$

onde $Y_i \in [y_i, y_{i+1}]$.

Pela definição de integral de função de uma variável como limite de somas de Riemann, podemos escrever:

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(X_i)(x_{i+1} - x_i),$$

 $\text{com } P_2 = \left\{\!\! x_0, \cdots, x_n \right\} \text{ uma partição regular de ordem } n \text{ para o intervalo } [a,b] \text{ e } X_i \in [x_i, x_{i+1}] \text{ .}$

Tomando $(u_i, v_j) = (X_i, Y_i) \in R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$, temos:

$$F(X_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(u_i, v_j) (y_{j+1} - y_j).$$

Assim,

$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y) dx dy = \int_{a}^{b} F(x) dx =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(X_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} f(u_i, v_j)(y_{j+1} - y_j) \right] (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \iint_R f(x, y) dx dy.$$

De modo análogo podemos mostrar que $\iint\limits_R f(x,y) dx dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y) dy \right] dx \ .$

Observação 1.2.2.1: As integrais da forma $\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y) dy dx = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x,y) dx dy$ são denominadas

integrais iteradas. Os símbolos $\int_a^b f(x,y)dx$ e $\int_c^d f(x,y)dy$ denotam **integrais definidas parciais**; a primeira é

chamada **integral definida parcial em relação a** x (mantemos y fixo e integramos em relação a x) e a segunda é chamada **integral definida parcial em relação a** y (mantemos x fixo e integramos em relação a y).

Observação 1.2.2.2: O "Teorema de Fubini" nos fornece uma forma prática para o cálculo de integrais duplas através do cálculo de duas integrais sucessivas de funções de uma variável. Esse método será amplamente explorado na próxima seção.

Teorema 1.2.2.2: Seja z = f(x,y) uma função limitada em $R = [a,b] \times [c,d]$. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de z = f(x,y) pode ser descrito como uma união finita de gráficos de funções contínuas, então essa função é integrável sobre a região R.

Demonstração:

A demonstração deste teorema pode ser vista em APOSTOL, T.M., Cálculo, Reverte, 1982.

Observação 1.2.2.3: O "Teorema de Fubini" ainda é válido se a função é descontínua apenas numa união finita de gráficos de funções contínuas.

Propriedade 1.2.2.1 - Linearidade

Sejam $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ funções integráveis numa região R , c_1 e $c_2 \in \mathbf{R}$. Então, a função $c_1f_1+c_2f_2$ é integrável em R e

$$\iint_{R} [c_{1}f_{1}(x,y) + c_{2}f_{2}(x,y)] dxdy = c_{1}\iint_{R} f_{1}(x,y) dxdy + c_{2}\iint_{R} f_{2}(x,y) dxdy.$$

Observação 1.2.2.4: A propriedade de linearidade pode ser estendida para um número arbitrário finito de funções.

Propriedade 2.2.2 - Monotonicidade

Se $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ são funções integráveis numa região R e $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$, $\forall (x,y) \in R$, então

$$\iint_{\mathbb{R}} f_1(x, y) dx dy \ge \iint_{\mathbb{R}} f_2(x, y) dx dy.$$

Observação 1.2.2.5: Uma conseqüência imediata é:

$$f_1(x,y) \ge 0$$
 em $R \Rightarrow \iint_R f_1(x,y) dx dy \ge 0$ em R ,

utilizando a propriedade de monotonicidade com $f_2(x,y)=0$.

Propriedade 1.2.2.3 - Aditividade

Se a região R for subdividida em n sub-retângulos R_1, \dots, R_n e f(x, y) for integrável sobre cada R_i , $i=1, \dots, n$, então f(x, y) será integrável sobre R e

$$\iint\limits_R f(x,y)dady = \sum_{i=1}^n \iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

Observação 1.2.2.6: Na propriedade de aditividade, $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ com dois R_i sem pontos interiores em comum.

Teorema 1.2.2.3: Seja z = f(x, y) uma função contínua em $R = [a, b] \times [c, d]$.

Se
$$f(x,y) \le M = \max_R f \Rightarrow \iint_R f(x,y) dA \le \iint_R M dA = M(b-a)(d-c)$$
. Também, se
$$m = \min_R f \le f(x,y) \Rightarrow \iint_R m dA = m(b-a)(c-d) \le \iint_R f(x,y) dA.$$

Demonstração:

Lista de exercícios 1.2.2

Teorema 1.2.2.4 - Teorema do Valor Médio

Se f(x,y) é integrável em uma região $R=[a,b] \times [c,d]$, então existe $\,p_0 \in R\,$ tal que

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = f(p_0)(b-a)(d-c).$$

Demonstração:

Lista de exercícios 1.2.2

Nos exemplos abaixo são calculadas integrais duplas, sobre regiões retangulares, com uso de propriedades.

Exemplo 1.2.2.1: f(x, y) = x + 2y; $R = [0,1] \times [0,2]$

$$\iint_{R} (x+2y)dA = \int_{0}^{2} \left[\int_{0}^{1} (x+2y)dx \right] dy = \int_{0}^{2} \left(\frac{x^{2}}{2} + 2yx \right) \Big|_{0}^{1} dy$$
$$= \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2} + 2y \right) dy = \left(\frac{y}{2} + 2\frac{y^{2}}{2} \right) \Big|_{0}^{2} = \left(\frac{y}{2} + y^{2} \right) \Big|_{0}^{2} = \left(\frac{2}{2} + 2^{2} \right) - (0) = 5$$

Exemplo 1.2.2.2: $f(x, y) = e^y sen(2x)$ $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.

$$\iint_{R} e^{y} sen(2x) dA = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{0}^{1} e^{y} sen(2x) dy \right] dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{y} sen(2x) \Big|_{0}^{1} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (e-1) sen(2x) dx =$$

$$= -(e-1) \frac{\cos(2x)}{2} \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = (e-1).$$

Exemplo 1.2.2.3: $\iint_{R} y \ sen(xy) dA$, $R = [1,2] \times [0,\pi]$.

$$\iint_{R} y \, sen(xy) dA = \int_{0}^{\pi} \left[\int_{1}^{2} y \, sen(xy) dx \right] dy = \int_{0}^{\pi} -\cos(xy) \Big|_{1}^{2} dy = -\int_{0}^{\pi} [\cos(2y) - \cos(y)] dy =$$

$$= -\left(\frac{sen(2y)}{2} - sen(y) \right) \Big|_{0}^{\pi} = 0.$$

ATIVIDADES

Lista 1.2.2 - Ver exemplos E2 e E3 no apêndice V.

- 1. Provar a propriedade de aditividade.
- 2. Provar o teorema 2.2.3.
- 3. Provar o "Teorema do Valor Médio".
- 4. Resolver os exemplos 2.1.1 e 2.1.2, da seção anterior, usando o teorema de Fubini.
- 5. Calcular $\iint_R (y\cos(x) xe^y) dA$, onde $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-1,1]$; fazer o cálculo das integrais iteradas e comparar os resultados.

Resp:
$$-\frac{1}{8}\pi^{2}(e-e^{-1})$$

1.2.3 Algumas Interpretações para a Integral Dupla

1.2.3.1 Interpretação como Área

Se z = f(x, y) = 1, $\forall (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$, cada termo da soma de Riemann de f(x, y) sobre R é $1\Delta A_i$, com $i = 1, \dots, n$. Então, geometricamente,

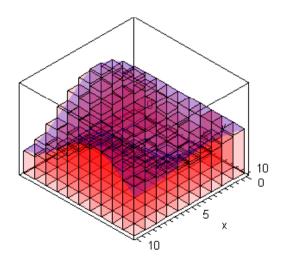
$$\iint_{R} 1 dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_{i} = Area(R).$$

Exemplo 1.2.3.1.1: Seja $R = [a,b] \times [c,d]$ um retângulo. Logo:

1.2.3.2 Interpretação como Volume

Seja $z=f(x,y)\geq 0$ contínua em $R=[a,b]\times [c,d]$. Seja A_i , $i=1,\cdots,n$, a área da sub-região R_i do particionamento de R. Seja $V_i=f(u_i,v_i)A_i$ o volume de cada prisma de altura $f(u_i,v_i)$ e área da base A_i . O volume aproximado do sólido delimitado superiormente por f(x,y) e inferiormente pela região R é

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \Delta A_i = \iint_{R} f(x, y) dx dy.$$



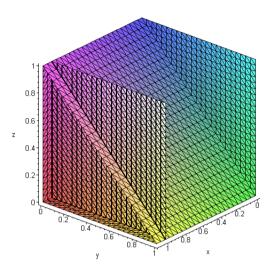
Exemplo 1.2.3.2.1: Calcular o volume de uma caixa de base retangular $R = [a,b] \times [c,d]$ e altura h > 0.

Nesse caso temos f(x, y) = h, onde h é uma constante positiva. Então

$$V = \iint\limits_R f(x, y) dx dy = \iint\limits_R h dx dy = h(b - a)(d - c)$$

é o volume aproximado em u.v.

Exemplo 1.2.3.2.2: Calcular o volume do prisma triangular limitado superiormente por f(x, y) = 1 - y e inferiormente pela região retangular $R = [0,1] \times [0,1]$.



O volume aproximado, em unidades de volume, é dado por

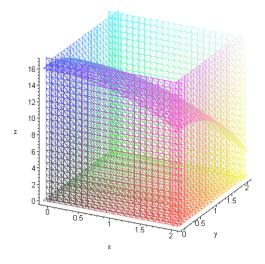
$$V = \iint_{R} f(x, y) dx dy = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1} (1 - y) dx \right] dy = \int_{0}^{1} (1 - y) dy = \frac{1}{2}.$$

Observamos que a figura indica que o volume deve ser a metade do volume do cubo com lado 1u.c..

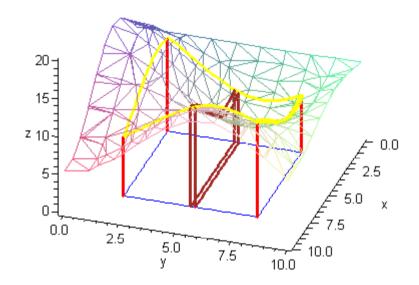
Exemplo 1.2.3.2.3: Encontrar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos x = 2, y = 2 e pelos três planos coordenados.

$$V = \iint_{R} (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{2} (16 - x^2 - 2y^2) dy = \int_{0}^{2} (16y - yx^2 - 2\frac{y^3}{3}) \Big|_{0}^{2} dx = \int_{0}^{2} (16y - yx^2 - 2\frac{y^3}{3}) dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left(32 - 2x^{2} - \frac{16}{3} \right) dx = \left(32x - \frac{2x^{3}}{3} - \frac{16x}{3} \right) \Big|_{0}^{2} = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48u.v.$$



Observação 1.2.3.2.1: Interpretação geométrica para o Teorema de Fubini



Para cada $y \in [c,d]$, a área da seção plana, obtida com a interseção do plano paralelo ao plano xz passando por (0,y,0) com o sólido de volume $\iint_R f(x,y) dx dy$, é dada por $A(y) = \int_a^b f(x,y) dx$. Pelo "Princípio de Cavalieri" podemos expressar o volume $\iint_R f(x,y) dx dy$ por $\int_c^d A(y) dy$. Dessa forma, obtemos:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

De forma análoga podemos pensar na área da seção plana resultante da interseção do sólido com o plano paralelo ao plano yz passando por (x,0,0) e teremos:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

1.2.3.3 Interpretação como Valor Médio

O valor médio de uma função f(x, y) numa região R pode ser calculado por

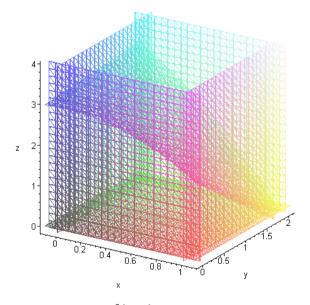
Valor médio de f na região
$$R = \frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_{R} f(x, y) dx dy$$
.

Exemplo 1.2.3.3.1: Encontrar o valor médio da função $f(x,y) = 3 - x^2 - xy$ na região $R = [0,1] \times [0,2]$. Observemos que

$$\iint_{R} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{2} (3 - x^{2} - xy) dy \right] dx = \int_{0}^{1} \left(3y - x^{2}y - \frac{1}{2}xy^{2} \right) \Big|_{0}^{2} dx = \int_{0}^{1} \left(6 - 2x^{2} - 2x \right) dx = \left[6x - \frac{2}{3}x^{3} - x^{2} \right] \Big|_{0}^{1} = \frac{13}{3}.$$

Por outro lado, area(R) = 2.

Assim, Valor médio de f na região $R = \frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_R f(x, y) dx dy = \frac{13}{6}$.



Em termos físicos, se considerarmos a função f(x,y) como a superfície de um líquido (por exemplo, água) contida dentro de um recipiente cilíndrico com base $R \in z \ge 0$, então, após um tempo, o líquido contido nesse recipiente atingirá uma altura igual ao valor médio da função sobre R.

1.2.3.4 Interpretação Quando o Integrando é uma Função Densidade

Uma função de duas variáveis f(x,y) pode representar, por exemplo, a densidade de uma população por unidade de área ou a densidade de massa de uma placa. A integral dupla $\iint_R f(x,y) dx dy$ representará, nesses casos, a população total ou a massa total da região R.

Exemplo 1.2.3.4.1: Se a densidade por unidade de área de uma população de bactérias sobre a região $R = [a,b] \times [c,d]$ é f(x,y) = x + 4y em cada posição $(x,y) \in R$, calcular a população total sobre essa região.

Basta calcularmos

$$\iint_{R} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} (x+4y)dy \right] dx = \int_{a}^{b} \left(xy + 2y^{2} \right)_{c}^{d} dx = \int_{a}^{b} \left((d-c)x + 2(d^{2}-c^{2}) \right) dx =$$

$$= \left((d-c)\frac{x^{2}}{2} + 2(d^{2}-c^{2})x \right)_{a}^{b} = \frac{(d-c)(b^{2}-a^{2})}{2} + 2(d^{2}-c^{2})(b-a)$$

$$= (d-c)(b-a) \left[\frac{a+b}{2} + 2(c+d) \right].$$

Logo, a população é de $(d-c)(b-a)\left\lceil \frac{a+b}{2} + 2(c+d) \right\rceil$ indivíduos.

1.3.2.5 Interpretação como Centro de Massa

O centro de massa, de uma lâmina cuja medida da densidade de área é $\rho(x,y)$ e cuja medida da massa é $M=\iint\limits_{\mathbb{R}}\rho(x,y)dxdy$, tem coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$:

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M}$$
 e $\overline{y} = \frac{M_y}{M}$

sendo

$$M_x = \iint_R x \rho(x, y) dx dy$$
 e $M_y = \iint_R y \rho(x, y) dx dy$

De forma simplificada, podemos dizer que o centro de massa ou centro de gravidade é o ponto de aplicação do peso de um corpo, ou seja, é "o ponto de equilíbrio de um sistema".

Exemplo 1.2.3.5.1: Seja uma lâmina retangular de largura a=2 u.c e altura b=1 u.c. Se um sistema de coordenadas retangulares é disposto como mostramos na figura, determinar as coordenadas do centro de massa dessa lâmina sabendo que a densidade de área é $\rho(x,y) = x \cos(y)$ ua.

Considerando $R = [0,2] \times [0,1]$, temos que a massa da lâmina é

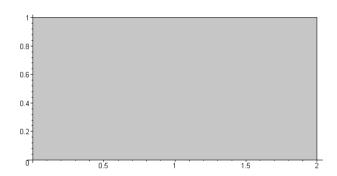
$$M = \iint_{R} \rho(x, y) dx dy = \int_{0}^{2} \left[\int_{0}^{1} x \cos(y) dy \right] dx = \int_{0}^{2} x \sin(y) \Big|_{0}^{1} dx = \int_{0}^{2} x \sin(1) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{2}}{2} \sin(1) \right) \Big|_{0}^{2} = 2 \sin(1)$$

$$M_{x} = \iint_{R} x \rho(x, y) dx dy = \int_{0}^{2} \left[\int_{0}^{1} x^{2} \cos(y) dy \right] dx = \int_{0}^{2} x^{2} \sin(y) \Big|_{0}^{1} dx = \int_{0}^{2} x^{2} \sin(1) dx = \left[\left(\frac{x^{3}}{3} \sin(1) \right) \right]_{0}^{2} = \frac{8}{3} \sin(1)$$

$$M_{y} = \iint_{R} y \rho(x, y) dx dy = \int_{0}^{2} \left[\int_{0}^{1} xy \cos(y) dy \right] dx = \int_{0}^{2} x \left(\cos(y) + y \sin(y) \right) \Big|_{0}^{1} dx =$$

$$= \int_{0}^{2} x \left(\cos(1) + \sin(1) - 1 \right) dx = \left(\frac{x^{2}}{2} \left(\cos(1) + \sin(1) - 1 \right) \right) \Big|_{0}^{2} = 2 \left(\cos(1) + \sin(1) - 1 \right).$$



As coordenadas do centro de massa são:

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{8}{3} \operatorname{sen}(1)}{2 \operatorname{sen}(1)} = \frac{8}{6} \operatorname{u}$$

е

$$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{2(\cos(1) + \sin(1) - 1)}{2\sin(1)} = \frac{\cos(1) + \sin(1) - 1}{\sin(1)} u.$$

ATIVIDADES

Lista 1.2.3 - Ver exemplos E4 ao E6 no apêndice V.

1. Calcular o volume do sólido cilíndrico limitado superiormente por f(x, y) = xy e inferiormente pela região retangular $R = [0,1] \times [0,1]$.

Resp: $\frac{1}{4}$

2. Calcular o volume do sólido cilíndrico limitado superiormente por $f(x, y) = (x + y)^2$ e inferiormente pela região retangular $R = [0,1] \times [0,1]$.

Resp: $\frac{7}{6}$

3. Calcular o volume do sólido cilíndrico limitado superiormente por f(x,y) = (x-a)(y-c) e inferiormente pela região retangular $R = [a,b] \times [c,d]$.

Resp:
$$\frac{(b-a)^2(d-c)^2}{4}$$

4. Encontrar o valor médio da função f(x, y) = xy - x na região $R = [0,1] \times [0,2]$.

Resp: 0

5. Encontrar o valor médio da função f(x, y) = xy - x na região $R = [0,2] \times [0,1]$.

Resp: -1

6. Se a densidade de uma população de organismos sobre a região $R = [0,3] \times [0,1]$ é $f(x,y) = xy + y^2$ milhares por unidade de área em cada ponto $(x,y) \in R$, calcular a população total sobre essa região.

Resp: 3250

7. Se a densidade por unidade de área de uma população de bactérias sobre a região R = [a,b] imes [c,d] é

 $f(x,y) = \frac{x-a}{b-a} + \frac{y-c}{d-c}$ em cada posição $(x,y) \in R$, calcular a população total sobre essa região.

Resp: (b-a)(d-c)

1.2.4 Integrais Duplas em Regiões Não-Retangulares

Agora, o conceito de integral dupla será estendido a regiões mais gerais. Inicialmente, vamos considerar um subconjunto limitado e fechado $W \subset R = [a,b] \times [c,d]; z = f(x,y)$ contínua em W; $z = \bar{f}(x,y)$ definida em R por

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y) \in W \\ 0 & se \quad (x,y) \in R - W \end{cases}$$

A função \bar{f} é contínua, exceto possivelmente na fronteira W. Entretanto, se a fronteira de W consiste de um número finito de gráficos de funções contínuas, então (pelo teorema 1.2.2.2) a função \bar{f} é integrável sobre R. Nessas condições, podemos definir:

$$\iint\limits_{W} f(x,y)dA = \iint\limits_{R} \overline{f}(x,y)dA.$$

A integral $\iint\limits_{W} f(x,y) d\mathbf{A}$ acima independe da escolha de R . Antes de provarmos essa afirmativa, vamos observar

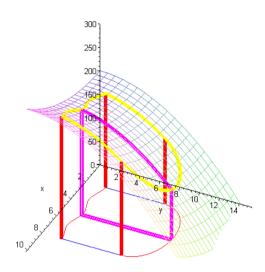
que todas as regiões do plano xy, aqui consideradas, serão do **tipo I** ou **tipo II** (figuras abaixo) ou poderão ser divididas num número finito de sub-regiões desses tipos.

Região W do **tipo I**, onde $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ são contínuas em [a,b]:

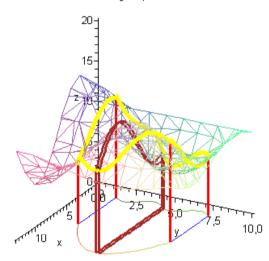
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \quad e \quad \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x) \}.$$

Região W do **tipo II**, onde $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ são contínuas em [c,d]:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \quad e \quad c \le y \le d \}.$$



região tipo I



região tipo II

Teorema 1.2.4.1 – Seja a função z=f(x,y) definida e contínua em um subconjunto fechado e limitado $W\subset {\bf R}^n$

a) Se W é uma região do **tipo I**, então $\iint\limits_{W} f(x,y) d\mathbf{A} = \int_{a}^{b} \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} f(x,y) dy dx$.

b) Se W é uma região do **tipo II**, então $\iint_W f(x,y) d\mathbf{A} = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx dy$.

Demonstração:

Seja $W \subset R = [a,b] \times [c,d]$. Seja $z = \bar{f}(x,y)$ definida de modo que seja nula em R - W e coincida com f em W. Então:

$$\iint_{W} f(x,y)dA = \iint_{R} \overline{f}(x,y)dA.$$

Como temos que para cada $x \in [a,b]$, a função \bar{f} é limitada em [c,d] e contínua, exceto possivelmente em dois pontos.

Assim, a integral
$$\int_c^d \overline{f}(x,y)dy = \int_c^{\psi_1(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\psi_2(x)}^d \overline{f}(x,y)dy$$
 existe.

Como para $\, c < y < \! \psi_1(x) \,$ e $\, \psi_2(x) < y < d \,$ temos $\, \bar{f}(x,y) = 0 \,$, então:

$$\int_{c}^{d} \overline{f}(x,y) dy = \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} \overline{f}(x,y) dy = \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} f(x,y) dy.$$

Finalmente, pelo Teorema de Fubini, temos:

$$\iint_{p} \overline{f}(x,y) dA = \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} \overline{f}(x,y) dy \right] dx = \int_{a}^{b} dx \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} f(x,y) dy = \int_{a}^{b} \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} f(x,y) dy dx.$$

Para completarmos a demonstração, podemos, de modo análogo, mostrar que

$$\iint_{W} f(x,y)dA = \int_{c}^{d} \int_{\varphi_{1}(y)}^{\varphi_{2}(y)} f(x,y)dxdy.$$

Observação 1.2.4.1: Toda função real definida e contínua em um subconjunto fechado e limitado $W \subset \mathbf{R}^n$ é limitada.

Observação 1.2.4.2: O fato da integral $\iint_{\mathcal{W}} f(x,y)d\mathbf{A}$ ser independente de R fica demonstrado pelas fórmulas a) e b) do teorema 2.4.1.

Observação 1.2.4.3: Se W é uma região do tipo I tal que

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / a \le x \le b \quad e \quad \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x) \},\$$

$$\text{a integral } \iint\limits_{W} dx dy = \int_{a}^{b} \int_{\psi_{1}(x)}^{\psi_{2}(x)} dy dx = \int_{a}^{b} \left[\!\! \left[\!\! \psi_{2}(x) - \!\! \psi_{1}(x) \right] \!\! \right] \!\! dx = \acute{A} rea(W) \,.$$

ATIVIDADES

Lista 1.2.4 - Ver exemplos E7 e E8 no apêndice V.

Determinar a região de integração e trocar a ordem de integração das integrais abaixo:

$$1. \int_{0}^{1} \int_{x}^{1} f(x, y) dy dx$$

Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{y} f(x, y) dx dy$$

$$2. \int_{0}^{1} \int_{y}^{1} f(x,y) dx dy$$

Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} f(x, y) dy dx$$

$$3. \int_{0}^{1} \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$

Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{v^{2}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy$$

$$4. \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos y}^{1} f(x, y) dx dy$$

Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{\arccos x}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy dx$$

$$5. \int_{0}^{1} \int_{1-y}^{\sqrt{1+y^{2}}} f(x,y) dx dy$$

Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{1-x}^{1} f(x,y) dy dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{x^{2}-1}}^{1} f(x,y) dy dx$$

1.2.5 Cálculo de Integrais Duplas

No cálculo de integrais duplas é fundamental o reconhecimento da região de integração (domínio de integração). Para tal é importante o reconhecimento das curvas que delimitam a região de integração. Essas curvas podem ser escritas em função de x, y = f(x), ou convenientemente em função de y, x = g(y); a conveniência é devida ao menor trabalho exigido no processo de cálculo.

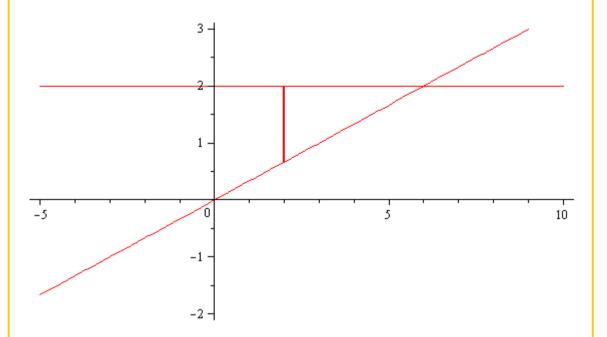
Exemplo 1.2.5.1: Calcular o valor da integral $\iint_R x \sqrt{y^2+1} \ dA$, sendo R a região delimitada por x=0, y=2 e $y=\frac{x}{3}$.

Primeiro, vamos resolver $\int\limits_0^6 \left[\int\limits_{\frac{x}{3}}^2 x \sqrt{y^2 + 1} \ dy \right] dx$; para tal, obtivemos o gráfico da região e os limites dessa região.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

O gráfico da região pode ser obtido usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

> plot({2,x/3},x=-6..10,color=red,scaling=constrained);



Os pontos de interseção também podem ser obtidos usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

> solve({y=2,y=x/3},{x,y});

$$\{y=2, x=6\}$$

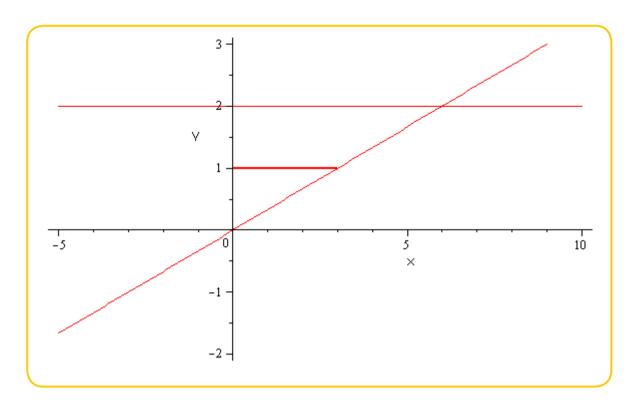
O valor da integral é $\int_{0}^{6} \left[\int_{\frac{x}{3}}^{2} x \sqrt{y^{2} + 1} \ dy \right] dx = \frac{81\sqrt{5}}{8} - \frac{9}{16} \ln(\sqrt{5} + 2) \ .$

Agora, vamos calcular $\int_{0}^{2} \left[\int_{0}^{3y} x \sqrt{y^2 + 1} \ dx \right] dy$ e comparar os resultados obtidos. Esta integral pode ser calculada

mediante o comando

- > student[Doubleint](x*sqrt(y^2+1),x=0..3*y,y=0..2); value(%);
- > simplify(%);

$$\frac{81\sqrt{5}}{8} - \frac{9}{16}\ln(\sqrt{5} + 2)$$



Exemplo 1.2.5.2: Calcular o valor da integral $\iint_R xydA$, onde R é delimitada por y=x-1 e $y^2=2x+6$.

As soluções (5,4) e (-1,-2) do sistema $\begin{cases} y=x-1\\ y^2=2x+6 \end{cases}$ são os pontos de intersecção das curvas dadas. Assim, temos:

$$\iint_{R} xy dA = \int_{-2}^{4} \left[\int_{\frac{y^{2}-6}{2}}^{y+1} xy dx \right] dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{y(y+1)^{2}}{2} - \frac{y(y^{2}-6)^{2}}{8} \right] dy = 36.$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

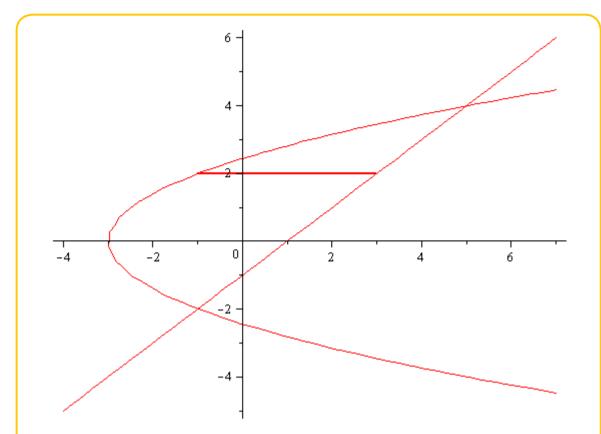
Os pontos de interseção entre as curvas podem ser obtidos usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

> solve({y=x-1,y^2=2*x+6},{x,y});
{
$$y = -2, x = -1$$
}, { $y = 4, x = 5$ }

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

O gráfico da região pode ser obtido usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

> plots[implicitplot]({y=x-1, y^2=2*x+6}, x=-4..6, y=-5..6,scaling=constrained,color=red);



Agora, vamos resolver $\int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy dx dy$; podemos facilmente fazer isto mediante os seguintes comandos do "MAPLE":

> student[Doubleint](x*y,x=(y^2-6)/2..y+1,y=-2..4);

> value(%);

Exemplo 1.2.5.3: Calcular o valor da integral $\iint_R 12xyd\,\mathbf{A}$, onde R é delimitada por $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

O gráfico da região pode ser obtido usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

• plots[implicitplot]({y=x^2, y=sqrt(x)}, x=-1..2, y=-1..2,scaling=constrained,color=red);

A integral a ser avaliada fica $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 12xydydx$, que pode ser resolvida pelo "MAPLE" mediante os comandos

> student[Doubleint](12*x*y,y=x^2..sqrt(x),x=0..1);

> value(%);

Exemplo 1.5.4: Calcular o valor da integral $\iint_R 12xydA$, onde R é delimitada por $x=y^2$ e $x=\sqrt{y}$.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

O gráfico da região pode ser obtido usando o "software MAPLE", através do comando abaixo:

> plots[implicitplot]({x=y^2, x=sqrt(y)}, x=-1..2, y=-1..2,scaling=constrained,color=red);

A integral a ser calculada é $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 12xydxdy$. Isto pode ser conferido mediante os comandos:

- > student[Doubleint](12*x*y,x=y^2..sqrt(y),y=0..1);
- > value(%);

Exemplo 1.5.5: Calcular o valor da integral $\iint_R 2xydA$, onde R é delimitada por $y=x^2$, y+x=6 e y=1.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

A região pode ser desenhada pelo comando

> plots[implicitplot]({y=x^2, y+x=6, y=1}, x=-10..10, y=-10..10,scaling=constrained,color=red,numpoints=5000);

ATIVIDADES

Lista 1.2.5 - Ver exemplos E9 ao E21 no apêndice V.

- 1. Calcular a área da região delimitada pelas curvas $x=y^2$, y=1+x, y-1=0 e y+1=0.
- 2. Calcular o volume do sólido limitado pelas superfícies $y+x^2=4$, y-3x=0 , z-x=4 e z=0 .
- 3. Calcular a integral $\iint_R (x+y) dx dy$, sendo R o triângulo de vértices (0,1), (1,0) e (-1,0). Efetuar o cálculo como região do tipo II e depois como decomposição em duas regiões do tipo I.
- 4. Calcular $\iint_R (x+y)dA$ sendo R a região compreendida pelas curvas $y=\frac{1}{2}x$, $y=\sqrt{x}$, x=1 e x=4.
- 5. Calcular $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 y) dA$ sendo R a região compreendida pelas retas y = -x + 1, y = x + 1 e y = 2.
- 6. Calcular $\iint\limits_{R} (x-y) dA$ sendo R a região do primeiro quadrante compreendida por y=x e $y=x^3$.
- 7. Calcular a integral $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$ invertendo a ordem de integração.
- 8. Calcular a integral $\int_0^2 \int_{v/2}^1 \cos(x^2) dx dy$ invertendo a ordem de integração.

9. Utilizar uma integral dupla para calcular a área da região R entre a parábola $y=rac{1}{2}x^2$ e a reta y=3x .

10. Utilizando uma integral dupla, calcular o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos coordenados.

11. Calcular a integral $\iint\limits_R \cos(y^3) dA$ sendo R a região limitada por $y=\sqrt{x}$, y=2 e x=0 .

12. Uma lente circular de raio igual a 5 cm tem uma espessura de $1 - \frac{r^2}{5}$ cm nos pontos que estão a uma distância igual a r cm do centro da lente. Encontrar a espessura média da lente. (sugestão: usar coordenadas polares)

13. Encontrar o valor de $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, sendo R o anel compreendido entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. (sugestão: usar coordenadas polares)

14. Calcular a área da região delimitada pelas curvas $x = y^2$, y = 1 + x, y - 1 = 0 e y + 1 = 0.

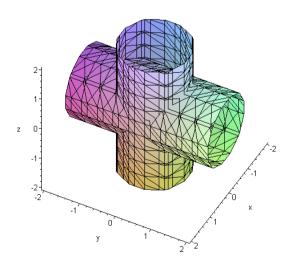
15. Calcular o volume do sólido limitado pelas superfícies $y+x^2=4$, y-3x=0, z-x=4 e z=0.

16. Calcular a integral $\iint_R (x+y) dx dy$, sendo R o triângulo de vértices (0,1), (1,0) e (-1,0). Depois, refazer a integral considerando a região como do tipo II e ainda como decomposição em duas regiões do tipo I.

17. Calcular o volume limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $x^2 + z^2 = r^2$.

Sugestão: O volume pode ser visualizado mediante o comando a baixo:

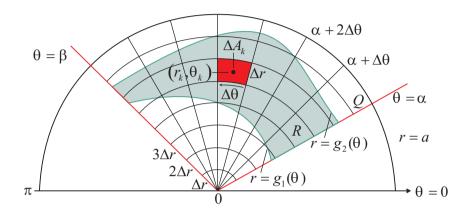
> plots[implicitplot3d]({x^2+y^2=1, x^2+z^2=1}, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2,scaling=constrained);



Respostas na página 193

1.2.6 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Muitas vezes a região sobre a qual a integral dupla está sendo calculada é mais facilmente descrita por coordenadas polares do que por coordenadas retangulares. A seguir, vamos estudar o processo para cálculo de integrais duplas em coordenadas polares.



Inicialmente, vamos considerar uma partição $P = \left\{ \alpha = \theta_0, \alpha + \Delta\theta, \alpha + 2\Delta\theta, \cdots, \theta_n = \beta \right\}$ em coordenadas polares do arco $\Omega = \alpha\beta$, conforme a figura acima. Consideremos a sub-região Ω_i de Ω delimitada por ρ_{i-1} , ρ_i , θ_{i-1} e θ_i . Cada Ω_i é aproximadamente um retângulo de área $A_i = \Delta\rho_i\rho_i\Delta\theta_i$. Se $(\rho_{k_i}, \theta_{k_i})$ é um ponto interior de Ω_i , podemos formar um sólido cuja área da base é A_i e altura $f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i})$, e, portanto, com volume :

$$V_i = f(\rho_k, \theta_k) \Delta \rho_i \rho_i \Delta \theta_i$$

O volume sob $f(\rho, \theta)$ pode ser aproximado por:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta \rho_i \rho_i \Delta \theta_i.$$

Seja |P| a diagonal da maior sub-região Ω_i de Ω . Se $|P| \to 0$ temos $\Delta \rho_i \to 0$, $\Delta \theta_i \to 0$, $\rho_{k_i} \to \rho$, $\theta_{k_i} \to 0$ e $\rho_i \to \rho$, então

$$V = \lim_{|P| \to 0} V_n = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^n f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta \rho_i \rho_i \Delta \theta_i,$$

ou

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta) \rho \, d\rho d\theta.$$

Observação 1.2.6.1: As coordenadas retangulares e as polares de um ponto no plano estão relacionadas por:

$$x = \rho \cos\theta = v = \rho sen\theta$$
,

com $\rho \geq 0$ e $\theta_{_0} \leq \theta \leq \theta_{_0} + 2\pi$.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

É claro que as áreas $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ (áreas de sub-regiões retangulares de uma partição por retas paralelas aos eixos $x \in y$) e $A_i = \Delta \rho_i \rho_i \Delta \theta_i$ não são iguais. Porém,

$$\frac{\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \Delta x_i \Delta y_i}{\lim_{\Delta \rho, \Delta \theta \to 0} \Delta \rho_i \rho_i \Delta \theta_i} = 1,$$

o que implica $dxdy = \rho \ d\rho \ d\theta$.

Portanto, temos a equivalência entre uma integral dupla em coordenadas retangulares e em coordenadas polares, sobre uma mesma região, como segue:

$$\int_{a=x_1}^{b=x_2} \int_{c=y_1}^{d=y_2} f(x,y) dx dy = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} f(\rho,\theta) \rho d\rho d\theta.$$

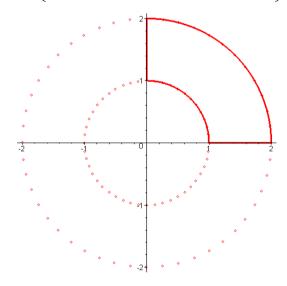
Exemplo 1.2.6.1. Calcular $\iint_R \ln(x^2+y^2) dx dy$, sendo R a região do primeiro quadrante entre as circunferências concêntricas $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Usando a mudança polar

$$x = \rho \cos \theta$$
 e $y = \rho sen\theta$,

a região do primeiro quadrante entre as circunferências dadas pode ser descrita por:

$$R = \{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le \rho \le 2 \quad e \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \}.$$



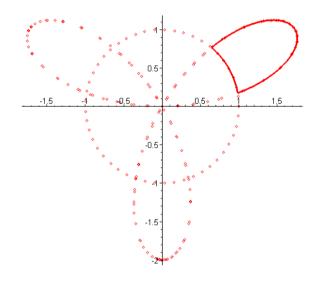
Assim, obtemos:

$$\iint_{R} \ln(x^{2} + y^{2}) dx dy = \int_{1}^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho \ln(\rho^{2}) d\theta d\rho = \int_{1}^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\rho \ln(\rho) d\theta d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{1}^{2} 2\rho \ln(\rho) d\rho = \frac{\pi}{2} \left(\rho^{2} \ln(\rho) - \frac{\rho^{2}}{2} \right) \Big|_{\rho = 1}^{\rho = 2} = \frac{\pi}{4} (8 \ln(2) - 3).$$

Exemplo 1.2.6.2. Calcular $\iint_R \frac{1}{\rho} dA$, sendo R a região do primeiro quadrante fora da circunferência $\rho = 1$ e dentro da rosácea $\rho = 2 \mathrm{sen}(3\theta)$.

A figura a seguir, mostra a região de integração:



que pode ser descrita por $R = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 1 \le \rho \le 2 \mathrm{sen}(3\theta) \ e^{-\frac{\pi}{18}} \le \theta \le \frac{5\pi}{18} \right\}$. Os extremos para os valores do ângulo θ podem ser calculados a partir da equação $1 = 2 \mathrm{sen}(3\theta)$.

Assim,

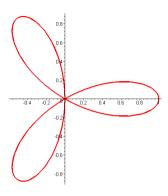
$$\iint_{R} \frac{1}{\rho} dA = \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \int_{1}^{2\sin(3\theta)} \rho \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} (2\sin(3\theta) - 1) d\theta = \left(-\frac{2}{3}\cos(3\theta) - \theta \right) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{18}}^{\theta = \frac{\pi}{18}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{18} = \frac{2}{3} \sqrt{3} - \frac{2}{9} \pi$$

Exemplo 1.2.6.3. Calcular, mediante uma integral dupla, a área compreendida pela rosácea de três pétalas $\rho = \cos(3\theta)$

.

A rosácea é mostrada na figura:



e temos que a área é igual a três vezes a área de uma pétala:

ATIVIDADES

Lista 1.2.6 - Ver exemplos E22 ao E28 no apêndice V.

1. Calcular o volume limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy.

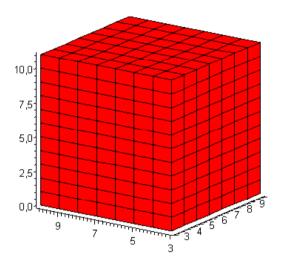
Dica: Verificar que o volume será dado por $V = \iint\limits_R (x^2 + y^2) dA$ sendo R o círculo com centro em (0,1) e raio igual a 1.

- 2. Usar uma integral dupla em coordenadas polares para calcular a área da região compreendida pela cardióide ho=1+sen(heta) .
- 3. Calcular a integral $\displaystyle \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$ sendo R o círculo unitário.
- 4. Calcular a integral $\int_0^3 \int_4^{\sqrt{25-x^2}} dy dx$ utilizando integração dupla em coordenadas polares.
- 5. Calcular a integral $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{4+x^2+y^2}} dx dy$.

1.3 Integrais Triplas

1.3.1 Introdução

Vamos considar integrais triplas através de somas de Riemann, analogamente ao que foi feito para integrais duplas. Portanto, vamos esboçar apenas as idéias principais. Seja w=f(x,y,z) uma função real definida e limitada numa região regular tridimensional $R=[a,b]\times [c,d]\times [p,q]$. Sejam P_1 , P_2 e P_3 partições regulares, de ordem n, de [a,b], [c,d] e [p,q], respectivamente. O produto cartesiano $P_1\times P_2\times P_3$ é uma partição regular de ordem n de R. Essa partição secciona R, por planos paralelos aos eixos coordenados, em n^3 sub-regiões, conforme a figura abaixo:



Podemos formar uma soma de Riemann $S_{\scriptscriptstyle n}$ de ${\it W}=f(x,y,z)$ sobre ${\it R}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$\text{onde } \Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \ \Delta y = y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n} \text{ e } \Delta z = z_{k+1} - z_k = \frac{q-p}{n}, \text{com}$$

 $i,j,k=0,\cdots,n-1$ e $c_{ijk}=(x_i,y_j,z_k)$ é um ponto qualquer de uma sub-região de R .

Se $\lim_{n\to +\infty} S_n$ existe e independe da escolha de c_{ijk} , chamamos este limite de integral tripla de f(x,y,z) sobre R, e denotamos por:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz \text{ ou } \iiint\limits_R f(x,y,z)dV \ .$$

Observação 1.3.1.1: O fracionamento de R obtido pela partição descrita é um conjunto de sub-parelelepípedos que podem ser chamados células da partição. Considerando que uma célula tenha dimensões Δx , Δy e Δz , então o seu volume é

 $V_{ijk} = \Delta x \Delta y \Delta z$. Seja $c_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$ um ponto qualquer da ijk-ésima célula e f a função densidade (de R no conjunto dos reais) em cada ponto de R, então uma estimativa da massa dessa célula é $m_{ijk} = f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$; assim, uma estimativa da massa do sólido R é $m_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$. Se $\|D\|$ é a célula de maior diagonal da partição, então a massa de R é

$$m = \lim_{\|D\| \to 0} m_n = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Observação 1.3.1.2: Se f(x, y, z) = 1, temos $m = \iiint_R dV = V$; a massa e o volume, nesse caso, tem o mesmo valor numérico.

Observação 1.3.1.3: As observações feitas sobre as condições de integrabilidade de funções de duas variáveis, quando estudamos integrais duplas, podem ser estendidas para funções de três variáveis. Assim, temos que toda função w=f(x,y,z) contínua em R é integrável sobre R. Além disso, funções limitadas, cujos conjuntos de descontinuidades podem ser descritos como união finita de gráficos de funções contínuas, tais como x=x(y,z), y=y(x,z) ou z=z(x,y), são integráveis. Também, como no caso de funções de duas variáveis, o Teorema de Fubini é válido para funções de três variáveis: Se w=f(x,y,z) é contínua em R, então é possível encontrar seis integrais iteradas:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_p^q f(x,y,z)dzdydx =$$

$$= \int\limits_c^d \int\limits_a^b \int\limits_p^q f(x,y,z)dzdxdy =$$

$$= \cdots =$$

$$= \int\limits_a^q \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y,z)dydxdz.$$

Agora, para completar a analogia com o cálculo das integrais duplas, vamos calcular integrais triplas, sobre regiões fechadas e limitadas, em coordenadas retangulares.

Exemplo 1.3.1.1: Calcular a integral tripla $\iiint_R xyz^2 dV$, sendo $R = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$.

$$\iiint_{R} xyz^{2} dV = \int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{2} dy \int_{0}^{3} xyz^{2} dz = \frac{27}{4}$$

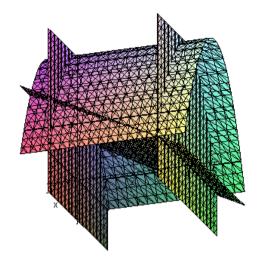
ATIVIDADES

Lista 1.3.1.1 - Ver exemplos E29 ao E35 no apêndice V

1. Calcular o volume do sólido delimitado pelas superfícies de equações $z=9-x^2$, z=4-y , y=0 e y=4 .

O sólido é limitado superiormente pela superfície $\,z=9-x^2\,$ e inferiormente pelo plano $\,z=4-y$. Portanto,

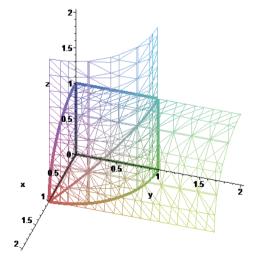
$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} \int_{4-y}^{9-x^2} dz dx dy = \frac{8}{15} (243 - 25\sqrt{5}) u.v.$$



Este gráfico pode ser gerado através do comando:

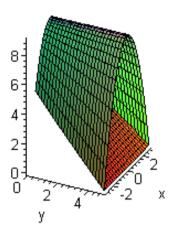
- > implicitplot3d([z=9-x^2,z=4-y,y=0,y=4],x=-3..3,y=-1..5,z=-3..9,axes=normal,numpoints=4000);
- 2. Calcular o volume delimitado pela interseção, no primeiro octante, dos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $x^2 + z^2 = r^2$ de raio r = 3.

Como o sólido resultante da interseção está no primeiro octante, temos os planos x=0, y=0 e z=0 delimitando-o.



$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz dy dx = 18u.v.$$

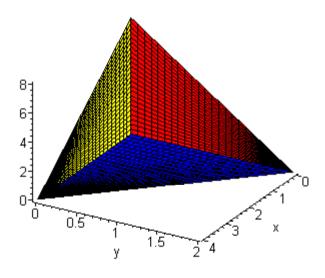
3. Calcular o volume do sólido delimitado pelas superfícies de equações $z=9-x^2$, z=5-y , y=0 e y=5 .



$$V = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} dz dx dy = \frac{1688}{15} u.v.$$

4. Calcular o volume do sólido delimitado pelos planos $\,x=0\,,\,\,y=0\,,\,\,z=0\,$ e $\,2x+4y+z=8\,.$

No esboço abaixo, escolhemos o plano xy para fazer a projeção do tetraedro.



$$V = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{8-2x-4y} dz dy dx = \frac{32}{3} u.v.$$

ATIVIDADES

Lista 1.3.1.2

Calcular as seguintes integrais triplas:

1. $\iiint\limits_R xyz^2dV$, com R o tetraedro limitado pelos planos x=0 , y=0 , z=0 e x+y+z=1 .

Dica: Calcular $\int_0^4 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx$.

2. $\iiint\limits_R z dx dy dz$, onde R é a região limitada pelos planos y=0 , z=0 , x+y=2 , x+2y=6 e o cilindro

 $y^2 + z^2 = 4$, no primeiro octante.

Dica: Observar a figura mediante o comando:

> plots[implicitplot3d]([y=0,z=0,x+y=2,x+2*y=6,y^2+z^2=4],x=0..7,y=0..2,z=0..2,axes=normal,numpoints=4000);

3. $\iiint_{\mathbb{R}} z dx dy dz$, onde R é a região limitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = x^2$,

$$z = 0 e y = 1$$
.

Dica: Tentar o comando:

> plots[implicitplot3d]([y=1,z=0,y=x^2,z=sqrt(x^2+y^2)],x=-2..2,y=0..1.1,z=0..2,axes=normal,numpoints=4000);

4. $\iiint_R y \cos(x+z) dx dy dz$, onde R é a região limitada pelo cilindro $x=y^2$ e os planos z=0 e $x+z=\frac{\pi}{2}$

5. $\iiint\limits_{R}xy^{2}z^{3}dxdydz$, onde R é a região no primeiro octante limitada pela superfície

z = xy e os planos x = y, x = 1 e z = 0.

Calcular o volume dos sólidos descritos abaixo:

6. Sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Dica: Tentar o comando:

 $\verb| >plots[implicitplot3d]([z=x^2+y^2,z=sqrt(x^2+y^2)],x=-1.1..1.1,y=-1.1..1.1,z=0..1.1,axes=normal,numpoints=4000,style=wireframe); \\$

7. Sólido limitado pelas superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

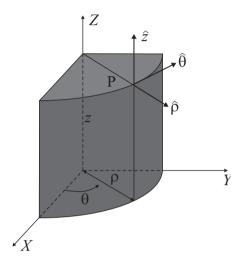
8. Sólido limitado pelas superfícies y=z e $z=4-x^2-y^2$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, com $z\geq 0$.

9. Sólido limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, pelo cilindro $x^2+y^2=x+\sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano z=0 .

10. Calcular a massa de um corpo delimitado por $y = 16 - x^2$, y = 4 - x, y = 2x + 13, z = 0 e z = 10, com densidade f(x, y, z) = xyz.

1.3.2 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , onde ρ e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xv.



Podemos relacionar as coordenadas retangulares e cilíndricas do ponto P através das equações :

$$x = \rho \cos \theta$$
, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$,

onde $\, \rho \geq 0 \, , \, \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi \,) \,$ e $\, z \in (-\infty, +\infty) \, .$ A integral tripla

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx,$$

pode ser escrita em coordenadas cilíndricas, como segue:

$$\int_{a}^{b} \int_{y_{1}(x)}^{y_{2}(x)} \int_{g_{1}(x,y)}^{g_{2}(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx = \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \int_{\rho_{1}(\theta)}^{\rho_{2}(\theta)} \int_{h_{1}(\rho,\theta)}^{h_{2}(\rho,\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho sen \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \; .$$

Na seção 1.4 faremos um detalhamento dessa mudança de variáveis.

Observação 1.3.2.1: As equações $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ e z = z definem uma aplicação $T: A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ $A = \{\rho, \theta, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \rho \ge 0, \quad \theta_0 \le \theta \le \theta + 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty\}$. Essa aplicação será injetora quando restrita ao conjunto $A = \{\rho, \theta, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \rho > 0, \quad \theta_0 \le \theta \le \theta + 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty\}$.

Observação 1.3.2.2: No espaço tridimensional, imagem de $\rho=c_1$ (c_1 constante) é um cilindro de raio c_1 com eixo coincidente com o eixo z. A imagem de $\theta=c_2$ (c_2 constante) é um semi-plano que contém o eixo z. A imagem de $z=c_3$ (z_3 constante) é um plano paralelo ao plano z.

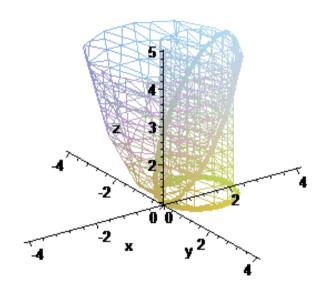
Exemplo 1.3.2.1: Calcular $\iiint_R z dx dy dz$, onde R é limitada pelas superfícies $x^2+y^2-2z=0$ e $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$.

Usando mudança de variáveis cilíndricas, obtemos:

$$\iiint_{R} z dx dy dz = \int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{\frac{\rho^{2}}{2}}^{2\pi} z \rho dz d\theta d\rho = \int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho}{2} \left(8 - \rho^{2} - \frac{\rho^{2}}{4} \right) d\theta d\rho =$$

$$= \pi \left(4\rho^{2} - \frac{\rho^{2}}{4} - \frac{\rho^{6}}{24} \right) \begin{vmatrix} \rho = 2 \\ \rho = 0 \end{vmatrix} = \frac{28\pi}{3}$$

Exemplo 1.3.2.2: Calcular o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e o plano z = 0.



$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen\theta} \int_0^{1+\rho^2} \rho \, dz d\rho \, d\theta = \frac{5\pi}{2} u.v.$$

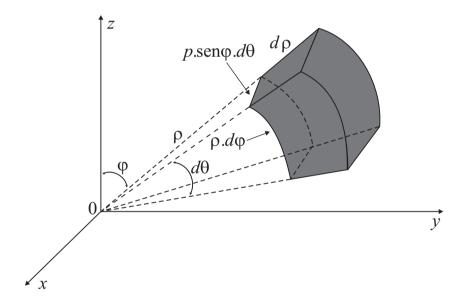


Lista 1.3.2 - Ver exemplo E36 no apêndice V.

- 1. Calcular a integral $\int_0^{2\pi} \; \int_0^1 \; \int_0^{\sqrt{1ho^2}} z
 ho \; dz d
 ho d heta$.
- 2. Usar coordenadas cilíndricas para calcular $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x \, dz dy dx$.
- 3. Usar coordenadas cilíndricas para calcular $\int_{-a}^{0} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{0}^{a^2-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$ sendo a>0.

1.3.3 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Um ponto P de coordenadas retangulares (x,y,z) tem coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) , onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo entre a semi-eixo positivo x e o segmento de reta de (0,0) a (x,y) e ϕ é o ângulo entre a semi-eixo positivo z e o segmento de reta de P à origem .



As coordenadas retangulares e esféricas do ponto *P* estão relacionadas pelas equações:

$$x = \rho \ sen\phi \cos\theta$$
, $y = \rho \ sen\phi sen\theta$, $z = \rho \cos\phi$,

onde $\rho \geq 0$, $\theta \in [\theta_{_0}, \theta_{_0} + 2\pi\,)$ e $\phi \in [0,\pi\,]$. Então, a integral tripla

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx,$$

em coordenadas esféricas é escrita:

$$\int_{a}^{b}\int_{y_{1}(x)}^{y_{2}(x)}\int_{g_{1}(x,y)}^{g_{2}(x,y)}f(x,y,z)dzdydx=\int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}}\int_{\rho_{1}(\theta)}^{\rho_{2}(\theta)}\int_{h_{1}(\rho,\theta)}^{h_{2}(\rho,\theta)}f(\rho\,sen\phi\,\cos\theta\,,\rho\,sen\phi\,sen\theta\,,\rho\,\cos\phi)\rho^{\,2}sen\phi\,d\rho d\theta d\phi$$

Na seção 1.4 também faremos uma abordagem mais detalhada dessa mudança de variáveis.

Observação 1.3.3.1: As equações $x = \rho sen \varphi cos \theta$, $y = \rho sen \varphi sen \theta$ e $z = \rho cos \varphi$ definem uma aplicação $T: A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $A = \{\rho, \theta, \varphi\} \in \mathbf{R}^3$, $\rho \ge 0$, $\theta_0 \le \theta \le \theta + 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi\}$ Essa aplicação também será injetora quando restrita ao conjunto $A = \{\rho, \theta, \varphi\} \in \mathbf{R}^3$, $\rho > 0$, $\theta_0 \le \theta \le \theta + 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi\}$.

Observação 1.3.3.2: No espaço tridimensional, imagem de $\rho=c_1$ (c_1 constante) é uma esfera centrada na origem. A imagem de $\theta=c_2$ (c_2 constante) é um semi-plano que contém o eixo z. A imagem de $\phi=c_3$ (c_3 constante) é um cone circular com eixo coincidente com o eixo z.

Exemplo 1.3.3.1: Mostrar, fazendo uso de coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é dado por

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} u.v.$$

Considerando a esfera centrada na origem, a sua projeção no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$; então,

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
 e $0 \le \phi \le \pi$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho^2 sen\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4\pi \, r^3}{3} u.v.$$

Exemplo 1.3.3.2: Calcular $\iiint\limits_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} dx dy dz$, onde R é a região, no primeiro

octante, delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e pelos cones $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}}$ e $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

Usando a mudança de variáveis esféricas temos que a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ é a imagem

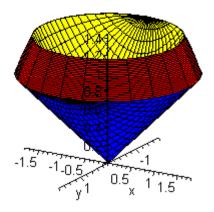
de
$$\rho=4$$
 , e os cones $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$ e $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ são as imagens de $\phi=\frac{\pi}{3}$ e $\phi=\frac{\pi}{6}$,

respectivamente.

Assim, podemos escrever:

$$\iiint_{R} e^{\sqrt{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3}}} dx dy dz = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{0}^{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{2} e^{\rho^{3}} sen \phi d\theta d\rho d\phi = \frac{\pi}{12} (\sqrt{3}-1)(e^{64}-1).$$

Exemplo 1.3.3.3: Calcular o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z^2=x^2+y^2$, $z^2=4-x^2-y^2$ e $z^2=3x^2+3y^2$, com $z\geq 0$.

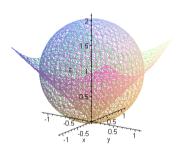


$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 sen\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right) u.v.$$

Exemplo 1.3.3.4: Calcular a integral tripla, em coordenadas esféricas, da função $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sobre a região limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ e inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

O volume de integração pode ser visualizado mediante o comando:

> plots[implicitplot3d]([$x^2+y^2+(z-1)^2=1,z=sqrt(x^2+y^2)$],x=-1.1..1.1, y=-1.1..1.1, z=0..2.1, axes=normal, numpoints=4000, style=wireframe);



A integral a ser calculada é $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi+\mathrm{sen}\phi} \rho^4 sen\phi \, d\rho \, d\phi d\theta$.

ATIVIDADES

Lista 1.3.3

Usar coordenadas esféricas para calcular o volume dos seguintes sólidos

- 1. Sólido abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e acima do cone $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.
- 2. Sólido limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e compreendido entre as esferas $x^2+y^2+z^2=9$ e $x^2+y^2+z^2=16$.
- 3. Sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e os planos z = 0 e z = 2 .

1.4 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas: Jacobianos

As mudanças de variáveis em integrais, em geral, objetivam facilitar os cálculos das mesmas. Muitas vezes, nas integrais de funções de uma variável, usamos o método da substituição para simplificar o cálculo de uma integral $\int_a^b f(x)dx$. Nesse método, é utilizada a fórmula abaixo, desde que f seja contínua em [a,b] e g seja inversível, com derivada contínua, em [c,d]:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

onde a = g(c) e b = g(d).

Nas seções anteriores usamos coordenadas polares, cilíndricas e esféricas para simplificar integrais iteradas. Agora, faremos uma discussão mais geral sobre mudança de variáveis em integrais; nesse processo ficará claro de onde vem, por exemplo, o fator $\rho^2 sen\phi$ quando mudamos de coordenadas cartesianas para esféricas.

Teorema 1.4.1: Seja g definida por

$$g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

com x e y funções de classe C^1 em $A \subset \mathbf{R}^2$. Seja $B \subset A$ limitado e fechado, tal que:

- i) g é injetora em B;
- (ii) o determinante **Jacobiano** da aplicação g, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, não se anula em B. Se f é integrável em g(B), então:

$$\iint\limits_{g(B)} f(x,y) dx dy = \iint\limits_{B} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

Demonstração:

A demonstração desse teorema pode ser vista em RUDIN, W., Principles of Matematical Analysis, McGraw Hill, 1976.

Observação 1.4.1: Se g não for injetora e $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=0$ em subconjuntos de B que podem ser descritos por um

ponto ou pelo gráfico de uma função contínua ou por uma união finita de conjuntos desses dois tipos, então a fórmula descrita no teorema 1.4.1 ainda é válida.

Observação 1.4.2: A área de g(B) é aproximada por $\sum \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v$; o limite dessas somas é $\iint_B \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$.

Essa é, portanto, uma interpretação geométrica, quando f(x,y)=1 em g(B), da fórmula descrita no teorema.

Observação 1.4.3: No caso integrais triplas, para funções de três variáveis sob condições análogas as que aparecem no teorema 1.4.1, é válida a fórmula:

$$\iiint\limits_{g(B)} f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint\limits_{\mathbb{R}} f(x(u,v,t),y(u,v,t),z(u,v,t)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} \right| du dv dt.$$

Exemplo 1.4.1: Calcular $\iint_R e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}} dx dy$, sendo R limitada por x+y=1 e os eixos coordenados.

Os termos x + y e x - y sugerem uma mudança linear definida por u = x + y e v = x - y; nesse caso, o Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Assim, com a transformação sugerida teremos:

$$\iint_{R} e^{\frac{(x+y)}{(x-y)}} dx dy = \iint_{S} e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} v(e - \frac{1}{e}) dv = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2} - 1}{e} \right).$$

É importante observar que a região triangular R , no plano xy , foi transformada numa região triangular, no plano uv , delimitada pelas retas u=v , u=-v e v=1 .

Observação 1.4.4: Para transformar uma integral das variáveis x, y a coordenadas u, v fazemos três mudanças:

- I) Substituímos $x \in y$ no integrando em termos de $u \in v$;
- II) Mudamos a região R no plano xy para uma região S no plano y.
- III) Introduzimos o valor absoluto do Jacobiano $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$, representando a mudança no elemento de área.

Exemplo 1.4.2: Verificar que o Jacobiano para coordenadas polares é dado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \rho$.

Quando mudamos de coordenadas retangulares para polares, fazemos as seguintes substituições:

 $x = \rho \cos\theta = y = \rho sen\theta$; o Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -\rho sen\theta & \rho \cos\theta \end{vmatrix} = \rho \cos^2\theta + \rho sen^2\theta = \rho.$$

ATIVIDADES

Lista 1.4.1

- 1. Encontrar o jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ se:
- a) x = u + v, y = u v

b)
$$x = -\frac{2v}{u^2 + v^2}$$
 $y = \frac{2u}{u^2 + v^2}$

- c) $u = e^{x}$, $v = ye^{-x}$
- 2. Usar a transformação u=x-2y , v=2x+y para encontrar $\iint\limits_R rac{2x+y}{2x-y}dA$ sendo R a região limitada

pelas retas x - 2y = 1, x - 2y = 4, 2x + y = 1, 2x + y = 5.

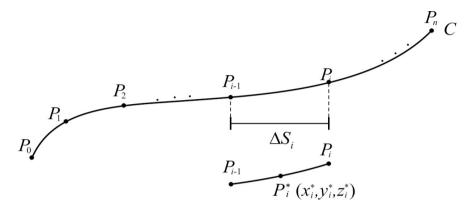
3. Calcular a integral $\iint\limits_R \sqrt{x^2+4y^2}\,dA$, sendo R a região envolvida pela elipse $x^2+4y^2=4$.



2.1. Integrais de Funções Escalares sobre Curvas

Existem varias motivações físicas para definirmos uma **integral de linha**, ou seja, integrarmos uma função ao longo de uma curva. Por exemplo, quando consideramos o problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja densidade linear (massa por unidade de comprimento) seja conhecida.

Especificamente, suponhamos que o arame descreva uma curva lisa C, e para cada ponto (x,y,z) em C, a função densidade linear seja f(x,y,z).



Uma maneira de calcularmos a massa do arame seria dividir C em n seções muito pequenas usando os pontos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, onde P_0 é o ponto inicial de C e P_n é o ponto final, conforme a figura.

Em cada secção de P_{i-1} a P_i escolhemos um ponto $\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right)$. Considerando o comprimento da seção muito pequeno e igual a ΔS_i , podemos aproximar a função f nessa seção pelo valor $f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right)$, Assim, a massa dessa secção será

$$\Delta M_i \approx f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta S_i$$

e a massa do arame pode ser aproximada por

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta M_{i} = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}\right) \Delta S_{i}.$$

Se definirmos o comprimento da partição $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ como $\max \Delta S_i$, então o erro de aproximação da massa deve tender a zero quando $\max \Delta S_i \to 0$. Dessa maneira, o valor exato de M deve ser dado por

$$M = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta S_i.$$

Definição 2.1.1: Seja C uma curva lisa. A integral de linha de uma função real f, (f(x, y) ou f(x, y, z)), em relação a S ao longo de C é definida como:

$$\int_{C} f(x, y) dS = \lim_{\max \Delta S_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}\right) \Delta S_{i}$$

$$\int_{C} f(x, y, z) dS = \lim_{\max \Delta S_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}\right) \Delta S_{i}$$

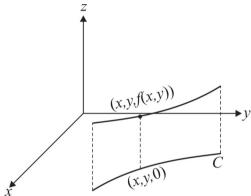
sempre que os limites mencionados existam.

Observação 2.1.1: A utilização da definição de integrais de linha não facilita o seu cálculo, mas ajuda na sua interpretação física.

Exemplo 2.1.1: Seja C a curva em R^3 que modela um arame fino e suponha que f(x,y,z) é a função densidade linear do arame. Assim, a massa do arame é dada por $M=\int_C f(x,y,z)dS$.

Exemplo 2.1.2: Se C a for uma curva lisa, o seu comprimento L está dado por $L=\int_{C}dS$.

Exemplo 2.1.3: Se C for uma curva no plano xy e uma função f(x,y) for contínua e não negativa em C, então $\int_C f(x,y) dS$ será a área da superfície cilíndrica cuja projeção no plano xy é a curva C desde o plano até uma altura f(x,y) como ilustra a figura abaixo.



2.2 Cálculo de integrais de linha

Se a curva C é descrita por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$, então o comprimento da curva de P_{i-1} a P_i é dado por

$$\Delta S_{i} = \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} || \vec{r}'(t) || dt = || \vec{r}'(t_{i}^{*}) || \Delta t_{i},$$

para algum $t_i^* \in \left[\ t_{i-1}, t_i \ \right]$, usando o teorema do valor médio para integrais.

Como foi suposto que as funções x(t), y(t) e z(t) têm derivadas contínuas em [a,b], então:

$$\int_{C} f(x, y, z) dS = \lim_{\max \Delta S_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}\right) \Delta S_{i}$$

$$= \lim_{\max \Delta t_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(t_{i}^{*}\right), y\left(t_{i}^{*}\right), z\left(t_{i}^{*}\right)\right) \|\overrightarrow{r'}(t_{i}^{*})\| \Delta t_{i}$$

$$= \int_{a}^{b} f\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \|\overrightarrow{r'}(t)\| dt.$$

Em \mathbb{R}^2 , teremos $\int_C f(x,y) dS = \int_a^b f(x(t),y(t)) ||\overrightarrow{r'}(t)|| dt$.

Exemplo 2.2.1: Seja $C: \vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + (2-t)\vec{j}$, $t \in [0,1]$. Calcular a integral de linha $\int_C (x^2y-2)dS$.

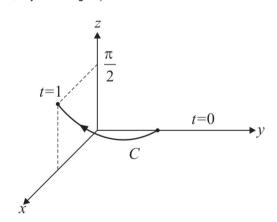
Nesse exemplo temos que $\vec{r}'(t) = \vec{i} - \vec{j}$ e $\|\vec{r}'(t)\|$.= $\sqrt{2}$.

Logo,
$$\int_{C} (x^{2}y - 2)dS = \int_{0}^{1} \left[((1+t)^{2}(2-t) - 2\right] . \sqrt{2}dt$$
$$= \sqrt{2} \int_{0}^{1} (3t - t^{3})dt$$
$$= \sqrt{2} \left[\frac{3t^{2}}{2} - \frac{t^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Exemplo 2.2.2: Calcular a integral de linha $\int_C (xy^2-z^2)dS$, ao longo da curva C dada por:

$$\vec{r}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + t\vec{k}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(A curva em questão é uma hélice, vejamos a figura).



Como $\vec{r'}(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + \vec{k}$, então $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + 1^2} = \sqrt{2}$.

Logo,

$$\int_{C} (xy^{2} - z^{2}) dS = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen}(t) \cos^{2}(t) - t^{2} \right] \sqrt{2} dt$$

$$= \sqrt{2} \left[-\frac{\cos^{3}(t)}{3} - \frac{t^{3}}{3} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \left[-\frac{\pi^{3}}{24} + \frac{1}{3} \right] = \frac{\sqrt{2}}{24} (8 - \pi^{3}).$$

2.3 Integrais de linha em relação a x, y e z

Seja C uma curva de linha e $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ uma partição. Considerando os pontos $P_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ e $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, denotamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Logo, definimos

$$\int_C f(x, y, z) dx = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^n f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta x_i,$$

$$\int_{C} f(x, y, z) dy = \lim_{\max \Delta S_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}\right) \Delta y_{i},$$

$$\int_{C} f(x, y, z) dz = \lim_{\max \Delta S_{i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}^{*}, y_{i}^{*}, z_{i}^{*}\right) \Delta z_{i}.$$

Agora, se C: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$, então:

$$\int_{C} f(x, y, z) dx = \int_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt$$

e, similarmente as outras integrais são $\int_C f(x,y,z) dy$ e $\int_C f(x,y,z) dz$.

Exemplo 2.3.1: Calcular $\int_{\mathcal{C}} (xy+z)dx$, sendo C como nos casos a seguir:

a)
$$C_{i}$$
: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0,1]$

b)
$$C_2$$
: $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (1-t)\vec{j} + (1-t)\vec{k}$, $t \in [0,1]$

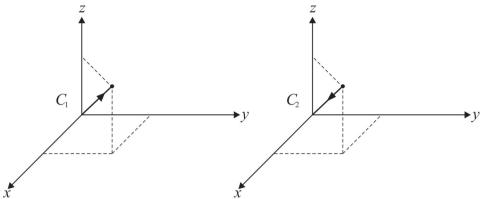
a)
$$\int_{C_1} (xy+z)dx = \int_0^1 (t^2+t).1dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

b)
$$\int_{C_0} (xy+z)dx = \int_0^1 \left[(1-t)^2 + (1-t) \right] \cdot (-1)dt$$

$$=-\int_{0}^{1}(2-3t+t^{2})dt$$

$$= -\left(2t - \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -\frac{5}{6}.$$

Observação 2.3.1: É importante observarmos que as curvas acima descrevem os mesmos pontos, mas os sentidos são opostos:



Seja C uma curva. A curva -C consiste dos mesmos pontos que a curva C , percorridos em sentido contrário.

Temos que:

$$\int_C f(x, y, z) dx = -\int_{-C} f(x, y, z) dx$$

e similarmente para os outros casos em y e z.

Também é válida a propriedade:

$$\int_{C} \left[f(x,y,z) + g(x,y,z) \right] dx = \int_{C} f(x,y,z) dx + \int_{C} g(x,y,z) dx.$$

Exemplo 2.3.2: Calcular $\int_C (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy$, sendo C: $\vec{r}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$, $t \in [0,\pi]$.

$$\int_{C} (x^{2} - y^{2}) dx = \int_{0}^{\pi} \left[\operatorname{sen}^{2}(t) - \cos^{2}(t) \right] \cos(t) dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left[2 \operatorname{sen}^{2}(t) - 1 \right] \cos(t) dt$$

$$= \left[2 \frac{\operatorname{sen}^{3}(t)}{3} - \operatorname{sen}(t) \right]_{0}^{\pi} = 0.$$

$$\int_{C} (x^{2} + y^{2}) dy = -\int_{0}^{\pi} 1.\operatorname{sen}(t) dt = \cos(t) \Big|_{0}^{\pi} = -2.$$

Assim,

$$\int_{C} \left[(x^{2} - y^{2}) dx + (x^{2} + y^{2}) dy \right] = \int_{C} (x^{2} - y^{2}) dx + \int_{C} (x^{2} - y^{2}) dy$$
$$= 0 + (-2) = -2.$$

2.4 Integração de Funções Vetoriais sobre Curvas

Seja $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, t = [a,b] uma curva lisa e

$$\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$$

uma função vetorial (campo vetorial).

Então,
$$\overrightarrow{r'}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}$$
 ou

$$\vec{dr} = \left[x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \right] dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

e escrevemos
$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C \left[f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \right].$$

Definição 2.4.1: Se $\overrightarrow{F}(t)$ é um campo vetorial contínuo e C uma curva lisa orientada, então a integral de linha de \overrightarrow{F} ao longo de C é $\int_C \overrightarrow{F} . d\overrightarrow{r}$.

Se $C: \vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$, então:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a}^{b} \vec{F} \left(\vec{r}(t) \right) \vec{r'}(t) dt.$$

Exemplo 2.4.1: Calcular $\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x,y) = sen(x)\vec{i} - \cos(y)\vec{j}$ se C: $\vec{r}(t) = t^{2}\vec{i} + t\vec{j}$, $0 \le t \le \pi$.

Temos que
$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) dt = \int_{0}^{\pi} [sen(t^{2})\vec{i} - \cos(t)\vec{j}] \cdot [2t\vec{i} + \vec{j}] dt$$

$$\int_{0}^{\pi} (2tsen(t^{2}) - \cos(t))dt = (-\cos(t^{2}) - sent)|_{0}^{\pi} = 1 - \cos(\pi^{2}).$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Se $ec{T}=ec{r}(s)$ denota o vetor tangente unitário (logo, s é o parâmetro de comprimento de arco) ao longo de C, então

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) dt = \int_{a}^{b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(s) ds = \int_{c}^{b} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Cabe observarmos que $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}$ tem sinal positivo se ambos vetores estiverem orientados mais ou menos na mesma direção, $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}$ é zero se \overrightarrow{F} e \overrightarrow{T} são perpendiculares e $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}$ é negativo se os vetores tiverem direções mais ou menos opostas.

Então $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T} ds$ pode ser interpretado como o efeito acumulado da magnitude de \overrightarrow{F} ao longo de C.

Uma aplicação importante das integrais de linha é que $\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pode ser interpretado como o trabalho realizado pelo campo de forças \vec{F} para deslocar uma partícula ao longo da curva \vec{r} .

Se a curva C é lisa por partes, então a integral de linha pode ser calculada somando-se as integrais de linha ao longo das seções lisas.

Exemplo 2.4.2: Calcular $\int_C x y^2 dx + y dy$, sendo C o triângulo com vértices (0,0), (1,0) e (2,2), com o trajeto antihorário.

Consideremos a seção $C_{\rm 1}$ = $t\dot{i}+0\dot{j}$, $t\in[0,1]$:

$$\int_{C} x y^{2} dx + y dy = \int_{0}^{1} (t \cdot 0^{2} \cdot 1 + 0) dt = \int_{0}^{1} 0 dt = 0$$

A seguir a seção C_2 = (1+t) \dot{i} + 2t \dot{j} , $t \in [0, 1]$:

$$\int_{C} x y^{2} dx + y dy = \int_{0}^{1} (1+t)(2t)^{2} \cdot 1 + 2t dt = \left(t^{4} + \frac{4}{3}t^{3} + 2t^{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{13}{3}$$

Enfim, a seção $C_3 = (2-2t) \stackrel{\cdot}{i} + (2-2t) \stackrel{\rightarrow}{j}$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_{C} x y^{2} dx + y dy = \int_{0}^{1} (2 - 2t)(2 - 2t)^{2} \cdot (-2) + (2 - 2t)(-2) dt = (4t^{4} - 16t^{3} + 26t^{2} - 20t + 4)\Big|_{0}^{1} = -6$$

Logo:

$$\int_{C} x y^{2} dx + y dy = \int_{C} x y^{2} dx + y dy + \int_{C} x y^{2} dx + y dy + \int_{C} x y^{2} dx + y dy = 0 + \frac{13}{3} - 6 = -\frac{5}{3}$$

Isto significa que para deslocar uma partícula no campo de força $\vec{F}(x,y) = x \ y^2 \vec{i} + y \vec{j}$ de maneira que faça um trajeto como o da curva lisa por partes C, foi realizado um trabalho de $-\frac{5}{3}$ (unidades físicas respectivas).

ATIVIDADES

Lista 2.1 - Ver exemplos E37 ao E40 no apêndice V.

- 1. Seja $C: t\dot{i} + t^2 \dot{j} + t^3 \dot{k}$, $0 \le t \le 1$. Calcular as seguintes integrais de linha:

- a) $\int_C x y^2 z^2 ds$ b) $\int_C x y^2 z^2 dx$ c) $\int_C x y^2 z^2 dy$ d) $\int_C x y^2 z^2 dz$
- 2. Calcular a integral de linha $\int [(x-y)d\ x + (x+y)d\ y]$, sendo C:
- a) o segmento de reta de (0,1) a (1,0),
- b) o arco cúbico $y = 1 x^3$ de (0,1) a (1,0),
- c) a curva $y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ de (0,1) a (1,0) .
- 3. Calcular a integral de linha $\int [yzdx xzdy + xydz]$, sendo $C: e^t \vec{i} + e^{3t} \vec{j} + e^{-t} \vec{k}$, $0 \le t \le 1$.
- 4. Calcular $\int [ydx xdy]$, sendo C:
- a) o triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1) orientado no sentido anti-horário;
- b) o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1) orientado no sentido anti-horário.
- 5. Calcular $\int \left[x^2 z dx y x^2 d y + 3 d z \right]$ quando C é:
- a) o triângulo de vértices (0,0,0), (1,1,0) e (1,1,1), orientado na ordem em que foram enumerados os vértices,
- b) a linha poligonal de vértices (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) e (1,1,1) orientada na ordem em que foram enumerados os vértices.
- 6. Calcular $\int \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, sendo
- a) $\vec{F}(x, y) = x y \vec{i} + y^2 \vec{j}$ e $C : 2\cos(t) \vec{i} + 2\sin(t) \vec{j}$, $0 \le t \le \pi$; b) $\vec{F}(x, y) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ e
- $C: \cos(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \cos^2(t)\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
- 7. Calcular a massa de um arame fino com o formato da curva C : $e^t \mathrm{sen}(t) \dot{i} + e^t \mathrm{cos}(t) \dot{j}$, $0 \le t \le 1$ se a função de densidade linear é proporcional à distância da origem.
- 8. Calcular o trabalho realizado pelo campo de forças \overline{F} na partícula que se move ao longo da curva C , sendo
- a) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ e $C: t^2\vec{i} + t\vec{j}$, $0 \le t \le 1$;
- b) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e C é a linha poligonal com vértices (0,0,0), (1,3,0) e (0,1,3), orientado na ordem em que foram enumerados os vértices.

Respostas páginas 193

9. Um fazendeiro, que pesa 80 Kg, carrega um saco de grãos pesando 10 Kg sobe por uma escada helicoidal circular de raio igual a 5 m em torno de um silo. À medida que o fazendeiro sobe, os grãos vazam a uma razão de 2 Kg por cada 10 m. Qual o trabalho executado pelo fazendeiro subindo uma distância vertical de 20 m em exatamente quatro revoluções?

2.5 Campos Vetoriais Conservativos e Independência do Caminho

Exemplo 2.5.1: O Campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y) = ydx + xdy$ é conservativo, pois as suas componentes são derivadas parciais da função $\varphi(x,y) = xy$, ou seja $\overrightarrow{F}(x,y) = grad(\varphi(x,y))$.

Vamos calcular o trabalho realizado pelo campo para deslocar uma partícula desde a origem (0,0) até o ponto (1,1), através de diferentes trajetos:

a) C_1 : $t\vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{1} (t \cdot 1 + t \cdot 1) dt = \int_{0}^{1} 2t dt = t^2 \Big|_{0}^{1} = 1.$$

b) C_2 : $t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{1} (t^2 \cdot 1 + t \cdot (2t)) dt = \int_{0}^{1} 3t^2 dt = t^3 \Big|_{0}^{1} = 1.$$

c) C_3 : $t\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j}$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{t} \cdot 1 + t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) dt = \int_{0}^{1} \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = \sqrt{t^3} \Big|_{0}^{1} = 1.$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Todas as integrais acima são iguais independentemente do caminho de integração.

Teorema 2.5.1: Seja $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ um campo vetorial conservativo com alguma região aberta D contendo $(x_0, y_0) e(x_1, y_1)$ e tal que nessa região as funções f(x, y), g(x, y) são contínuas.

Se C for uma curva lisa por partes que começa em (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_1) e está contida na região D, então $\vec{F}(x,y) = grad(\phi(x,y)) = \nabla \phi(x,y)$, é

$$\int_{C_2} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0).$$

Prova: Seja C: $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ de maneira que $(x_0, y_0) = \vec{r}(a)$ e $(x_1, y_1) = \vec{r}(b)$

Logo,

$$\vec{F}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$$

$$e$$

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t)) dt = \varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a))$$

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(x_{1}, y_{1}) - \varphi(x_{0}, y_{0}).$$

Definição 2.5.1: Uma curva $C: \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, é fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Consequência: Sejam C e \overrightarrow{F} como no teorema anterior. Além do mais, se C é fechada, então:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Mais ainda, pode ser verificado facilmente que C é fechada e lisa por partes, então:

$$\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

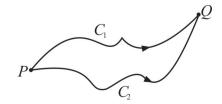
As afirmações recíprocas podem ser enunciadas no teorema abaixo.

Teorema 2.5.2: Se f(x, y) e g(x, y) são contínuas em alguma região D aberta e conexa, então as seguintes afirmações são equivalentes.

- a) $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ é um campo vetorial conservativo em D.
- b) $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para cada curva C fechada e lisa por partes contida em D.
- c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independentemente do caminho de qualquer ponto P em D a qualquer ponto Q em D, para cada curva C lisa por partes contida em D.

Prova:

- a) \Rightarrow b) Enunciado no parágrafo anterior
- b) \Rightarrow c) Observe a figura: Sejam C_1 e C_2 curvas lisas por partes de P a Q.



Logo $C_1 \cup (-C_2)$ é uma curva lisa por partes e fechada.

Assim,

$$\int_{C_1\cup (-C_2)} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

Mas.

$$\int\limits_{C_1 \cup (-C_2)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int\limits_{-C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \; ,$$

$$\int\limits_{C_1 \cup (-C_2)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int\limits_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \,.$$

Logo,
$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$
.

c) \Rightarrow a) : Suponhamos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho para qualquer curva lisa por partes em D.

Devemos mostrar que existe uma função $\phi(x,y)$ tal que $\nabla \phi = \overrightarrow{F}$, ou seja, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = f$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = g$.

Fixando um ponto $(a, b) \in D$, definimos

$$\phi(x,y) = \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde C é uma curva lisa por partes de (a, b) a (x, y).

Como $\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho, então $\phi(x,y)$ possui um único valor. Este fato prova que ϕ é uma função real nas variáveis $x \in y$.

Dado $(x, y) \in D$, devemos observar que sempre é possível construir a curva lisa por partes de (a, b) até (x, y) e de (x, y), como mostra a figura:



Temos então, que $\phi(x,y) = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} (fdx + gdy) + \int_{C_2} (fdx + gdy)$.

A primeira integral de linha não depende de y, logo

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{C_1} (f dx + g dy) = 0$$

е

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} (f dx + g dy) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} g dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} g(x, u) du = g(x, y).$$

Similarmente, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, y)$.

Teorema 2.5.3: Se f(x, y) = g(x, y) possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta $\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$ é um campo vetorial conservativo, então:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x} \,.$$

Reciprocamente, se D for simplesmente conexo e $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$, $\forall (x,y)\in D$, então:

 $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ é um campo vetorial conservativo.

A prova deste teorema será omitida.

Exemplo 2.5.2: Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^3 - 3xy^2)\overrightarrow{i} + (-3x^2y + y^3)\overrightarrow{j}$. Mostrar que \overrightarrow{F} é conservativo em R^2 e determinar a função ϕ tal que $\nabla \phi = \overrightarrow{F}$ (função potencial).

Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x y$$
 e $\frac{\partial g}{\partial x} = -6x y$.

Pelo teorema 2.5.3, o campo é conservativo.

A função potencial ϕ deve satisfazer $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 - 3xy^2$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -3x^2y + y^3$.

Assim, $\phi(x, y)$ pode ser obtida integrando qualquer uma dessas derivadas.

Por exemplo,

$$\phi(x,y) = \int x^3 - 3xy^2 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$$\phi(x,y) = \int (-3x^2y + y^3)dy = -\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + l(x).$$

Comparando estes resultados podemos concluir que a forma geral da função potencial é

$$\phi(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C,$$

sendo C uma constante real.

Exemplo 2.5.3: O campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ satisfaz:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 1 \neq \frac{\partial g}{\partial x} = -1.$$

Logo, de acordo com o teorema, \overrightarrow{F} não é conservativo em região alguma.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

As condições para um campo vetorial tridimensional ser conservativo é que se $\vec{F}=f\dot{i}+g\dot{j}+h\dot{k}$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

ou seja, o rotacional de $\overrightarrow{F}\,$ é $\overrightarrow{0}$.

ATIVIDADES

Lista 2.2

1. Determinar se \overrightarrow{F} é um campo vetorial conservativo. Em caso afirmativo, achar uma função potencial para tal campo.

a)
$$\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$$
,

b)
$$\vec{F}(x, y) = e^x \cos(y) \vec{i} - e^x \sin(y) \vec{j}$$

c)
$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{i} - \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{j}$$
,

d)
$$\vec{F}(x, y) = -y \operatorname{sen}(x y) \vec{i} - x \operatorname{sen}(x y) \vec{j}$$

2

- a) Mostrar que a integral de linha $\int_C \left[2xydx + x^2dy \right]$ é independente do caminho.
- b) Calcular a integral de linha anterior ao longo do segmento de reta de (1,0) a (0,1) .
- c) Calcular a integral de linha ao longo do mesmo segmento de reta anterior, utilizando 2.4.1.
- 3. Mostrar que a integral $\int_C [ydx + (x+2y)dy]$ é independente do caminho e calcular a integral

$$\int_{(2,3)}^{(4,6)} [ydx + (x+2y)dy].$$

4. Verificar se $\vec{F}(x, y) = y z\vec{i} + x z\vec{j} + x^2 y\vec{k}$ é um campo conservativo.

5. Seja
$$\vec{F}(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

a) Mostrar que
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
 sendo $C_1 : \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$, $0 \le t \le \pi$ e $C_2 : \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$, $0 \le t \le \pi$.

- b) Verificar que as componentes f(x,y) e g(x,y) satisfazem $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.
- c) Explicar por que os resultados obtidos nas partes anteriores não contradizem 2.4.1.

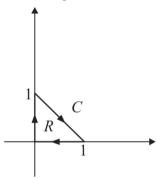
Respostas página 194

2.6 Teorema de Green

Teorema 2.6.1: Seja R uma região plana simplesmente conexa, cuja fronteira é uma curva C lisa por partes, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário. Se f(x, y) e g(x, y) possuem derivadas de primeira ordem contínuas em R, então:

 $\int_{C} (fdx + gdy) = \iint_{\Re} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA.$

Exemplo 2.6.1: Usar o teorema de Green para calcular $\int_C x^2 y dx + x dy$ ao longo de C como é mostrado na figura.



Pelo teorema de Green:

$$\int_{C} x^{2} y dx + x dy = \iint_{\Re} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Re} (1 - x^{2}) dA = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1 - x} (1 - x^{2}) y \Big|_{0}^{1 - x} dx = \int_{0}^{1} (1 - x - x^{2} + x^{3}) dx = \frac{5}{12}$$



Lista 2.3

- 1. Utilizando o teorema de Green, calcular a integral de linha $\int_C y dx + x dy$], onde C é a circunferência unitária orientada em sentido horário.
- 2. Utilizando o teorema de Green, calcular a integral $\int_C [ydx + xdy]$ onde C é o triângulo com vértices (0,1), (2,1) e (4,2).
- 3. Podemos verificar que a área de uma região R, encerrada por uma curva C lisa por partes, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário, é dada por :

$$\operatorname{área}(R) = \frac{1}{2} \int_{C} \left[-y dx + x dy \right].$$

Mediante essa fórmula, calcular a área da região varrida pelo segmento de reta desde a origem até o ponto com coordenadas $\left(\frac{a}{2}(e^t+e^{-t}),\frac{b}{2}(e^t-e^{-t})\right)$, sendo a>0 e b>0, constantes fixas, e t variando de t=0 a $t=t_0$ com $t_0\geq 0$.

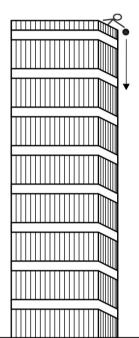


3.1 Noções gerais

Equações diferenciais são equações que envolvem uma função incógnita e suas derivadas, além de variáveis independentes. Através de equações diferenciais podemos fazer a formulação diferencial dos modelos representativos de vários fenômenos estudados, tanto nas ciências físicas, como nas ciências biológicas e sociais. Os primeiros exemplos de equações diferenciais encontramos em algumas Leis da Física. Porém, com o desenvolvimento do conhecimento científico, usamos equações diferenciais em muitas áreas desse conhecimento. Com os exemplos abaixo, temos a intenção de motivar o estudo de equações diferenciais que propomos, mostrando algumas aplicações das mesmas.

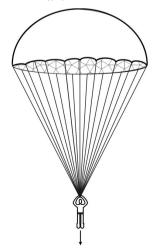
Exemplo 3.1.1: Queda livre de um corpo quando é desprezado o coeficiente de atrito.





Exemplo 3.1.2: Queda livre de um corpo quando consideramos a resistência do ar.

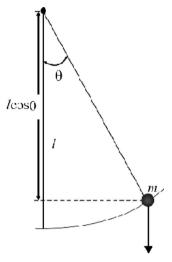
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = m g - k\frac{dy(t)}{dt} \text{ ou } m\frac{dv(t)}{dt} = m g - kv(t)$$





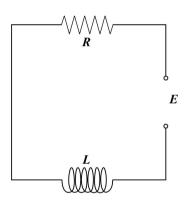
Exemplo 3.1.3: Movimento de um pêndulo simples.

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g sen\theta = 0$$



Exemplo 3.1.4: Corrente num circuito elétrico.

$$L\frac{d\ I}{d\ t} + RI = E$$



Exemplo 3.1.5: Forma assumida por um cabo suspenso.

$$y^{\prime\prime} = k\sqrt{1 + (y^{\prime})^2}$$

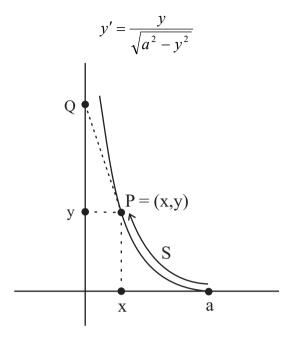


Fonte: FAMAT em revista n°5 - setembro/2005



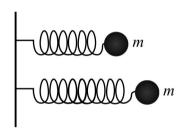
Fonte: www.guiasaovicente.com.br

Exemplo 3.1.6: Problemas de perseguição.



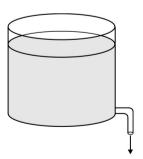
Exemplo 3.1.7: Sistema massa-mola: posição ocupada pela massa $\,m\,$ no sistema.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$



Exemplo 3.1.8: Problemas de vazão.

$$h' = -k\sqrt{h}$$



Ainda podermos citar outras aplicações, facilmente encontradas na bibliografia, tais como: resistência de fluidos; juros; dinâmica populacional; datação de carbono 14; lei de resfriamento de Newton, absorção de drogas; problemas de diluição, decaimento radioativo, etc..

Nos exemplos 3.1.1 ao 3.1.8, a função incógnita é função de uma variável independente; por isso as derivadas envolvidas são totais e as equações são designadas por **equações diferenciais ordinárias (EDO)**. Quando a função incógnita for função de mais de uma variável, as derivadas presentes na equação serão parciais e a equação será designada por **equações diferenciais parciais (EDP)**. Aqui estudaremos somente algumas equações diferenciais ordinárias.

A forma geral das equações diferenciais ordinárias é dada por:

$$F(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

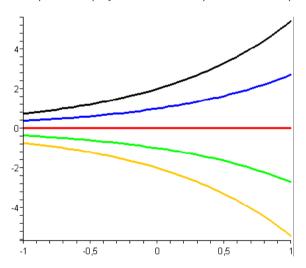
para $n \in \mathbb{N}$ fixado. **Ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada $n \in \mathbb{N}$ que figura nessa equação. Além disso, as equações diferenciais ordinárias podem ser apresentadas tanto na **forma normal** y'(x) = f(x, y(x)), como na **forma diferencial** M(x, y)d x + N(x, y)d y = 0.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

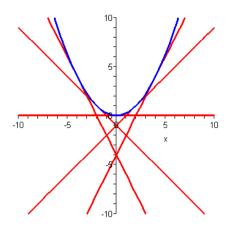
• Resolver uma equação diferencial significa encontrar uma função incógnita que satisfaça identicamente essa equação diferencial. Assim, solução de uma equação diferencial é uma função, definida num certo intervalo I, tal que, conjuntamente com as suas derivadas, verifica a equação. Solução geral é uma expressão que contém um ou mais parâmetros reais arbitrários e que nos fornece todas as soluções da equação. Solução particular é uma qualquer solução da equação satisfazendo certas condições dadas. Certas equações diferenciais possuem ainda solução que foge ao formato geral, denominada de solução singular.

Os comandos após o símbolo > correspondem a "comandos do software MAPLE".

Exemplo 3.1.9: A solução geral da equação y'(x) = y(x) é a função $y(x) = C e^x$, $C \in \mathbf{R}$, que representa uma **família de curvas**, enquanto cada uma das curvas abaixo, onde **C=2**, **C=1**, **C=0**, **C=-1**, **C=-2**, são mas soluções particulares. É importante observar que essa equação é uma EDO de primeira ordem e primeiro grau.



Exemplo 3.1.10: A solução geral da equação $\left(\frac{d\ y}{d\ x}\right)^2 - x\frac{d\ y}{x} + y = 0$ é a função $\ y(x) = C\ x - C^2$; as retas $\ y(x) = x - 1$, $\ y(x) = 2x - 4$, $\ y(x) = -x - 1$, etc., são soluções particulares; a parábola $\ y(x) = \frac{x^2}{4}$ é a solução singular. Esse é um exemplo de EDO de primeira ordem e segundo grau. Então, como podemos observar, o **grau de uma EDO** é o grau a que está submetida a mais alta derivada da equação.



Observação 3.1.1: É bastante habitual utilizarmos a designação de *"integrar uma equação"* para "resolver *uma equação"*. Portanto, determinar a **integral geral**, significa determinar sua solução geral.

Observação 3.1.2: No Cálculo Diferencial e Integral já aprendemos a resolver algumas equações diferenciais. Ou seja, na resolução de uma integral temos uma equação diferencial solucionada.

Observação 3.1.3: Campos de direções – Constituem uma ferramenta útil para termos idéia do comportamento das soluções de uma EDO de 1ª ordem sem resolvê-la.

Para obtermos o campo de direções de uma EDO, primeiro consideramos a equação na forma normal. Geometricamente, a forma normal estabelece, em qualquer ponto, o valor do coeficiente angular y' da reta tangente à solução da equação diferencial nesse ponto. Então, em cada ponto de uma malha retangular, desenhamos um segmento orientado que tem inclinação igual a da reta tangente à solução que passa pelo ponto da malha. A seguir, mostramos, usando MAPLE, a relação entre o campo de direções e as soluções da equação diferencial do exemplo 3.1.9.

> with(DEtools):

> with(plots):

> eq:=diff(y(x),x)=y(x)

$$eq := \frac{d}{dx} y(x) = y(x)$$

> dsolve(eq,y(x));

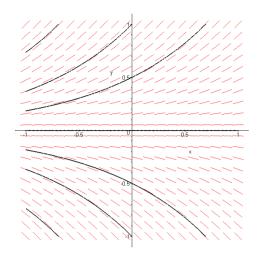
$$y(x) = C1 e^x$$

> g1:=contourplot(y/exp(x),x=-1..1,

y = -1..1, contours = [0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, 0.5, -0.5], numpoints = 3000, color = black, thickness = 2):

> g2:=dfieldplot(eq,y(x),x=-1..1,y=-1..1,arrows=LINE):

> display({g1,g2});



OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

O campo de direções de uma EDO também é muito importante numa **análise qualitativa** das soluções da equação. Por exemplo, na referência "Boyce, W.E. & Di Prima, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Guanabara Koogan, 1994", podemos observar a modelagem da queda livre de um objeto com massa $m=1\,\,0\,\,k\,\,g$, próximo ao nível do mar. Considerando o coeficiente da resistência do ar como $\gamma=2\,\,k\,\,g\,/s$, foi

obtido o modelo matemático $\frac{d v}{d t} = 9, 8 - \frac{v}{5}$. Através do campo de direções dessa equação, é possível

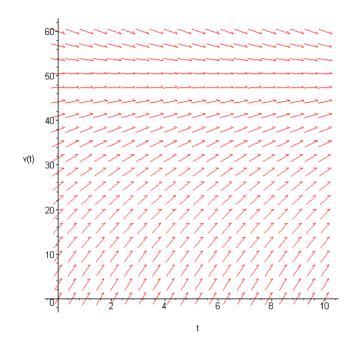
observarmos uma solução de equilíbrio $v(t)=4\,9\,m\,/\,s\,$ (equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar, ou seja, valores de v(t) tais que $\frac{dv}{dt}$ seja zero).

Todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando a variável "tempo" aumenta; abaixo da solução de equilíbrio $\frac{dv}{dt} > 0$; acima, $\frac{dv}{dt} < 0$. Quando o tempo fica muito grande, todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio.

- > with(DEtools):
- > with(plots):
- > eq1:=diff(v(t),t)=9.8-(v(t))/5;

$$eq1 := \frac{d}{dt} v(t) = 9.8 - \frac{1}{5} v(t)$$

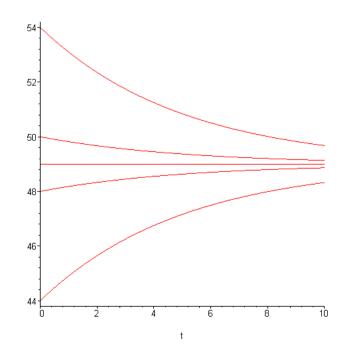
> dfieldplot(diff(v(t),t)=9.8-(v(t))/5,v(t),t=0..10,v=0..60);



> dsolve(eq1,v(t));

$$\mathbf{v}(t) = 49 + \mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{5}\right)} _C1$$

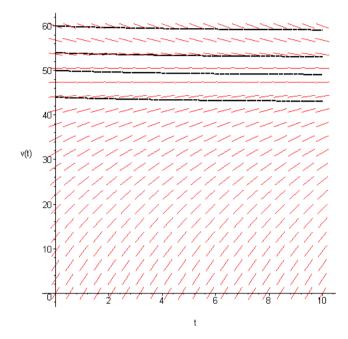
- > A:=plot(49,t=0..10):
- > B:=plot(49+exp(-1/5*t),t=0..10):
- > C:=plot(49+exp(-1/5*t)*5,t=0..10):
- > d:=plot(49+exp(-1/5*t)*(-1),t=0..10):
- > E:=plot(49+exp(-1/5*t)*(-5),t=0..10):
- > display({A,B,C,d,E});



> g1:=contourplot(v-49-exp(-1/5*t),t=0..10,v=0..60,contours=[0,4,10,-6],numpoints=3000,color=black,thickness=2):

> g2:=dfieldplot(eq1,v(t),t=0..10,v=0..60,arrows=LINE):

> display({g1,g2});



Observação 3.1.4: Sem o uso do "software Maple", as soluções do exemplo 3.1.9 são obtidas a partir da situação elementar na forma normal abaixo:

$$y'(x) = f(x) \implies y(x) = \int f(x)dx + C$$
.

Esta seqüência também pode ser aplicada para $\frac{dx}{dy} = f(y)$. Nesse caso, determinamos a solução x(y) . Ainda

podemos ter a situação y'(x) = f(y), para a qual devemos obter a solução implícita y = g(x, y).

Exemplo 3.1.11: A solução geral da equação 2yy'=-6x é dada implicitamente por $y^2=-3x^2+C$. As soluções são elipses (curvas de nível de $z=F(x,y)=y^2+3x^2$). O gráfico de F é um parabolóide elíptico.

> with(DEtools):

> with(plots):

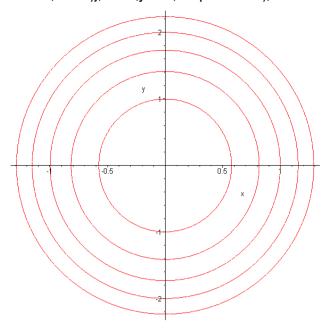
> eq:=2*y(x)*diff(y(x),x)=-6*x;

$$eq := 2 y(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = -6 x$$

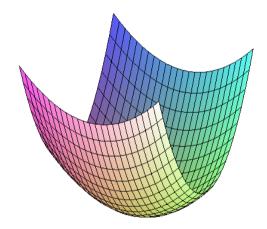
> dsolve(eq,y(x),'implicit');

$$y(x)^2 + 3x^2 - C1 = 0$$

> implicitplot({seq(y^2+3*x^2-C=0,C=-5..5)},x=-3..3,y=-3..3,numpoints=5000);



> plot3d(y^2+3*x^2,x=-10..10,y=-10..10);



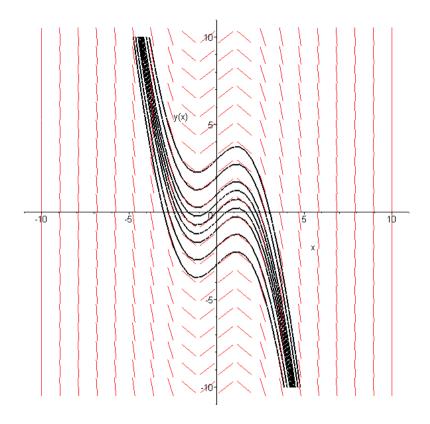
Observação 3.1.5: Para a situação elementar na forma diferencial,

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

que é conhecida como uma equação diferencial com variáveis separáveis, a solução geral é obtida por:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Exemplo 3.1.12: Para equação diferencial $y' = \cos(x) - \frac{x^2}{3}$, temos $y = sen(x) - \frac{x^3}{9} + C$.



Observação 3.1.6: A seguinte situação na forma normal

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

pode ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis mediante seguinte a mudança de variável:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = u(x)x \implies y'(x) = u'(x)x + u(x)$$
.

ATIVIDADES

Lista 3.1 - Ver exemplos E41 ao E45 no apêndice V.

- 1. Mostrar que $\,y=e^{-3x}+c\,$ é solução da equação diferencial $\,y^{\prime}+3\,y=0\,$.
- 2. Mostrar que $\,y = sen(2x)\,$ é solução da equação diferencial $\,y^{\prime\prime} + 4\,y = 0\,$.
- 3. Mostrar que a função $\,y(x)$, definida implicitamente por $\,y^3+3y-x^3=4$, é solução da equação diferencial

$$y' = \frac{x^2}{(y^2 + 1)}.$$

4. Mostrar que a função y(t), definida implicitamente por $(1+y^3)^2=(1+t^2)^3$, é solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(1+y^3)}{y^2(1+t^2)}.$$

5. Mostrar que a função dada na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \alpha \ sent \\ y = \beta \cos t \end{cases}$$

é solução da equação $y' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x}{v}$.

6. Sejam as equações

a)
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

b)
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
.

Mostrar que se $y_1(x)$ é solução da equação (a) e $y_2(x)$ é solução da equação (b), então $y(x) = Cy_1(x) + y_2(x)$ é solução da equação (b), para qualquer C.

3.2 Equações Lineares de 1° Ordem

Equações lineares de primeira ordem são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

onde P(x) e Q(x) são funções contínuas em um intervalo I. A função incógnita e suas derivadas aparecem na **forma** linear.

3.2.1 Equações em que P(x) = 0

Na equação linear acima, se P(x) = 0, resulta

$$\frac{dy}{dx} = Q(x) \,,$$

cuja solução obtemos ao integrarmos os dois membros. Assim, a solução geral será:

$$y(x) = \int Q(x)dx + C.$$

 $y(x)=\int Q(x)dx+C\;.$ **Exemplo 3.2.1.1:** A solução geral da equação linear $y'=\cos 3x$, obtida por integração direta, é dada por

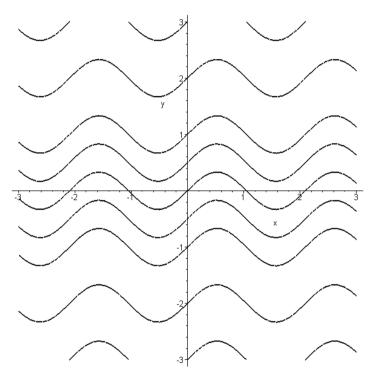
$$y(x) = \frac{1}{3}sen(3x) + C.$$

> with(DEtools):

> with(plots):

> contourplot(y-1/3*sin(3*x),x=-3..3, y=-3..3,contours=[0,1,2,3,5,7,-1,-2,-3,

-5],numpoints=3000,color=black,thickness=2);



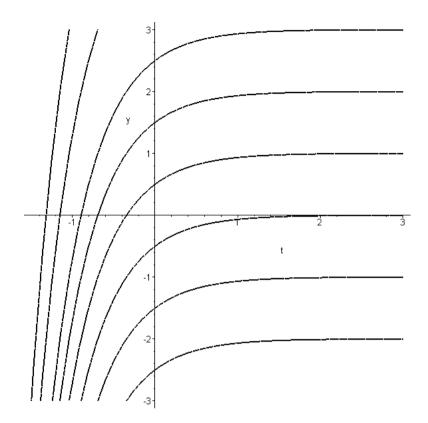
Soluções da equação $y' = \cos 3x$

Exemplo 3.2.1.2: A solução geral da equação linear $y' = e^{-2t}$ é $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$.

> with(DEtools):

> with(plots):

> contourplot(y+1/2*exp(-2*t),t=-3..3, y=-3..3,contours=[0,1,2,3,5,7,-1,-2,-3, -5],numpoints=3000,color=black,thickness=2);



Soluções da equação $\,y^{\prime}=e^{-2t}\,$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Problema de valor inicial (PVI) - é uma equação diferencial a ser resolvida conjuntamente com condições sobre a função incógnita y e as suas derivadas – condições essas a serem satisfeitas para um dado valor da variável independente. Estas condições são chamadas **condições iniciais**.

O problema
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) & \text{é chamado de PVI.} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A solução do PVI, em um intervalo I, é uma função definida em I tal que sua derivada, também definida em I, satisfaz ο PVI.

Exemplo 3.2.1.3:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{3x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução geral da EDO: $y(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

A solução obtida deve satisfazer a condição inicial y(0)=1, assim, $y(0)=1 \Rightarrow \frac{1}{3}+C=1$, e então $C=\frac{2}{3}$.

Logo,
$$y(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$$
 é a solução do PVI.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Problema de valores de fronteira - é uma equação diferencial a ser resolvida conjuntamente com condições sobre a função incógnita *y* e as suas derivadas - condições essas a serem satisfeitas para dois ou mais valores da variável independente. Estes pontos poderão ser os extremos do intervalo onde se considera a solução, e as referidas condições são designadas por **condições de fronteira**.

Exemplo 3.2.1.4: Resolver a equação y'' + y = 0, com as condições de fronteira y(0) = 2 e $y(\pi/2) = 5$. Esse tipo de problema será resolvido posteriormente guando estudarmos equações de segunda ordem.

3.2.2. Equações em que $P(x) \neq 0$ (caso geral)

Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Vamos usar uma função auxiliar $\mu(x) \neq 0$, de forma que ao multiplicarmos essa equação por $\mu(x)$, obtemos uma

equação do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x)$, cuja solução geral obtém-se com a integração de ambos os membros.

Esta função $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ será chamada **fator integrante da equação linear**; depois mostraremos porque $\mu(x)$ deve ser definida dessa forma.

Inicialmente, vamos multiplicar a equação por $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$

Como

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(e^{\int P(x)dx} \right) = e^{\int P(x)dx} \frac{d}{dt} \left(\int P(x)dx \right),$$

ou seja,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = e^{\int P(x)dx} P(x) = \mu(x)P(x) ,$$

após a substituição desse resultado na equação $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$, temos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)Q(x).$$

Sabemos que $\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$, então substituindo esse resultado no primeiro membro dessa

equação resultante, vem:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x) \implies \mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx \implies y = \frac{1}{\mu(x)} \Big[\int \mu(x)Q(x)dx + C \Big].$$

Finalmente, a solução geral será:

$$y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}} \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x) dx + C \right].$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Agora vamos provar porque $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$:

Inicialmente, devemos observar que $\mu(x) \neq 0$ deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)P(x).$$

Como $\mu(x) \neq 0$, podemos multiplicar essa equação por $\frac{1}{\mu(x)}$:

$$\frac{1}{\mu(x)} \cdot \frac{d\mu(x)}{dx} = P(x) \Rightarrow \frac{d}{d\mu} (\ln \mu(x)) \frac{d\mu(x)}{dx} = P(x),$$

e pela regra da cadeia, resulta

$$\frac{d}{d(x)}(\ln \mu(x)) = P(x).$$

Agora, integrando ambos os membros, obtemos

$$\ln \mu(x) = \int P(x)dx + C_1,$$

de onde:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\int P(x)dx} = C \cdot e^{\int P(x)dx}.$$

Portanto, de fato $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

Observação 3.2.2.1: É importante salientarmos que qualquer múltiplo de $\mu(x)$ também será um fator integrante, ou um fator de integração, para a EDO linear de 1ª ordem.

Exemplo 3.2.2.1: Determinar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = t^2$.

F.I:
$$e^{\int_{t}^{1} dt} = e^{\ln t} = t$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante, obtemos:

$$t\frac{dy}{dt} + t\frac{y}{t} = t^2 \cdot t \implies t\frac{dy}{dt} + y = t^3 \cdot t$$

O primeiro membro da equação acima é a derivada do produto ty(t):

$$\frac{d}{dt}(ty(t)) = t^3 \Rightarrow ty(t) = \int t^3 dt \Rightarrow ty(t) = \frac{t^4}{4} + C \Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{C}{t}.$$

Logo, a solução geral é $y(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{C}{t}$.

Exemplo 3.2.2: Resolver o PVI $\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = t^2 \\ y(2) = 4 \end{cases}.$

A solução geral da equação já foi determinada no exemplo anterior: $y(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{C}{t}$.

Agora, temos de satisfazer a condição inicial y(2)=4: assim, para t=2 temos y=4.

Com a substituindo da condição inicial na solução y(t):

$$4 = \frac{2^2}{4} + \frac{C}{2}$$

determinamos C = 6.

Sendo assim, a solução do PVI é dada por $y = \frac{t^3}{4} + \frac{6}{t}$.

Exemplo 3.2.2.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} - 2y = e^t$.

F.I:
$$e^{\int -2dt} = e^{-2t}$$

Quando multiplicamos a equação pelo fator integrante, obtemos:

$$e^{-2t} \frac{dy}{dt} - e^{-2t} 2y = e^{-2t} e^{t}$$
,

ou seja,

$$e^{-2t} \frac{dy}{dt} - e^{-2t} 2y = e^{-t}$$
.

A seguir, usamos a regra da cadeia e procedemos a integração dos dois membros da equação:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-2t} y \right) = e^{-t} \implies e^{-2t} y = -e^{-t} + C \implies y = -\frac{e^{-t}}{e^{-2t}} + \frac{C}{e^{-2t}} \implies y = -e^{t} + Ce^{2t}$$

Logo, a solução geral é $y = -e^t + Ce^{2t}$.

- > with(DEtools):
- > with(plots):
- > odeadvisor(eq);

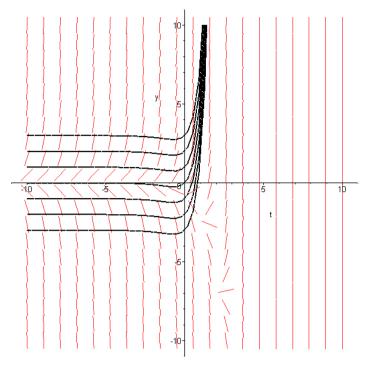
> eq:=diff(y(t),t)-2*y(t)=exp(t);

$$eq := \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2 y(t) = \mathbf{e}^t$$

> dsolve(eq,y(t));

$$\mathbf{y}(t) = -\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{(2t)} \quad C1$$

- > g1:=contourplot(y+exp(t)-exp(2*t),t=-10..10,y=-10..10,contours=[0,1,2,3,-1,-2,-3],numpoints=3000,color=black,th ickness=2):
- > g2:=dfieldplot(eq,y(t),t=-10..10,y=-10..10,arrows=LINE):
- > display({g1,g2});



> limit(-exp(t)+exp(2*t),t=infinity);

 ∞

> limit(-exp(t)+exp(2*t),t=0);

0

> limit(-exp(t)+exp(2*t),t=-infinity);

0

Exemplo 3.2.2.4: Calcular a velocidade de um paraquedista com massa corporal m=75kg, no instante (t=15s) em que abre o para-quedas, considerando o coeficiente de atrito k=5kg/s. Calcular também a velocidade limite, considerando o coeficiente de atrito, após a abertura do pára-quedas, como k=110kg/s.

O modelo matemático que descreve a queda livre, obtido a partir da 2^a Lei de Newton $\sum_i F_i = ma$, é a EDO linear de 1^a ordem:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = g,$$

com g a aceleração gravitacional.

A solução dessa equação diferencial é:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}}.$$

A constante de integração é determinada a partir da condição inicial. Assim, para $\, v(t=0) = 0 \,$, temos:

$$C = -\frac{mg}{k};$$

nesse caso a solução particular é

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right), \quad t \le 15s.$$

Então, a velocidade alcançada no instante (t = 15s) é v = 92,92m/s.

A distância percorrida em queda livre é obtida por:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow y(t) = \int v(t)dt \Rightarrow y(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right) + C.$$

Assim, para y(t=0)=0:

$$C = -\frac{m^2g}{k^2};$$

passados 15s, temos y = 811,15m.

Com a abertura do para-quedas, devido ao maior coeficiente de atrito, a variação da velocidade começa a decrescer, até ser eventualmente atingido um equilíbrio entre a força gravitacional e a força de atrito; a partir desse momento a velocidade é constante e para um tempo suficientemente grande teremos a chamada velocidade limite:

$$v_{\min} = \lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{k} = \frac{75 \times 9.8}{110} = 6.68 m/s$$
.

Para a obtenção da solução geral das equações lineares de primeira ordem, em que $P(x) \neq 0$, também estudaremos os **métodos "de Bernoulli"** e "**de Lagrange"**, além da utilização de fator integrante, como procedemos.

3.2.2.1 Método de Bernoulli

Inicialmente, vamos considerar y = u.v, com u e v funções incógnitas arbitrárias, solução de uma EDO linear de primeira ordem.

Então

$$v = u.v \Rightarrow v' = u.v' + u'.v$$
.

Substituindo y e y' na equação linear não homogênea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, obtemos:

$$uv'+u'v+P(x)uv=O(x)$$
.

ou

$$u.[v'+P(x)v]+u'v = Q(x).$$

Considerando que v pode ser determinada arbitrariamente, temos:

$$v'+P(x) v = 0 \Rightarrow v' = -P(x) v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x) dx \Rightarrow v = e^{-\int P(x) dx}$$

Substituindo v'+P(x).v=0 e $v=e^{-\int P(x)dx}$ em u.[v'+P(x)v]+u'.v=Q(x), resulta:

$$u' \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \int du = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow$$
$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Finalmente, levando u e v à equação, temos a solução geral na forma:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right].$$

Exemplo 3.2.2.1.1: Achar a solução geral do PVI $\begin{cases} y' + y = x \\ y(1) = \frac{y_0}{e} \end{cases}$

A solução da equação diferencial pode ser obtida pelo método de Bernoulli: inicialmente, fazemos $y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + u'.v$; após, substituímos na EDO e obtemos:

$$u.v'+u'.v+uv = x \Rightarrow u.[v'+v]+u'.v = x$$
.

A seguir, determinamos v:

$$\Rightarrow v'+v=0 \Rightarrow v'=-v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int dx \Rightarrow \ln v = -x \Rightarrow v = e^{-x}$$

Usando esse resultado, encontramos u:

$$u'.e^{-x} = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x.e^x \Rightarrow \int du = \int x.e^x dx \Rightarrow u = \int x.e^x dx \Rightarrow u = x.e^x - e^x + C$$

Logo, a solução geral da EDO é $y = (x-1) + C.e^{-x}$.

Agora, temos de satisfazer a condição inicial $y(1)=\frac{y_0}{e}$: assim, para x =1 temos $y=\frac{y_0}{e}$.

Com a substituindo da condição inicial na solução determinamos $C = y_0$.

A solução do PVI é dada por $y = (x-1) + y_0 e^{-x}$.

Exemplo 3.2.2.1.2: Achar a solução geral da equação $y' = y \cdot tgx + \cos x$ usando o método de Bernoulli.

Substituindo y = u.v e y' = u.v' + u'.v na equação, temos:

$$u.v'+u'.v = u.v.tgx + \cos x \Rightarrow u.[v'-v.tgx]+u'.v = \cos x$$

Da igualdade v'-v.tgx=0, temos:

$$v' = v \cdot \lg x \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \lg x dx \Rightarrow \ln v = -\ln(\cos x) \Rightarrow v = e^{-\ln(\cos x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = e^{\ln(\cos x)^{-1}} \Rightarrow v = (\cos x)^{-1}.$$

A seguir, determinamos u:

$$u'.(\cos x)^{-1} = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos^2 x \Rightarrow u = \int \cos^2 x dx \Rightarrow u = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot 2 dx \Rightarrow u = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sec 2x + C$$

Substituindo u e v na equação: $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x + C\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

Exemplo 3.2.2.1.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t$, através do método de Bernoulli.

Segundo Bernoulli, y = u.v; assim y' = u.v' + u'.v.

Com a substituição na equação, resulta:

$$u.v'+u'.v + \frac{2}{t}u.v = t \Rightarrow u\left[v' + \frac{2}{t}v\right] + u'.v = t$$

De onde temos:

$$v' + \frac{2}{t}v = 0 \Rightarrow v' = -\frac{2}{t}v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2}{t}dt \Rightarrow \ln v = -2\ln t \Rightarrow v = e^{-2\ln t} \Rightarrow v = t^{-2}.$$

Agora, determinamos u:

$$u'.t^{-2} = t \Rightarrow u' = t^3 \Rightarrow u = \frac{t^4}{4} + C$$
.

Substituindo $u \in v \text{ em } y = u.v$, chegamos a seguinte solução geral: $u = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}$.

3.2.2.2 Método de Lagrange (Método de variação dos parâmetros)

Dada uma equação diferencial linear, quando o termo independente da variável incógnita é nulo, a equação é denominada homogênea. Assim, dada a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

se $Q(x) \neq 0$, a equação é dita equação diferencial linear não homogênea; se Q(x) = 0 , temos uma equação

diferencial linear homogênea.

Primeiramente, dada uma equação diferencial linear homogênea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

por integração obtemos a solução $y=C.e^{-\int P(x)dx}$, onde C é uma constante arbitrária.

Agora, se a equação é não homogênea, podemos usar, além dos métodos já estudados, o método de Lagrange para determinar a solução dessa equação. Nesse método, usamos a solução $y = C.e^{-\int P(x)dx}$ e consideramos a constante como uma função de x, ou seja, fazemos variar o parâmetro:

$$y = C(x).e^{-\int P(x)dx},$$

com C(x) uma função derivável que precisa ser determinada.

Derivando $y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-\int P(x) dx} \cdot \frac{d}{dx} \left(C(x) \cdot \right) + C(x) \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-\int P(x) dx} \right).$$

Substituindo $y \in \frac{dy}{dx}$ na equação não homogênea, obtemos:

$$e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{d}{dx} (C(x)) - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + P(x) \cdot \left(C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \right) = Q(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (C(x)) = e^{\int P(x)dx} Q(x) \Rightarrow C(x) = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C_1$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$y = C(x).e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int P(x)dx} .Q(x)dx + C_1 \right],$$

onde $\,C_{\scriptscriptstyle 1}\,$ é uma constante arbitrária.

Exemplo 3.2.2.2.1: Resolver a solução geral da equação $y'-y.tgx = \cos x$, usando o método de Lagrange.

Primeiro, vamos considerar a EDO linear homogênea

$$y'-y.tgx=0$$
,

cuja solução é $y = Ce^{\int tgx dx} = Ce^{-\ln(\cos x)} = Ce^{\ln(\cos x)^{-1}} = C(\cos x)^{-1}$.

Pelo método de Lagrange, a solução procurada é da forma $y = \frac{C(x)}{\cos x}$. Temos então:

$$y' = \frac{C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

Substituindo $y \ \mathrm{e} \ y'$ na equação dada, resulta:

$$y' = \frac{C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x} \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Após algumas simplificações, temos como determinar C(x) através da integração de C'(x):

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow C'(x) = \cos^2 x \Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x dx \Rightarrow C(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1.$$

Então, a solução geral é:
$$y = \frac{1}{\cos x} \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \right].$$

A seguir, vamos resolver, por esse método, alguns exemplos que já foram solucionados anteriormente.

Exemplo 3.2.2.2: Achar a solução geral da equação y'+y=x através do método de Lagrange.

Dada a equação homogênea y'+y=0, a solução é $y=Ce^{-\int dx}=Ce^{-x}$.

Logo, a solução de Lagrange será da forma:

$$y = C(x)e^{-x};$$

a derivada dessa função é dada por

$$y' = C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x}$$
.

Substituindo y e y' na equação dada, temos:

$$C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x} + C(x).e^{-x} = x \Rightarrow C'(x) = xe^{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C(x) = \int xe^{x} dx \ C(x) = x.e^{x} - e^{x} + C_{1}.$$

Substituindo em $y = C(x)e^{-x}$:

$$y = (x.e^x - e^x + C_1)e^{-x} \Rightarrow y = x.e^x.e^{-x} - e^x.e^{-x} + C_1.e^{-x} \Rightarrow y = (x-1) + C_1.e^{-x}$$

Exemplo 3.2.2.3: Achar a solução geral da equação $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t$ pelo método de Lagrange.

Inicialmente, resolvemos a equação homogênea $y' + \frac{2}{t}y = 0$:

$$y = Ce^{-\int_{t}^{2} dx} = Ce^{-2\ln t} = Ce^{\ln t^{-2}} = C.t^{-2}$$

Logo, a solução a ser determinada é $y = \frac{C(t)}{t^2}$, cuja derivada é:

$$y' = \frac{C'(t) t^2 - 2t.C(t)}{t^4}$$
.

Substituindo na equação dada:

$$\frac{C'(t).t^{2} - 2t.C(t)}{t^{4}} + \frac{2}{t}\frac{C(t)}{t^{2}} = t$$

$$\frac{C'(t).t^{2}}{t^{4}} - \frac{2C(t)}{t^{3}} + \frac{2C(t)}{t^{3}} = t$$

$$\frac{C'(t).}{t^{2}} = t \Rightarrow C'(t) = t^{3} \Rightarrow C(t) = \int t^{3} dt = \frac{t^{4}}{4} + C_{1}$$

Logo, a solução geral é $y = \frac{t^2}{4} + \frac{C_1}{t^2}$.

Observação 3.2.2.: Muitas vezes é conveniente resolvermos uma EDO linear de 1ª ordem, com função incógnita x(y):

$$(1+y^2)dx = (arc \tan y - x)dy,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{arc \tan y - x}{1+y^2},$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{arc \tan y}{1+y^2},$$

Solução Geral:

ATIVIDADES

Lista 3.2.2 - Ver exemplos E46 ao E52 no apêndice V.

Resolver as equações diferenciais lineares de primeira ordem:

1.
$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

Resp:
$$y = \frac{1}{5}x^3 + Cx^{-2}$$

2.
$$x^2y' + 2xy = 1$$

Resp:
$$yx^2 = C + x$$

$$3. y' \cos^2 x + y = tgx$$

Resp:
$$y + 1 = tg x + Ce^{-tgx}$$

4.
$$y' + x^2y - x^2 = 0$$

Resp:
$$y = 1 + Ce^{-x^3/3}$$

$$5. \frac{dy}{dt} + \frac{ty}{1 - t^2} = t + arcsent$$

5.
$$\frac{dy}{dt} + \frac{ty}{1 - t^2} = t + arcsent$$
 Resp: $y = \sqrt{1 - t^2} \left[\frac{1}{2} (arcsent)^2 - \sqrt{1 - t^2} + C \right]$

6. Seja a EDO linear de 1ª ordem $y' + \frac{2}{x}y - x = 0$. Determinar a solução geral. Determinar os pontos críticos da solução. Calcular $\lim_{x\to 0} y(x)$.

Resp: $y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$; se C > 0, os pontos críticos das soluções são $x = \pm \sqrt[4]{4C}$ e se C < 0 não têm

pontos críticos; $\lim_{x\to 0} y(x) = +\infty$ quando C>0 e $\lim_{x\to 0} y(x) = -\infty$ quando C<0 .

7. Dado o PVI

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y - x = 0\\ y(-2) = 3 \end{cases}$$

Determinar o intervalo de validade da solução.

Resp. $(-\infty,0)$

3.2.3. Equações Transformadas em Lineares

Uma equação de Bernoulli é uma EDO de 1ª ordem da forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

com $n \in \mathbf{R}$ e onde P(x) e Q(x) são funções contínuas em um intervalo I. É claro que se n = 0, n = 1 a equação é linear. Porém, se $n \neq 0$, $n \neq 1$ a equação não é linear. Nesse caso, a mudança de variável

$$z = v^{1-n}$$

transforma a EDO de Bernoulli em uma EDO linear de 1ª ordem.

De fato, se $z = v^{1-n}$, temos:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \implies y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z'$$
.

Substituindo y e y' na equação de Bernoulli, resulta:

$$\frac{1}{1-n}z^{\frac{n}{1-n}}z' + P(x)z^{\frac{1}{1-n}} = Q(x)z^{\frac{n}{1-n}} \implies \frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x),$$

que é uma EDO linear de 1ª ordem.

Observação 3.2.3.1: Com a mudança de variável proposta, se o expoente 1-n for negativo, precisamos verificar separadamente se y=0 é uma solução da EDO de Bernoulli, pois essa solução, nesse caso particular, é eliminada ao fazermos a substituição $z=y^{1-n}$.

Uma equação de Riccatti é uma EDO de 1ª ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

em que $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são contínuas um intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ em I.

Se $y_1(x)$ é uma solução particular da equação de Riccatti, então a mudança de variável

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

reduz a uma EDO linear de 1ª ordem. Assim, podemos concluir que a solução geral de uma equação de Riccatti pode ser determinada desde que se conheça uma solução particular.

Observação 3.2.3.2: Uma equação de Riccatti com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0,$$

tem uma solução $y=\lambda$, λ um número real, se e somente se λ é raiz da equação quadrática

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Observação 3.2.3.3: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções particulares da equação de Riccatti, então a solução geral é dada por:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int a_2(x)(y_2 - y_1)dx},$$

com C uma constante arbitrária.

Observação 3.2.3.4: Se $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ são soluções particulares da equação de Riccatti, então a solução geral é dada por:

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = C,$$

com C uma constante arbitrária.

ATIVIDADES

Lista 3.2.3 - Ver exemplos E53 ao E56 no apêndice V.

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações:

1.
$$y' + y = x^2 y^2$$
;

Resp:
$$y = (2 + 2x + x^2 + Ce^x)^{-1}$$
 e $y = 0$.

2.
$$yy' + xy^2 - x = 0$$
;

Resp: $> eqb:=y(x)*diff(y(x),x)+x*(y(x))^2-x=0;$

$$eqb := y(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + x y(x)^2 - x = 0$$

> dsolve(eqb,y(x));

$$y(x) = \sqrt{1 + e^{(-x^2)}} CI, y(x) = -\sqrt{1 + e^{(-x^2)}} CI$$

> dsolve(eqb,y(x),'implicit');

$$y(x)^2 - 1 - e^{(-x^2)} CI = 0$$

3.
$$y' + y^2 - 2y + 1 = 0$$
;

Resp.
$$y(x) = \frac{x+1+_CI}{x+_CI}$$

4.
$$y' + 4y^2 - 9 = 0$$
;

Resp.
$$y(x) = \frac{9x}{4} + _C1$$

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações, sendo dada uma solução particular:

1.
$$2y' - \frac{y^2}{x^2} = 1$$
; solução particular $y = x$;

2.
$$y' - xy^2 + (2x - 1)y = x - 1$$
; solução particular $y = 1$.

3.3 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Equações diferenciais lineares de segunda ordem são equações da forma

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + f(x)\frac{dy(x)}{dx} + g(x)y(x) = h(x),$$

onde f(x), g(x) e h(x) são funções definidas num intervalo I. Para simplificar a escrita, usaremos a notação

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x).$$

Também vamos considerar o operador diferencial linear L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y.

Em geral, para L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y, temos

i)
$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

$$ii)$$
 $L(C y) = C L(y);$

por isso o operador é chamado linear.

Assim, quando resolvemos a equação $y^{\prime\prime}+f(x)y^{\prime}+g(x)y=h(x)$, determinamos as funções que satisfazem

$$L(y) = h(x)$$
.

Teorema 3.3.1: Teorema de Existência e Unicidade

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \\ y(x_0) = a, \ y'(x_0) = b \end{cases},$$

para f(x), g(x) e h(x) contínuas no intervalo aberto I, $x_0 \in I$, a e b reais, tem uma única solução nesse intervalo.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em KREIDER, D.L., KULLER, R.G. & OSTBERG, D.R., **Equações Diferenciais**, Edgard Blucher, São Paulo, 1972.

3.3.1 Equações Lineares Homogêneas

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea (EDOLH) quando $h(x) \equiv 0$, isto é, pode ser escrita como L(y) = 0:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Observação 3.3.1.1: É importante observarmos as seguintes correspondências:

oscilações livres (sem forças externas) ↔ equações homogêneas oscilações forçadas ↔ equações não homogêneas

Observação 3.3.1.2: Toda EDOLH admite y(x) = 0 como solução. Por esta razão y(x) = 0 é chamada de **solução** trivial.

Teorema 3.3.1.1: Princípio de Superposição

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de uma EDOLH, então qualquer combinação linear $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, com C_1 e C_2 constantes, também é solução.

Demonstração:

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções de uma EDOLH L(y)=0 . Então, $L(y_1)=0$ e $L(y_2)=0$. Pela linearidade, temos $L(C_1y_1+C_2y_2)=C_1L(y_1)+C_2L(y_2)=C_1.0+C_2.0=0$. Logo, $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ também é solução de L(y)=0 , para quaisquer C_1 e C_2 .

Observação 3.3.1.3: Caso particular do "Princípio de Superposição"

Se y(x) é uma solução de uma EDOLH, então qualquer múltiplo Cy(x) também o é.

Exemplo 3.3.1.1: As funções $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_1(x) = e^{3x}$ são soluções da EDOLH y'' - 2y' - 3y = 0.

Exemplo 3.3.1.2: A partir das soluções do exemplo anterior, usando o "Princípio de Superposição", podemos construir uma família de soluções para a equação y'' - 2y' - 3y = 0:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$
.

Exemplo 3.3.1.3: Considerando o PVI

$$\begin{cases} y''-2y'-3y = 0\\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -3 \end{cases}$$

e a família $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, podemos determinar C_1 e C_2 de modo a satisfazer as condições iniciais dadas no PVI:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 + 3C_2 = -3 \end{cases}$$

Encontramos $\,C_1=rac{9}{4}\,\,$ e $\,\,C_2=-rac{1}{4}$; a solução do PVI é $\,y=rac{9}{4}e^{-x}-rac{1}{4}e^{3x}$.

> ode := diff(y(x),x,x) = 2*diff(y(x),x) + 3*y(x);

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 3 y(x)$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = C1 e^{(3x)} + C2 e^{(-x)}$$

> ci := y(0)=2, D(y)(0)=-3;

$$ics := y(0) = 2, D(y)(0) = -3$$

> dsolve({edo,ci});

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{(3x)} + \frac{9}{4}e^{(-x)}$$

Observação 3.3.1.4: De forma simplificada, podemos dizer que duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ditas linearmente independentes se uma não for um múltiplo da outra. Caso contrário são ditas linearmente dependentes.

Observação 3.3.1.5: Se $y_1 = ky_2$, então a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2 = (C_1 + kC_2)y_1$ é da forma $y = Cy_1$, ou seja, a função y_2 é totalmente desnecessária na combinação linear.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Um sistema fundamental de soluções para uma EDOLH de 2ª ordem é um par de soluções linearmente independentes.

Exemplo 3.3.1.4: O conjunto $\{\cos x, sen x\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDOLH

$$y^{\prime\prime} + y = 0;$$

portanto, a partir de uma combinação linear, obtemos a solução geral $y = C_1 \cos x + C_2 sen x$.

> edo := diff(y(x),x,x)+y(x)=0;

> dsolve(edo);

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + y(x) = 0$$
$$y(x) = C1\sin(x) + C2\cos(x)$$

Exemplo 3.3.1.5: Dada a equação y''-1 6y=0, vamos procurar uma solução na forma $y=e^{\lambda x}$ (mais tarde ficará esclarecido por que na forma de exponencial). Substituindo $y=e^{\lambda x}$ na EDOLH, obtemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 1.6 e^{\lambda x} = 0.$$

ou seja,

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 16) = 0;$$

como $e^{\lambda x}>0$, a condição para que $y=e^{\lambda x}$ seja solução da EDOLH y''-1 6y=0 , é que λ seja raiz da equação algébrica:

$$\lambda^2 - 16 = 0$$

Assim, um sistema fundamental de soluções para essa equação é $\left\{ \ y_{_1}=e^{4\mathbf{x}}\ ,\ y_{_2}=e^{-4\mathbf{x}}\ \right\}$.

Observação 3.3.1.6: É importante observarmos que o sistema fundamental de soluções de uma EDOLH não é único. No exemplo anterior, podemos obter outro sistema fundamental $\{y_3, y_4\}$ de soluções para a mesma EDOLH:

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cosh(4x)$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2} = senh(4x)$$
.

Exemplo 3.3.1.6: O conjunto $\left\{e^x,e^{-x}\right\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDOLH

$$y'' - y = 0;$$

entretanto, $\{\cosh x, senh x\}$ é outro sistema fundamental de soluções para essa mesma EDOLH, pois

 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $senh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Portanto, temos formas alternativas de representar a solução geral:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$
 e $y = C_1 \cosh x + C_2 senhx$.

Agora, vamos generalizar a situação do exemplo 3.3.1.6. Dada uma EDOLH y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, se encontrarmos duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2 , então poderemos obter todas as demais soluções fazendo superposição $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Por isso, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ é chamada de solução geral da EDOLH de 2^a ordem.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Seja y_p uma solução particular da equação y'' - 2y' - 3y = 0. Sejam as constantes $a \in b$ definidas por $a = y_p(0)$ e $b = y_p'(0)$.

Vamos considerar o PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$$

e procurar se existem $\,C_{_1}\,$ e $\,\,C_{_2}\,$ tais que

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ -C_1 + 3C_2 = b \end{cases}$$

esse sistema linear é compatível determinado. Resolvendo o sistema encontramos $C_1 = \frac{1}{4}(3a - b)$ e

$$C_2 = \frac{1}{4}(a+b)$$
. Assim, $y_p = y = \frac{1}{4}(3a-b)e^{-x} + \frac{1}{4}(a+b)e^{3x}$ são soluções do PVI; mas pelo

"Teorema de Existência e Unicidade" a solução do PVI é única. Então, concluímos que

$$y_p = \frac{1}{4}(3a-b)e^{-x} + \frac{1}{4}(a+b)e^{3x}$$

e que toda solução particular da EDOLH $\,y^{\prime\prime}-2\,y^{\prime}-3\,y=0\,$ é da forma $\,y=C_{1}e^{-x}+C_{2}e^{3x}$.

Para um sistema linear ser possível e determinado, o determinante da matriz principal deve ser diferente de zero; portanto, conforme exemplificamos acima, o determinante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2(x_0) \end{pmatrix}$$

desempenha um papel fundamental nessa teoria. Ele é conhecido por Wronskiano.

Então, dadas duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, o Wronskiano dessas funções é definido como o determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2(x_0) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.3.1.7: Dadas $y_1(x) = e^{2t}$ e $y_2(x) = e^{3t}$, o Wronskiano é:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} = e^{5t}.$$

Teorema 3.3.1.2: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes, então o Wronskiano dessas funções é nulo.

Demonstração:

Suponhamos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam linearmente dependentes. Suponhamos que $y_1(x) = C y_2(x)$. Dessa forma, temos que a segunda coluna do Wronskiano é um múltiplo da primeira e, portanto, esse determinante se anula para qualquer x.

Observação 3.3.1.7: O teorema acima também pode ser enunciado assim: "se o Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ for diferente de zero, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes".

Observação 3.3.1.8: A recíproca do teorema 3.3.1.2 <u>não</u> é verdadeira: se duas funções são linearmente independentes, nada podemos concluir sobre o Wronskiano.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

As funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ditas linearmente independentes se e somente se a equação

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

implica que $C_1 = C_2 = 0$.

Teorema 3.3.1.3: Duas funções soluções de uma mesma EDOLH são linearmente dependentes se e somente se o seu Wronskiano é nulo.

Demonstração:

Suponhamos $y_1(x)$ e $y_2(x)$, soluções da EDOLH y''+f(x)y'+g(x)y=0 tais que W(x)=0. Precisamos mostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes. Fixemos x_0 no intervalo de definição das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$. A hipótese W(x)=0 implica que o sistema

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução não trivial. Agora, suponhamos (C_1,C_2) uma solução não nula desse sistema algébrico e seja a função $\phi(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. Pelo Princípio de superposição, temos que $\phi(x)$ é uma solução de y''+f(x)y'+g(x)y=0. Mas, o sistema acima nos diz que $\phi(x_0)=\phi'(x_0)=0$, então, como y=0 (solução trivial) é uma solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

pelo Teorema de Existência e Unicidade, $\varphi(x)=0$. Podemos assim concluir que $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0$, sem que as constantes sejam simultaneamente nulas. Segue daí que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes.

Observação 3.3.1.9: Através desse teorema, demonstramos que se W(x)=0 em um ponto do intervalo de definição de duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, então essas funções são linearmente dependentes. Como conseqüência, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas soluções linearmente independentes de uma EDOLH, o sistema algébrico

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \end{cases}$$

é sempre possível e determinado e portanto toda solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \\ y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b \end{cases}$$

é da forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Teorema 3.3.1.4: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes de uma EDOLH y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, então toda solução dessa equação é da forma $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, ou seja, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ é a solução geral da EDO.

Demonstração: Lista de exercícios 3.3.1

Teorema 3.3.1.5: Teorema de Abel

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de uma EDOLH y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 e seja

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2(x_0) \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \text{ o seu wronskiano. Então } W(x) \text{ satisfaz a EDOLH de 1ª ordem}$$

$$W' + f(x)W = 0.$$

Demonstração:

Suponhamos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam duas soluções da EDOLH y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 e que W(x) seja o seu wronskiano. Então:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

е

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Então.

$$W' + f(x)W = y_1y_2'' - y_1'y_2 + f(x) (y_1y_2' - y_1'y_2) = y_1(y_2'' + f(x)y_2') - y_2(y_1'' + f(x)y_1') = 0 - 0 = 0.$$

Corolário: Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de uma EDOLH y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 e o W(x) seu wronskiano, então uma das seguintes alternativas é válida:

I) ou $W(x) \neq 0$;

II) ou W(x) = 0 , para todo x .

Não existe a possibilidade do wronskiano se anular para alguns valores de x e ser diferente de zero para outros valores de x.

Demonstração:

Pelo Teorema de Abel, W(x) é solução da equação W' + f(x)W = 0. Essa equação é uma equação de variáveis

separáveis, cuja solução é $W(x) = Ce^{-\int f(x)dx}$. Como a função exponencial é sempre diferente de zero, temos duas possibilidades:

I) Se C = 0, então W(x)=0 , ou

II) se C \neq 0, então $W(x) \neq 0$, para todo x.

ATIVIDADES

Lista 3.3 - - Ver exemplos E57 ao E60 no apêndice V.

1. Demonstrar o teorema 3.3.1.4.

- 2. Se $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x|x|$, mostrar que W(x) = 0.
- 3. Provar que $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são linearmente independentes sempre que λ_1 e λ_2 são números reais distintos.
- 4. Mostrar que $y_1(x)=xe^{\lambda x}$ e $y_2(x)=e^{\lambda x}$ são soluções da equação $y''-2\lambda y'+\lambda^2 y=0$; mostrar também que y_1 e y_2 são linearmente independentes.
- 5. Mostrar que $y_1 = \frac{senx}{x}$ e $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ são soluções, linearmente independentes, da equação x y "+ 2y '+ x y = 0.

3.4 Determinação de uma Solução Linearmente Independente a Outra Solução Não Trivial de uma EDOLH

Dada uma solução $y_1(x) \neq 0$ para a EDOLH

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

podemos determinar uma segunda solução da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, de modo que $\{y_1, y_2\}$ seja linearmente independente. De fato, temos

$$y_2' = v' y_1 + v y_1'$$

е

$$y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'';$$

substituindo esses resultados na equação, segue que:

$$(v"y_1"+2v'y_1'+vy_1')+f(x)(v'y_1+vy_1')+g(x)vy_1=0.$$

Como queremos determinar $\, {m v} \,$, escrevemos

$$y_1v''+(2y_1'+f(x)y_1)v'=0$$
,

que é uma EDOLH de segunda ordem sem termo em $\, v$, e portanto pode ser redutível à primeira ordem.

Exemplo 3.4.1: Se $y_1 = \frac{senx}{x}$ é uma solução da EDOLH xy "+ 2y '+ xy = 0, determinar uma segunda solução

linearmente independente a y_1 .

A solução procurada é da forma:

$$y_2 = v y_1.$$

Calculando as derivadas $\,y_2^{\prime}\,$ e $\,y_2^{\prime\prime}\,$:

$$y_2' = v' y_1 + v y_1'$$
 e $y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$

e substituindo na equação dada, temos:

$$x y_1 v'' + (2x y_1' + 2y_1) v' + (x y_1'' + 2y_1' + x y_1) v = 0.$$

Nessa equação, o coeficiente de $\,v\,$ é $\,$ nulo, pois $\,y_2\,$ é solução da equação dada. Assim,

$$x y_1 v'' + (2xy_1' + 2y_1) v' = 0$$
.

Substituindo
$$y_1 = \frac{senx}{x}$$
 e $y_1 = \frac{x \cos x - senx}{x^2}$, teremos

$$(senx)v'' + \left(\frac{2x\cos x - 2senx}{x} + \frac{2senx}{x}\right)v' = 0,$$

ou

$$(senx)v''+2(\cos x)v'=0.$$

Assim, foi obtida uma equação que poderemos reduzir, fazendo v'=z, a uma equação de primeira ordem:

$$(senx)z' + 2(\cos x)z = 0.$$

Então, separando as variáveis e integrando

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{2\cos x}{\sin x} dx,$$

determinamos

$$\ln z = -2 \ln sen x + A$$
.

Escolhendo a constante arbitrária A=0, temos:

$$z = \csc^2 x$$

e finalmente:

$$v' = \csc^2 x \implies v = \int \csc x dx = t \ g \ x + B$$
.

Escolhendo, novamente, a constante de integração B=0, determinamos uma segunda solução linearmente independente à primeira:

$$y_2 = \frac{senx}{x} \cdot \frac{\cos x}{senx} = \frac{\cos x}{x}$$

ATIVIDADES

Lista 3.4

1. Se $y_1=x$ é uma solução da EDOLH $(x^2-1)y''+2xy'-2y=0$, determinar uma segunda solução linearmente independente a y_1 .

Resp:
$$y_2 = 1 + x \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

2. Se $y_1 = x+1$ é uma solução da EDOLH x(3x+2)y''+6(x+1)y'-6y=0, determinar uma segunda solução linearmente independente a y_1 .

Resp:
$$y_2 = \frac{1}{x}$$

3. Determinar a solução geral da equação y''-2y=0 , sabendo que $y_1=e^{\sqrt{2}\,x}$ é solução dessa equação.

Resp:
$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

4. Determinar a solução geral da equação $\,y''-2\,y'=0\,$, sabendo que $\,y_1=e^{2\,x}\,$ é solução dessa equação.

Resp: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

- 5. Determinar a solução geral da equação $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} 2y = 0$, sabendo que $y_1 = e^t$ é solução dessa equação.
- 6. As equações de Euler são equações que podem ser escritas como

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0,$$

com a e b constantes. Mostrar que $\exists \lambda$ tal que $y(x) = x^{\lambda}$ é uma solução da equação de Euler se, e só se,

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0;$$

essa equação é chamada equação indicial da equação de Euler.

3.5 EDOLH com Coeficientes Constantes

Vamos considerar $L(y) = y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, com α e β constantes. Então,

$$L(e^{\lambda \cdot x}) = (\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta)e^{\lambda \cdot x}$$
.

Assim, uma EDOLH com coeficientes constantes, L(y)=0, pode ter solução da forma $y=e^{\lambda \cdot x}$, desde que λ seja raiz da equação algébrica

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0 ,$$

chamada de equação característica.

Exemplo 3.5.1: Dada a equação y'' + 3y' + 2y = 0, a equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, que tem raízes reais $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Então, teremos duas soluções linearmente independentes $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{2x}$.

Teorema 3.5.1: Para resolver uma EDOLH de segunda ordem da forma

$$L(y) = y'' + \alpha y' + \beta y = 0,$$

primeiro determinamos as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0.$$

A solução geral da equação $L(y)=y''+\alpha y'+\beta y=0$ pode ser expressa em termos de λ_1 e λ_2 conforme segue:

Raízes da Equação Característica	Solução Geral
Reais distintas $\;\lambda_1 eq \lambda_2\;$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Reais repetidas $\lambda_{_{1}}=\lambda_{_{2}}=\lambda$	$(C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
Complexas $\begin{cases} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{cases}$	$e^{ax}(C_1\cos bx + C_2senbx)$

Observação 3.5.1: Se a equação característica $\lambda^2+\alpha\lambda+\beta=0$ tem raiz real dupla $\lambda_1=\lambda_2$, significa que o

discriminante dessa equação de 2º grau é nulo, ou seja $\alpha^2-4\beta=0~$ e $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{\alpha}{2}$.

Portanto, temos uma solução exponencial $y_1=e^{-rac{lpha}{2}x}$. A segunda solução, linearmente independente da primeira, será dada por

$$y_2 = v(x)e^{-\frac{\alpha}{2}x}.$$

Substituindo na equação diferencial obtemos v''(x) = 0, de onde

$$v(x) = Ax + B$$
.

Escolhendo A = 1 e B = 0, determinamos $y_2 = xe^{-\frac{\alpha}{2}x}$

Exemplo 3.5.2: Resolver a equação $(D^2-4)y=0$. Essa equação pode ser escrita como y''-4y=0. A equação característica é $\lambda^2-4=0$ que tem raízes características $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=2$. Portanto, a solução geral é $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$.

> edo := diff(y(x),x,x) -4*y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 4y(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = C1 e^{(-2x)} + C2 e^{(2x)}$$

Exemplo 3.5.3: A equação $(D^2+4D+4)y=0$ tem por equação característica $\lambda^2+4\lambda+4=0$, com raiz $\lambda_1=\lambda_2=-2$ de multiplicidade 2. Portanto, a solução geral é $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$.

> edo := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 4y(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = C1 e^{(-2x)} + C2 e^{(-2x)} x$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Revisão sobre exponenciais complexas

Para $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos inicialmente

$$e^z = e^x e^{iy}$$
.

Porém,

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots,$$

de onde:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right).$$

Acima, temos envolvidas as séries de cos y e sen y. Assim, obtemos a denominada "Fórmula de Euler":

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \text{sen} y$$
.

Definimos, a seguir, a exponencial para $z = x + yi \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \cdot seny) = e^x \cos y + i \cdot e^x seny$$

Observação 3.5.2: Se a equação característica tem raízes complexas $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ podemos definir duas soluções linearmente independentes:

$$y_1 = e^{ax+bix} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}senbx$$

е

$$y_2 = e^{ax-bix} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}\cos bx - ie^{ax}senbx$$

Usando o "Princípio de Superposição", podemos tomar convenientes combinações lineares, e obter duas soluções linearmente independentes reais:

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos bx$$
 e $y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax} \cdot senbx$.

Exemplo 3.5.4: Resolver a equação y''+4y'+13y=0. A equação característica é $\lambda^2+4\lambda+13=0$, que tem raízes complexas $\lambda_1=-2+3i$ e $\lambda_2=-2-3i$. Portanto, a solução geral é $(C_1\cos 3x+C_2sen3x)e^{-2x}$.

> edo := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +13*y(x)=0;

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 13y(x) = 0$$

> dsolve(edo);

$$y(x) = _C1 e^{(-2x)} \sin(3x) + _C2 e^{(-2x)} \cos(3x)$$

Observação 3.5.3: Devemos estar atentos ao fato de que as raízes complexas de um polinômio real ocorrem sempre aos pares conjugados.

Observação 3.5.4: Uma solução $y = C_1 \cos bx + C_2 senbx$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, pode ser escrita, em termos de outras constantes arbitrárias C e θ , como $y = Csen(bx + \theta)$, pois

$$y = Csen(bx + \theta) = C(sen\theta \cos bx + \cos\theta senbx)$$
,

sendo

$$C_1 = Csen\theta$$
 e $C_2 = Ccos\theta$.

Essa expressão alternativa é importante para algumas aplicações porque envolve uma senóide submetida a um deslocamento horizontal.

ATIVIDADES

Lista 3.5 - Ver exemplos E61 ao E70 no apêndice V.

Determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1)
$$3y'' + 2y' = 0$$
.

2)
$$y'' + 4y' + 8y = 0$$
.

3)
$$y'' + y' - 2y = 0$$
.

4)
$$y'' + 4y' = 0$$
.

5)
$$y'' - 2y' + 2y = 0$$
.

6)
$$y'' + 2y' + 4y = 0$$
.

7)
$$9v'' + 6v' + v = 0$$
.

8)
$$2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$$
.

9)
$$4y'' - 4y' + 3y = 0$$
.

10)
$$2y'' - 5\sqrt{3}y' + 6y = 0$$
.

Respostas:

> edo1 := 3*diff(y(x),x,x)+2*diff(y(x),x) = 0;

$$edo1 := 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

> dsolve(edo1,y(x));

$$y(x) = C1 + C2 e^{\left(-\frac{2x}{3}\right)}$$

> edo2 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +8*y(x)=0;

$$edo2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 8y(x) = 0$$

> dsolve(edo2,y(x));

$$y(x) = C1 e^{(-2x)} \sin(2x) + C2 e^{(-2x)} \cos(2x)$$

> edo3 := diff(y(x),x,x)+diff(y(x),x) -2*y(x)=0;

$$edo3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 2y(x) = 0$$

> dsolve(edo3,y(x));

$$y(x) = C1 e^{x} + C2 e^{(-2x)}$$

> edo4 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) =0;

$$edo4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

> dsolve(edo4,y(x));

$$y(x) = C1 + C2 e^{(-4x)}$$

> edo5 := diff(y(x),x,x)-2*diff(y(x),x) +2*y(x)=0;

$$edo5 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 2y(x) = 0$$

> dsolve(edo5,y(x));

$$y(x) = C1 e^x \sin(x) + C2 e^x \cos(x)$$

> edo6 := diff(y(x),x,x)+2*diff(y(x),x) +4*y(x)=0;

$$edo6 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 4y(x) = 0$$

> dsolve(edo6,y(x));

$$y(x) = C1 e^{(-x)} \sin(\sqrt{3} x) + C2 e^{(-x)} \cos(\sqrt{3} x)$$

> edo7 := 9*diff(y(x),x,x)+6*diff(y(x),x) +y(x)=0;

$$edo7 := 9\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 6\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x) = 0$$

> dsolve(edo7,y(x));

$$y(x) = _C1 e^{\left(-\frac{x}{3}\right)} + _C2 e^{\left(-\frac{x}{3}\right)} x$$

> edo8 := 2*diff(y(x),x,x)-2*sqrt(2)*diff(y(x),x) +y(x)=0;

$$edo8 := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x) = 0$$

> dsolve(edo8,y(x));

$$y(x) = _C1 e^{\left(\frac{\sqrt{2} x}{2}\right)} + _C2 e^{\left(\frac{\sqrt{2} x}{2}\right)} x$$

> edo9 := 4*diff(y(x),x,x)-4*diff(y(x),x) +3*y(x)=0;

$$edo9 := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 3y(x) = 0$$

> dsolve(edo9,y(x));

$$y(x) = _C1 e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2} x}{2}\right) + _C2 e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2} x}{2}\right)$$

> edo10 := 2*diff(y(x),x,x)-5*sqrt(3)*diff(y(x),x) +6*y(x)=0;

$$edo10 := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 5\sqrt{3}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 6y(x) = 0$$

> dsolve(edo10,y(x));

$$y(x) = C1 e^{\left(\frac{\sqrt{3} x}{2}\right)} + C2 e^{\left(2\sqrt{3} x\right)}$$

Determinar as soluções dos problemas de valor inicial:

1)
$$16y'' + 8y' + 5y = 0$$
; $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

2)
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$
; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

3)
$$y'' - 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$$
; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

4)
$$y'' + 2y = 0$$
; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2\sqrt{2}$.

5)
$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$
; $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{7}{2}$.

Respostas:

> edo1 := 16*diff(y(x),x,x)+8*diff(y(x),x)+5*y(x) =0;

$$edo1 := 16 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + 8 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 5 y(x) = 0$$

> ci1 := y(0)=4, D(y)(0)=-1;

$$ci1 := y(0) = 4, D(y)(0) = -1$$

> dsolve({edo1,ci1});

$$y(x) = 4 e^{\left(-\frac{x}{4}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

> edo2 := diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x) +13*y(x)=0;

$$edo2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 13y(x) = 0$$

> ci2 := y(0)=0, D(y)(0)=-2;

$$ci2 := y(0) = 0, D(y)(0) = -2$$

> dsolve({edo2,ci2});

$$y(x) = -\frac{2}{3} e^{(-2x)} \sin(3x)$$

> edo3 := diff(y(x),x,x)-2*sqrt(5)*diff(y(x),x) +5*y(x)=0;

$$edo3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 2\sqrt{5}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 5y(x) = 0$$

> ci3 := y(0)=0, D(y)(0)=3;

$$ci3 := y(0) = 0, D(y)(0) = 3$$

> dsolve({edo3,ci3});

$$y(x) = 3 e^{(\sqrt{5} x)} x$$

> edo4 := diff(y(x),x,x)+2*y(x) =0;

$$edo4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2y(x) = 0$$

> ci4 := y(0)=2, D(y)(0)=2*sqrt(2);

$$ci4 := y(0) = 2, D(y)(0) = 2\sqrt{2}$$

> dsolve({edo4,ci4});

$$y(x) = 2\sin(\sqrt{2} x) + 2\cos(\sqrt{2} x)$$

> edo5 := 4*diff(y(x),x,x)-12*diff(y(x),x) +9*y(x)=0;

$$edo5 := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 12\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 9y(x) = 0$$

> ci5 := y(0)=1, D(y)(0)=7/2;

$$ci5 := y(0) = 1, D(y)(0) = \frac{7}{2}$$

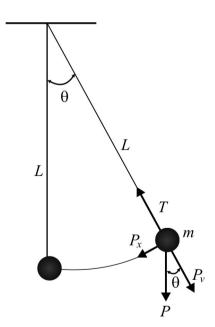
> dsolve({edo5,ci5});

$$y(x) = e^{\left(\frac{3x}{2}\right)} + 2e^{\left(\frac{3x}{2}\right)}x$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

No começo do capítulo fizemos referência a algumas aplicações das equações diferenciais; como foi possível observar, algumas equações, que descreviam determinados fenômenos, eram equações lineares de 2ª ordem. Assim, agora faremos algumas considerações sobre a modelagem de três sistemas, muito importantes, onde dois dos três são governados pela mesma equação diferencial de 2ª ordem.

Pêndulo Simples



$$\frac{d\theta}{dt}
ightarrow ext{Velocidade angular}$$

$$L\frac{d\theta}{dt} \to \text{Velocidade}$$

Energia cinética: $\frac{1}{2}m(L\frac{d\theta}{dt})^2$.

Energia potencial: $(L-L\cos\theta)mg$.

Principio de conservação de energia: ENERGIA CINÉTICA + ENERGIA POTENCIAL = CTE

$$\frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^{2} + \left(1 - \cos\theta\right)Lmg = CTE.$$

Derivando essa expressão teremos:

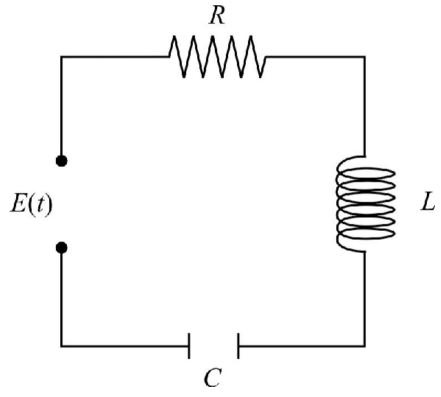
$$L^{2}m\frac{d\theta}{dt}\frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}+Lmgsen\theta\frac{d\theta}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0 \text{ (equação não linear)}.$$

Para oscilações de pequena amplitude temos $sen\theta \approx \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{\textit{t}\textit{t}^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \ \ (\text{equação linear}).$$

Circuito RLC



$$I = \frac{dQ}{dt}$$
 ($Q = \text{carga e } I = \text{corrente}$, variam com o tempo)

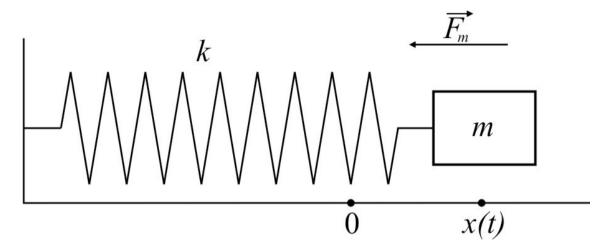
 $\frac{1}{C}Q=$ diferença de potencial entre as placas do capacitor

Aplicando a regra das malhas ao circuito, percorrendo-o no sentido horário a partir da bateria:

$$E(t) - L\frac{dQ}{dt} - R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}I = 0,$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E(t).$$

Sistema Massa - Mola.



$$F_m = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \rightarrow$$
 força de resistência

$$F_{\rm \it ext} = F_0 \cos(\varpi \, t) \, o {
m força \, externa}$$

 $F=-kx \rightarrow$ força restauradora de um sistema harmônico simples.

Como esse sistema é mais complexo, devemos somar à força restauradora de um S.H.S., uma força externa e a força de resistência:

$$F_{rest} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\overline{\omega} t) . (i)$$

Pela 2ª. Lei de Newton, temos:

$$F = ma$$
. (ii)

Como (i) = (ii):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\varpi t).$$

Assim, o PVI
$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\varpi t) \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0 \end{cases}$$
 tem solução única.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Como o sistema massa – mola e o circuito RLC são governados, matematicamente, pela mesma equação diferencial, podemos fazer simulações de oscilações mecânicas em circuitos elétricos, com as correspondências:

$$\begin{cases} m \to L \\ \gamma \to R \\ k \to \frac{1}{C} \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Todas as noções estudadas neste capítulo podem ser generalizadas para EDOLH de ordem maior que dois. Por exemplo, o wronskiano de n funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ é definido por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

As funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são ditas linearmente independentes, se e somente se, a equação

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$$

implica que $\,C_1=C_2=\cdots=C_n=0\,.$

As *n* funções serão ditas linearmente dependentes se não forem linearmente independentes, isto é, se uma delas for combinação linear das demais.

O "Princípio de Superposição" fica assim enunciado:

Se y_1, \dots, y_n são n soluções de uma EDOLH de n -ésima ordem

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

então qualquer combinação linear $y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n$ também é solução dessa equação.

"Teorema de Abel":

Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ n soluções de uma EDOLH de ordem n

$$y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + ... + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$
.

Então o W(x) satisfaz a EDOLH de 1ª ordem W'+f(x)W=0 .

ATIVIDADES

Determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1)
$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$$
.

2)
$$y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$$

3)
$$y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$$
.

4)
$$y^{(iV)} = 0$$
.

5)
$$(D^4 + 1)y = 0$$
.

Respostas:

> edo1 := diff(y(x),x,x,x)+3*diff(y(x),x,x)-1*diff(y(x),x)-3*y(x) =0;

$$edo1 := \left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 3y(x) = 0$$

> dsolve(edo1,y(x));

$$y(x) = C1 e^{x} + C2 e^{(-x)} + C3 e^{(-3x)}$$

> edo2 := diff(y(x),x,x,x)+5*diff(y(x),x,x)-8*diff(y(x),x)-12*y(x) =0;

$$edo2 := \left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) + 5\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 8\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 12y(x) = 0$$

> dsolve(edo2,y(x));

$$y(x) = C1 e^{(2x)} + C2 e^{(-6x)} + C3 e^{(-x)}$$

> edo3 := diff(y(x),x,x,x)+3*diff(y(x),x,x)+1*diff(y(x),x)+3*y(x) =0;

$$edo3 := \left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 3y(x) = 0$$

> dsolve(edo3,y(x));

$$y(x) = C1 e^{(-3x)} + C2 \sin(x) + C3 \cos(x)$$

> edo4 := diff(y(x),x,x,x,x) = 0;

$$edo4 := \frac{d^4}{dx^4} y(x) = 0$$

> dsolve(edo4,y(x));

$$y(x) = \frac{-C1 x^3}{6} + \frac{-C2 x^2}{2} + _C3 x + _C4$$

> edo5 := diff(y(x),x,x,x,x)+y(x) =0;

$$edo5 := \left(\frac{d^4}{dx^4}y(x)\right) + y(x) = 0$$

> dsolve(edo5,y(x));

$$y(x) = -C1 e^{\left(-\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) - C2 e^{\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C3 e^{\left(-\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$$
$$+ C4 e^{\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$$

3.6 Equações Lineares não Homogêneas

Seja o operador diferencial linear

$$L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$$

e a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$L(y) = q(x)$$
.

A equação diferencial homogênea associada à equação L(y) = q(x) será:

$$L(y) = 0$$

Sejam y_p uma solução particular da equação não homogênea e $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ a solução geral da equação homogênea correspondente. Então,

$$L(y) = L(y_0 + y_p) = L(y_0) + L(y_p) = 0 + q(x) = q(x)$$

Portanto, podemos concluir que

$$y = y_0 + y_p$$

são soluções da equação não homogênea. Reciprocamente, qualquer solução da equação não homogênea é uma solução da equação homogênea. De fato:

$$L(y_0) = L(y - y_n) = L(y) - L(y_n) = q(x) - q(x) = 0$$
.

Assim, podemos afirmar que existem constantes arbitrárias tais que:

$$y_0 = y - y_n = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

e conseqüentemente, $y = y_0 + y_p$ é a família das soluções da equação não homogênea. Essas considerações são escritas formalmente através da demonstração do teorema abaixo.

Teorema 3.6.1: Seja $y_p(x)$ uma solução da equação não homogênea y''+f(x)y'+g(x)y=q(x). Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então, a solução geral da equação não homogênea y''+f(x)y'+g(x)y=q(x) é $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_p(x)$.

Demonstração:

Seja y(x) uma solução qualquer da equação y''+f(x)y'+g(x)y=q(x) e $y_p(x)$ uma solução particular dessa equação. Então, $Y(x)=y(x)-y_p(x)$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

pois

$$Y'' + f(x)Y' + g(x)Y = \left(\left(y(x) - y_p(x) \right) \right)' + f(x) \left(y(x) - y_p(x) \right) + g(x) \left(y(x) - y_p(x) \right) =$$

$$= \left(y'' + f(x)y' + g(x)y \right) - \left(y''_p + f(x)y'_p + g(x)y_p \right) = q(x) - q(x) = 0.$$

Assim, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções fundamentais da equação y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, existem constantes C_1 e C_2 , tais que

$$Y(x) = y(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ou seja,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$$
.

Observação 3.6.1: Para determinarmos a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea, precisamos de uma solução particular dessa equação e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Observação 3.6.2: A solução da equação homogênea associada também pode ser chamada de "função complementar".

Teorema 3.6.2: Princípio de Superposição para Equações Não homogêneas

Seja $y_p^{(1)}(x)$ uma solução da equação $y''+f(x)y'+g(x)y=q_1(x)$ e $y_p^{(2)}(x)$ uma solução da equação $y''+f(x)y'+g(x)y=q_2(x)$. Então, $y_p(x)=y_p^{(1)}(x)+y_p^2(x)$ é solução da equação $y''+f(x)y'+g(x)y=q_1(x)+q_2(x)$.

Demonstração:

Seja
$$y_p(x) = y_p^{(1)}(x) + y_p^2(x)$$
, com $y_p^{(1)}(x)$ solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = q_1(x)$ e $y_p^{(2)}(x)$

solução de $y^{\prime\prime}+f(x)y^{\prime}+g(x)y=q_{2}(x)$, então

$$y_p'' + f(x)y_p' + g(x)y_p = \left(\left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right)' + f(x) \left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right)' + g(x) \left(y_p^{(1)} + y_p^{(2)} \right) = \left((y_p^{(1)})'' + f(y_p^{(2)})'' + g(y_p^{(2)})'' + g(y_$$

$$= (y_p^{(1)})'' + f(x)(y_p^{(1)})' + g(x)y_p^{(1)} + (y_p^{(2)})'' + f(x)(y_p^{(2)})' + g(x)y_p^{(2)} = q_1(x) + q_2(x).$$

3.6.1 Determinação de Soluções Particulares de Equações não Homogêneas com Coeficientes Constantes pelo Método dos Coeficientes a Determinar

O método dos coeficientes a determinar é um método para encontrar uma solução particular de um EDO linear não homogênea com coeficientes constantes; assim, podemos dizer que uma das limitações desse método é a restrição que a equação deve ser uma **EDOL com coeficientes constantes**. Além disso, o termo não homogêneo deve ser uma

combinação de polinômios, exponenciais, senos e/ou cossenos. Porém, apesar dessas restrições, sempre que for aplicável é preferível aos demais, por ser um método que não envolve integrações, puramente algébrico.

Dada uma equação da forma

$$y'' + \alpha y' + \beta y = q(x),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, esse método pode ser resumido como segue:

i) Se $q(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) e^{ax}$, onde $a, a_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma:

$$y_n(x) = x^r (K_0 + K_1 x + \dots + K_n x^n) e^{ax}$$

com r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e K_i , $i=0,\cdots,n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

(ii) Se $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, onde $a_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_n(x) = x^r (K_0 + K_1 x + \dots + K_n x^n)$$
,

com r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e K_i , $i=0,\cdots,n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

iii) Se $q(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)e^{ax}\cos bx + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)e^{ax}senbx$, onde $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^r[(A_0 + A_1x + \dots + A_sx^s)e^{ax}\cos bx + (B_0 + B_1x + \dots + B_sx^s)e^{ax}senbx],$$

com $s=\max\{n,m\}$ e r o menor inteiro não negativo, tal que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea associada e A_i,B_i , $i=0,\cdots,n$, são coeficientes a serem determinados com a substituição de $y_p(x)$ na equação dada.

Observação 3.6.1.1: Podemos dizer que o método consiste: primeiramente na determinação de uma relação básica com os termos de q(x) e os que aparecem por derivação dos mesmos; depois a determinação dos coeficientes da relação básica, através da identidade resultante, com a substituição da relação básica na equação.

Observação 3.6.1.2: A relação básica deve ser modificada quando um termo de q(x) é também um termo da função complementar. Por exemplo, se um termo v de q(x) também é um termo da função complementar correspondente a uma raiz de multiplicidade μ , devemos acrescentar na relação básica $x^{\mu}v$ e mais os termos que aparecem por derivação deste.

Observação 3.6.1.3: Quando um termo de q(x) é x^rv e v é um termo da função complementar correspondente a uma raiz de multiplicidade μ , devemos acrescentar na relação básica $x^{r+\mu}v$ e mais os termos que aparecem por derivação deste.

Observação 3.6.1.4: Esse método também é chamado "método dos coeficientes indeterminados".

Exemplo 3.6.1.1: Resolver a equação diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5e^{2x}$.

A equação característica é $\lambda^2+5\lambda+6=0$, cujas raízes são $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=-3$, para a qual, duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1=e^{-2x}$ e $y_2=e^{-3x}$.

Vamos determinar uma solução particular da forma $y_p = Ke^{2x}$, onde K é um coeficiente a ser determinado. Substituindo y_p e suas derivadas na equação diferencial,

$$((Ke^{2x})')' + 5(Ke^{2x})' + 6Ke^{2x} = 5e^{2x}$$

temos

$$4Ke^{2x} + 10Ke^{2x} + 6Ke^{2x} = 5e^{2x}$$

Assim, $K=\frac{1}{4}$ e uma solução particular da EDO é $y_p=\frac{1}{4}e^{2x}$; a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{2x}$$
.

> eq1:=diff(y(x),x,x)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=5*exp(2*x);

$$eq1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 5\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 6y(x) = 5e^{(2x)}$$

> dsolve(eq1,y(x));

$$y(x) = e^{(-3x)} C2 + e^{(-2x)} C1 + \frac{1}{4}e^{(2x)}$$

Exemplo 3.6.1.2: Determinar uma solução particular para a equação diferencial $y'' - y' - 2y = 2e^t - 3$.

Agora , devemos encontrar: y_{p_1} tal que $L(y_{p_1})=2e^t$ e y_{p_2} tal que $L(y_{p_2})=-3$; depois fazemos $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$. Pela linearidade temos:

$$L(y_p) = L(y_{p_1} + y_{p_2}) = L(y_{p_1}) + L(y_{p_2}) = 2e^t - 3.$$

Quando procuramos y_{p_1} da forma $y_{p_1} = Ke^t$. Substituindo na equação $L(y_{p_1}) = 2e^t$, temos

$$K - K - 2K = 2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow y_{p_1} = -e^t$$
.

Na EDO L(y)=-3, q(t) é da forma $q(t)=Ke^{at}$, a=0. Assim, devemos procuramos uma solução particular

da forma $y_{p_2}=K$. Substituindo na equação $L(y_{p_2})=-3$, temos -2K=-3 , ou seja, $k=\frac{3}{2}$ e $y_{p_2}=\frac{3}{2}$.

Finalmente, uma solução particular da EDO é

$$y_p = -e^t + \frac{3}{2}.$$

> eq2:=diff(y(t),t,t)-diff(y(t),t)-2*y(t)=2*exp(t)-3;

$$eq2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - 2y(t) = 2 e^t - 3$$

> dsolve(eq2,y(t));

$$y(t) = e^{(2t)} C2 + e^{(-t)} C1 - e^{t} + \frac{3}{2}$$

Exemplo 3.6.1.3: Achar a solução da equação diferencial $y'' - 10y' + 25y = 3e^{5x}$.

A equação característica é $\lambda^2-10\lambda+25=0$, que tem raiz dupla $\lambda_1=\lambda_1=5$. Devemos determinar uma solução particular tal que $y_p(x)=Kx^2e^{5x}$. Temos:

$$y'_{p}(x) = 2Kxe^{5x} + 5Kx^{2}e^{5x} \implies y''_{p}(x) = (2K + 20Kx + 25Kx^{2})e^{5x}$$

Substituindo na equação dada, encontramos $K = \frac{3}{2}$; portanto, obtemos:

$$y = \frac{3}{2}x^2e^{5x} + C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

> eq3:=diff(y(x),x,x)-10*diff(y(x),x)+25*y(x)=3*exp(5*x);

$$eq3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 10\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 25y(x) = 3e^{(5x)}$$

> dsolve(eq3,y(x));

$$y(x) = e^{(5x)} C2 + e^{(5x)} x C1 + \frac{3}{2}x^2 e^{(5x)}$$

Exemplo 3.6.1.4: Resolver a equação diferencial $y'' - 4y' + 3y = te^{3t} + 4$.

A equação característica $\lambda^2-4\lambda+3=0$ tem raízes $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=1$. Duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada são $y_1=e^{3t}$ e $y_2=e^t$. Inicialmente, vamos determinar uma solução particular y_{p_1} para $y''-4y'+3y=te^{3t}$:

$$y_{p_1} = (K_1 t + K_2) t e^{3t} = (K_1 t^2 + K_2 t) e^{3t}$$
.

Derivando y_{p_1} obtemos:

$$y'_{p_1} = (3K_1t^2 + (2K_1 + 3K_2)t + K_2)e^{3t}$$

$$y_{p_1}'' = (9K_1t^2 + (12K_1 + 9K_2)t + (2K_1 + 6K_2))e^{3t}$$

Substituindo na equação determinamos $K_1=\frac{1}{4}$ e $K_2=-\frac{1}{4}$. Portanto:

$$y_{p_1} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4}$$
.

Agora, devemos achar uma solução particular y_{p_2} para a equação

$$y'' - 4y' + 3y = 4$$
.

Tomando $y_{p_2} = K$, com K constante, encontramos $y_{p_2} = \frac{4}{3}$.

Desta forma, uma solução particular para a equação dada, inicialmente, é:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{4}{3}$$

Finalmente, a solução geral será:

$$y = \frac{(t^2 - t)e^{3t}}{4} + \frac{4}{3} + C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

> eq4:=diff(y(t),t,t)-4*diff(y(t),t)+3*y(t)=t*exp(3*t)+4;

$$eq4 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - 4\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 3y(t) = te^{(3t)} + 4$$

> dsolve(eq4,y(t));

$$y(t) = e^{t} C2 + e^{(3t)} C1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{24} (-6t + 3 + 6t^{2}) e^{(3t)}$$

> simplify(%);

$$y(t) = e^{t} C2 + e^{(3t)} C1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}t e^{(3t)} + \frac{1}{8}e^{(3t)} + \frac{1}{4}t^{2}e^{(3t)}$$

Exemplo 3.6.1.5: Encontrar uma solução particular para a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$.

A equação característica é $\lambda^2-3\lambda+2=0$, cujas raízes são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=1$. A função complementar é dada por $y=C_1e^{2t}+C_2e^t$.

Pela observação 3.6.1.2, teremos $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ com $y_{p_1} = K_1 t e^{2t} + K_2 e^{2t}$ e $y_{p_2} = K_3 e^t$.

> eq5:=diff(y(t),t,t)-3*diff(y(t),t)+2*y(t)=exp(2*t);

$$eq5 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - 3\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2y(t) = e^{(2t)}$$

> dsolve(eq5,y(t));

$$y(t) = (e^{t}(-1 + Cl + t) + C2)e^{t}$$

Exemplo 3.6.1.6: Resolver a equação diferencial $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \operatorname{sen} x$.

Temos $q(x) = e^{-x} senx$. Também sabemos que q(x) é a parte imaginária de uma exponencial complexa:

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x} \cdot e^{ix} = e^{-x} \cos x + ie^{-x} \operatorname{sen} x$$
.

Assim, é conveniente considerarmos uma nova equação:

$$z'' + 2z' + 2z = 3e^{(-1+i)x}$$

a fim de tornarmos os cálculos mais práticos.

A equação característica tanto da equação dada, quanto dessa nova equação, é a mesma :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

com raízes $\lambda = -1 \pm i$.

A raiz $\lambda_1 = -1 + i$ é um raiz simples da equação característica, portanto, podemos procurar uma solução particular da forma

$$z_p = Kxe^{\lambda_1 x}$$
.

Calculando as derivadas de $\,z_{\,p}\,$ e substituindo na nova equação, obtemos:

$$Ke^{\lambda_1 x} \left(\left(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x \right) + 2\left(1 + \lambda_1 x \right) + 2x \right) = 3e^{\lambda_1 x},$$

$$K((\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 2)x + 2\lambda_1 + 2) = 3.$$

Como λ_1 é raiz da equação característica, o coeficiente de x acima é nulo, resultando:

$$K(2\lambda_1+2)=3.$$

Substituindo $\lambda_1 = -1 + i$,

$$K = \frac{3}{2i} = -\frac{3i}{2}.$$

Logo,

$$z_p = -\frac{3i}{2}xe^{(-1+i)x} = -\frac{3i}{2}xe^{-x}(\cos x + i \operatorname{senx}).$$

Considerando o operador linear $L = D^2 + 2D + 2$, associado a EDO, temos:

$$L\left(\frac{3xe^{-x} \sin x}{2} - i\frac{3xe^{-x} \cos x}{2}\right) = 3xe^{-x} \cos x + 3ixe^{-x} \sin x,$$

pois, pela propriedade de linearidade:

$$L\left(\frac{3xe^{-x}\operatorname{sen}x}{2}\right) - iL\left(\frac{3xe^{-x}\operatorname{cos}x}{2}\right) = 3xe^{-x}\operatorname{cos}x + 3ixe^{-x}\operatorname{sen}x.$$

Como a igualdade acima é uma igualdade entre números complexos, obtemos:

$$L\left(\frac{3xe^{-x}\operatorname{sen}x}{2}\right) = 3xe^{-x}\operatorname{cos}x,$$

$$L\left(-\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}\right) = 3xe^{-x}\operatorname{sen}x.$$

Dessa segunda igualdade,

$$y_p = -\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}$$

e, portanto, a solução geral é $y=-\frac{3xe^{-x}\cos x}{2}+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\mathrm{sen}x)$.

Exemplo 3.6.1.7: Determinar a solução geral de $y'' - y' = t^2$.

Nesse caso, $q(t)=t^2e^{0t}$, mas zero é raiz simples da equação característica $\lambda^2-\lambda=0$. Então, y_p será da forma

$$y_p(t) = (K_1t^2 + K_2t + K_3)t = K_1t^3 + K_2t^2 + K_3t$$

substituindo suas derivadas na equação e agrupando os termos obtemos:

$$6K_1t + 2K_2 - (3K_1t^2 + 2K_2t + K_3) = t^2$$

$$\begin{cases}
-3K_1 = 1 \\
6K_1 - 2K_2 = 0 \\
2K_2 - K_3 = 0
\end{cases}$$

A solução desse sistema algébrico é $K_1=-\frac{1}{3},\ K_2=-1,\ K_3=-2$.

Uma solução particular da EDO é

$$y_0 = -\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t,$$

e a solução geral:

$$y = -\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t + C_1e^t + C_2.$$

 $> eq7:=diff(y(t),t,t)-diff(y(t),t)=t^2;$

$$eq7 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) = t^2$$

> dsolve(eq7,y(t));

$$y(t) = -t^2 - \frac{t^3}{3} + e^t C1 - 2t + C2$$

Exemplo 3.6.1.8: Resolver o problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 5 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ > eq8:=diff(y(t) + t)+2*diff(y(t) t) = 3

> eq8:=diff(y(t),t,t)+3*diff(y(t),t)+2*y(t)=5;

$$eq8 := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) + 3\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2y(t) = 5$$

> ci:=y(0)=-1,D(y)(0)=-3;

$$ci := y(0) = -1, D(y)(0) = -3$$

> dsolve({eq8,ci});

$$y(t) = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} e^{(-2t)} - 10 e^{(-t)}$$

ATIVIDADES

Lista 3.6.1

Determinar uma solução particular para as seguintes equações, usando do método dos coeficientes a determinar:

1.
$$y'' - 4y' + 5y = te^{2t} \cos t$$
.

Resp:
$$y_p = \frac{t^2 e^{2t} \operatorname{sen} t}{4}$$
.

2.
$$y'' + 2y' + 5y = 5e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t$$

Resp:
$$y_p = \frac{5te^{-t} \sin 2t}{4} + \frac{te^{-t} \cos 2t}{2}$$

3.
$$y'' + 4y' = t \cos 2t$$
.

Resp:
$$y_p = \frac{t^2 \operatorname{sen} 2t + t \cos 2t}{4}$$

4.
$$y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$$
.

Resp:
$$y(x) = \sin(3x) C2 + \cos(3x) C1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 e^{(3x)}$$

5.
$$y'' + y' = 3sen(2x) + xcos(2x)$$
.

Resp:

$$y(x) = -\frac{11}{25}\sin(2x) - \frac{17}{100}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)x - \frac{1}{5}x\cos(2x) - e^{(-x)}C1 + C2$$

Resolver os problemas de valor inicial a seguir:

1.
$$y^n + 4y = t^2 + 3e^t$$
, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Resp:
$$y(t) = -\frac{13}{10}\sin(2t) - \frac{19}{40}\cos(2t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$$

2.
$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t$$
, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Resp:
$$y(t) = \frac{1}{2} e^{(-t)} \sin(2t) + \frac{1}{2} e^{(-t)} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{(-t)} (\cos(2t) + 2\sin(2t)t)$$

3.6.2 Determinação de Soluções Particulares de Equações não Homogêneas pelo Método de Variação dos Parâmetros

Este método pode ser aplicado a qualquer equação linear de segunda ordem

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = q(x)$$

para a qual se conheça a solução geral da equação homogênea correspondente:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

com $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, para x no intervalo de validade de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

O método consiste em determinar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a forma da solução geral da equação homogênea associada; para tal, substituímos os parâmetros (constantes $\,C_1\,$ e $\,C_2\,$) por funções a serem determinadas $\,C_1(x)\,$ e $\,C_2(x)\,$. Assim, vamos procurar uma solução particular da forma

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

com a condição

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

ou equivalentemente

$$C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0$$

Então,

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

Substituindo y(x) , y'(x) e y''(x) na equação, temos:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + g(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = q(x)$$

que podemos escrever

$$C'_{1}(x)y'_{1}(x) + C'_{2}(x)y'_{2}(x) + C_{1}(x)(y''_{1}(x) + f(x)y'_{1}(x) + g(x)y'_{1}(x)) +$$

$$+ C_{2}(x)(y''_{2}(x) + f(x)y'_{2}(x) + g(x)y'_{2}(x)) = q(x);$$

portanto, $C_1(x)$ e $C_2(x)$ também satisfazem a equação

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = q(x)$$

Assim, obtemos o sistema de equações lineares para $\,C_1'(x)\,$ e $\,C_2'(x)\,$:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito, matricialmente, na forma

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix},$$

com solução:

$$\begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1, y_2](x)} \begin{bmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{W[y_1, y_2](x)} \begin{bmatrix} -y_2(x)q(x) \\ y_1(x)q(x) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, obtemos duas equações diferenciais de 1ª ordem, com soluções $C_1(x)$ e $C_2(x)$, respectivamente, que substituídas em

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

nos permitem escrever uma solução particular:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

Exemplo 3.6.2.1: Resolver a EDO $(D^2 - 2D + 1)y = \frac{e^x}{x}$.

A equação característica é $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cujas raízes são $\lambda_1=\lambda_2=1$. Então, a função complementar pode ser escrita como:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Assim, vamos procurar uma solução particular da forma:

$$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$$
.

Nesse caso é obtido o sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1'(x).e^x + C_2'(x).xe^x = 0\\ C_1'(x).e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

com solução:

$$C_1' = -1$$
 e $C_2' = \frac{1}{x}$.

Integrando as igualdades acima, obtemos:

$$C_1 = \int C_1' dx = -\int dx = -x$$
 e $C_2 = \int C_2' dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$,

de onde $y_p = -xe^x + xe^x \ln |x|$. A solução da equação pode ser escrita como

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + x e^x \ln|x| = e^x (C_1 + C_2 x - x + x \ln|x|).$$

Exemplo 3.6.2.2: Resolver $y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$.

 $> edo:=diff(y(x),x,x)-4*diff(y(x),x)+3*y(x)=(1+exp(-x))^{(-1)};$

$$edo := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 3y(x) = \frac{1}{1 + e^{(-x)}}$$

> dsolve(edo,y(x));

$$y(x) = e^{(3x)} C2 + e^{x} CI - \frac{1}{2} \ln(e^{x} + 1) e^{(3x)} - \frac{1}{4} e^{x} + \frac{1}{2} e^{(2x)} + \frac{1}{2} \ln(e^{x}) e^{(3x)} + \frac{1}{2} e^{x} \ln((e^{x} + 1) e^{(-x)})$$

ATIVIDADES

Lista 3.6.2

Determinar uma solução particular para as seguintes equações, através do método de variação dos parâmetros:

1.
$$y'' + y = \sec x$$
.

Resp: $y_p = (\cos x)(\ln|\cos x|) + xsenx$

$$2. (D^3 + D)y = \csc t.$$

Resp: $y_p = (cost)(ln|sent|) - tsent - ln|csct + cott|$

3.
$$y'' - 2y' = e^x senx$$
.

Resp:
$$y_p = -\frac{1}{2}e^x senx$$

4.
$$(D^2 - 6D + 9)y = \frac{e^{3t}}{t^2}$$
.

$$Resp: y_p = -e^{3t} \ln |t|$$

5.
$$4y'' - 4y' + y = 16e^{\frac{x}{2}}$$
.

Resp:
$$y_p = 2x^2 e^{\frac{x}{2}}$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

- Os métodos estudados acima podem ser generalizados para EDO não homogêneas com ordem maior do que dois.
- A EDO $(D^2+2D+5)y=17\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$, que representa oscilações forçadas num sistema massa-mola, tem solução $y=\left(-2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right)+3\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\right)+\left(C_1e^{-t}\cos2t+C_2e^{-t}\mathrm{sen}2t\right)$; essa solução é a resposta do sistema à força externa $\mathbf{17sen}\left(\sqrt{2}t\right)$; as constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais; o termo $\left(C_1e^{-t}\cos2t+C_2e^{-t}\mathrm{sen}2t\right)$ é chamado de parte transiente da solução; devido à presença da exponencial, a **parte transiente** tende a zero quando $t\to+\infty$; assim, após certo tempo, podemos afirmar que $y\approx-2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right)+3\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$; por esta razão esse termo é chamado de **parte estacionária** da resposta.

ANOTAÇÕES

Apêndice I

Integrais Impróprias

Em diversas situações, é preciso calcular integrais múltiplas de funções não limitadas ou definidas sobre regiões de área ou volume infinitos.

Devemos observar que esta situação, no cálculo de funções de uma variável, era resolvida mediante a existência ou não dos seguintes limites:

• No caso de funções definidas sobre domínios de comprimento infinito:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

• No caso de funções não limitadas sobre o intervalo (a,b) mas integráveis nos intervalos $(a+\epsilon,b)$, $\forall \epsilon>0$:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

Estas idéias podem ser estendidas facilmente para o caso de integração múltipla:

Exemplo 1: Calcular a integral
$$\iint_R f(x,y) dA$$
 sendo $f(x,y) = \frac{x}{y^3}$ e $R = [0,1] \times [1,+\infty)$.

Resolução:

Temos que

$$\iint_{R} \frac{x}{y^{3}} dA = \int_{1}^{+\infty} \left[\int_{0}^{1} \frac{x}{y^{3}} dx \right] dy = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{y^{3}} \left(\frac{x^{2}}{2} \right) \Big|_{0}^{1} dy$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2y^{3}} dy = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{2y^{3}} dy = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{4y^{2}} \right) \Big|_{0}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4b^{2}} \right) = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2: Calcular a integral $\iint_R f(x,y)dA$ sendo R o plano xy.

Resolução:

Aqui, utilizaremos uma conversão para coordenadas polares:

$$\iint_{R} e^{-(x^{2}+y^{2})} dA = \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{0}^{2\pi} e^{-r^{2}} r d\theta \right] dr = 2\pi \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-r^{2}} r dr = 2\pi \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{e^{-r^{2}}}{2} \right) \Big|_{0}^{b}$$
$$= 2\pi \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-b^{2}}}{2} \right) \Big|_{0}^{b} = \pi$$

ATIVIDADES

- 1. Calcular a integral $\iint_R f(x,y) dA$ sendo $f(x,y) = \frac{y}{x^3}$ e $R = [1,+\infty) \times [1,2)$.
- 2. Calcular a integral $\iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}} dA$ sendo R o plano xy.

ANOTAÇÕES

Apêndice II

Integrais de Superfície

Suponhamos uma *lâmina curva* que pode ser representada mediante uma superfície no espaço tridimensional σ .

Suponhamos que para cada ponto (x, y, z) de tal superfície, a função f(x, y, z) represente a densidade por área.

Se desejarmos calcular a massa da lâmina, podemos proceder como segue:

1. Dividimos a superfície em pequenas porções σ_1 , σ_2 , \cdots , σ_n de áreas ΔS_1 , ΔS_2 , \cdots , ΔS_n respectivamente, como mostra a figura:



- 2. Seja (x_k^*, y_k^*, z_k^*) um ponto da k -ésima porção e ΔM_k a massa dessa porção.
- 3. Se as dimensões de σ_k forem muito pequenas, então a massa da lâmina pode ser calculada mediante:

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_{k} \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_{k}^{*}, y_{k}^{*}, z_{k}^{*}) \Delta S_{k}$$

4. Para certas condições teremos:

$$M = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

Definição 1:

Se σ é uma superfície paramétrica lisa, então a *integral de superfície* de f(x,y,z) em σ é

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k,$$

desde que tal limite exista.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Podemos mostrar que se f(x,y,z) é contínua em σ , então tal limite existe.

Teorema 1:

Seja σ é uma superfície paramétrica lisa, cuja equação vetorial é

$$\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

onde $(u,v) \in R$. Se f(x,y,z) é contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{R} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA.$$

O teorema anterior, cuja demonstração será omitida, pode ser utilizado para calcular as integrais de superfície de maneira prática.

Exemplo 1: Calcular a integral $\iint_{\sigma} x dS$, sendo σ a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução: Podemos verificar que σ tem equação vetorial

$$\vec{r}(u,v) = \operatorname{sen}(u) \cos(v) \vec{i} + \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \vec{j} + \cos(u) \vec{k} , \ 0 \le u \le \pi , \ 0 \le v \le 2\pi , \ e$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \operatorname{sen}(u)$$

Utilizando o teorema anterior, temos que:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{R} sen(u) \cos(v) sen(u) dA = \int_{0}^{2\pi} \left[\int_{0}^{\pi} sen^{2}(u) \cos(v) du \right] dv$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{\pi}{2} \cos(v) dv = 0$$

Teorema 2: Seja σ é uma superfície paramétrica lisa com equação z=g(x,y) e R sua projeção sobre o plano xy. Se g tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R e f(x,y,z) for contínua em σ , então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{R} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2} + 1} dA$$

Similarmente, se a superfície for y = g(x, z), temos que

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{R} f(x, g(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{2} + 1} dA$$

e se a superfície for x = g(y, z), então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{R} f(g(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{2} + 1} dA.$$

Exemplo 2: Calcular a integral $\iint_{\sigma} xydA$ sendo σ a parte do plano x+y+z=1 que fica no primeiro octante.

Resolução: A equação do plano é z = 1 - x - y. Logo,

$$\iint_{\sigma} xydS = \iint_{R} xy \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2} + 1} dA = \iint_{R} xy\sqrt{3} dA = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1-x} xydy\right] dx$$
$$= \int_{0}^{1} \frac{x(1-x)^{2}}{2} dx = \frac{1}{24}$$

Teorema 3: (Teorema da Divergência)

Seja G um sólido cuja superfície σ é orientada para fora. Se

$$\vec{F} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

onde f , g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo G , e se $\overset{
ightarrow}{n}$ for o vetor normal unitário para fora de σ , então

$$\iint_{C} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{C} div(\vec{F}) dV.$$

Este teorema é útil para calcularmos o fluxo passando através de uma superfície fechada.

Exemplo 3: Calcular o fluxo de saída do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução: Seja σ a superfície orientada para fora e G o sólido esférico envolvido por ela. Observemos que a divergência do campo vetorial está dado por $div(\vec{F}) = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$, e assim, pelo teorema da divergência temos que o fluxo é

$$fluxo = \iint_{\sigma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \iiint_{G} dV = \frac{4\pi}{3},$$

pois a integral tripla é igual ao volume da esfera.

ATIVIDADES

1. Calcular $\iint_{\sigma} z^2 dA$ sendo σ a esfera unitária. Calcule $\iint_{\sigma} x^2 dA$ e $\iint_{\sigma} y^2 dA$. Comparar estes valores e tentar

encontrar uma explicação para este fato.

- 2. Calcular $\iint_{S} (xy-z)dA$ sendo σ a parte do plano x+2y+3z=6 no primeiro octante.
- 3. Verificar o teorema da divergência, calculando a integral de superfície e a integral tripla sendo

 $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ e σ é o cubo de lado 1 localizado no primeiro octante e com um dos vértices coincidindo com a origem do sistema de coordenadas.

Apêndice III

Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

O processo básico para resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem n, consiste na determinação, através da derivação das equações dadas, de outro conjunto onde todas as variáveis, exceto uma, possam ser eliminadas. Com a resolução da equação resultante obtemos o valor da variável não eliminada. As demais variáveis são obtidas de modo análogo.

Por exemplo, para o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0\\ 3x + \frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{2t} \end{cases}$$

podemos apresentar as alternativas de resolução a seguir.

Resolução 1:

Podemos observar que a solução geral $\{x=x(t),\,y=y(t)\}$ também irá satisfazer à equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0,$$

obtida com a derivação da primeira equação do sistema em relação à variável livre t. Temos ainda, que multiplicando a primeira equação do sistema por 2, a segunda por -3 e adicionando esses resultados à equação obtida, inicialmente, por derivação, obtemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 5x = -6e^{2t},$$

que também será satisfeita por $\{x=x(t),\,y=y(t)\}$. A solução dessa equação linear de segunda ordem,

independente de y e suas derivadas, é $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$. Essa solução pode ser obtida através do Maple:

> eq:=diff(x(t),t,t)+4*diff(x(t),t)-5*x(t)=-6*exp(2*t);

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t)\right) + 4\left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)\right) - 5 \mathbf{x}(t) = -6 \mathbf{e}^{(2t)}$$

> dsolve(eq,x(t));

$$x(t) = e^{t} C2 + e^{(-5t)} C1 - \frac{6}{7} e^{(2t)}$$

Para determinarmos y = y(t) podemos proceder de forma análoga: derivamos a segunda equação do sistema e somamos com a primeira equação multiplicada por -3 e a segunda por 2. Então, y = y(t) será solução da equação:

$$\frac{d^2y}{dt} + 4\frac{dy}{dt} - 5y = 8e^{2t}.$$

> eq:=diff(y(t),t,t)+4*diff(y(t),t)-5*y(t)=8*exp(2*t);

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) + 4\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - 5y(t) = 8e^{(2t)}$$

> dsolve(eq,y(t));

$$y(t) = e^{t} C2 + e^{(-5t)} C1 + \frac{8}{7} e^{(2t)}$$

Assim,
$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$$
, $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t}$ é a solução geral do sistema.

Resolução 2:

Quando adotamos a notação $D=\frac{d}{dt}$, podemos observar a semelhança com a resolução de sistemas algébricos. Assim, o sistema considerado por ser escrito na forma:

$$\begin{cases} (D+2)x + 3y = 0\\ 3x + (D+2)y = 2e^{2t} \end{cases}$$

Procedendo como no caso de sistemas a duas variáveis $x \in y$, determinamos ao somarmos os resultados das multiplicações da primeira equação por (D+2) e da segunda por -3, respectivamente, a seguinte equação:

$$(D+2)^2 x - 9x = -6e^{2t},$$

cuja solução é $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7} e^{2t}$.

Substituindo esse resultado numa das equações do sistema e resolvendo a equação agora obtida, temos:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7} e^{2t}$$
.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Ao multiplicarmos a primeira equação por (D+2), estamos somando a derivada da primeira equação do sistema ao resultado da multiplicação dessa equação por 2; equivalentemente ao que foi feito na resolução anterior, esse resultado ainda foi adicionado à segunda equação do sistema multiplicada por -3.

Resolução 3:

Também podemos fazer uso de determinantes para a resolução do sistema $\begin{cases} (D+2)x+3y=0\\ \\ 3x+(D+2)y=2e^{2t} \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} (D+2) & 3 \\ 3 & (D+2) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2e^{2t} & (D+2) \end{vmatrix}$$

е

$$\begin{vmatrix} (D+2) & 3 \\ 3 & (D+2) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} (D+2) & 0 \\ 3 & 2e^{2t} \end{vmatrix}.$$

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Todas essas alternativas determinam a mesma solução geral.

ATIVIDADES

Resolver os seguintes sistemas:

1.
$$\begin{cases} (D+3)x + y = 0 \\ 2(D-2)x + (D-1)y = e^{t} \end{cases}$$

Resp:

> sys1:={diff(x(t),t)+3*x(t)+y(t)=0,2*diff(x(t),t)-4*x(t)+diff(y(t),t)-y(t)=exp(t)};

$$sys1 := \left\{ \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 3 x(t) + y(t) = 0, 2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - 4 x(t) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - y(t) = \mathbf{e}^{t} \right\}$$

> dsolve(sys1);

$$\{y(t) = \sin(t) _C2 + \cos(t) _C1 + 2 e^t, x(t) = -\frac{3}{10}\sin(t) _C2 - \frac{3}{10}\cos(t) _C1 - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{10}\cos(t) _C2 - \frac{1}{10}\sin(t) _C1 \}$$

2.
$$\begin{cases} 2Dx + (2D+1)y = t \\ Dx + (D-1)y = 2t + 1 \end{cases}$$

Resp:

> sys2:={2*diff(x(t),t)+2*diff(y(t),t)+y(t)=t,diff(x(t),t)+diff(y(t),t)-y(t)=2*t+1};

$$sys2 := \left\{ 2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) = t, \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - y(t) = 2 t + 1 \right\}$$

> dsolve(sys2);

$$\{x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + CI, y(t) = -t - \frac{2}{3}\}$$

3.
$$\begin{cases} x + (D-1)y = e^{2t} \\ Dx - (D+1)y = -e^{t} \end{cases}$$

Resp:

> sys3:= $\{x(t)+diff(y(t),t)-y(t)=exp(2*t),diff(x(t),t)-diff(y(t),t)-y(t)=-exp(t)\}$;

$$sys3 := \left\{ \mathbf{x}(t) + \left(\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\right) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(2t)}, \left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\right) - \mathbf{y}(t) = -\mathbf{e}^{t} \right\}$$

> dsolve(sys3);

$$\{x(t) = \sin(t) _C2 + \cos(t) _C1 + \frac{3}{5} e^{(2t)},$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cos(t) _C2 - \frac{1}{2} \sin(t) _C1 + \frac{2}{5} e^{(2t)} + \frac{1}{2} \sin(t) _C2 + \frac{1}{2} \cos(t) _C1 + \frac{1}{2} e^t \}$$

ANOTAÇÕES

Apêndice IV

Aspectos Históricos

Cálculo Integral

As principais idéias que norteiam o cálculo se desenvolveram, sem dúvida, ao longo de um vasto período de tempo. Os primeiros passos foram dados pelos matemáticos gregos, cuja principal contribuição é o método axiomático-dedutivo como método científico. O primeiro problema envolvendo cálculo integral é o problema de quadratura, isto é, o problema de encontrar um quadrado com a mesma área que qualquer figura cuja área quisesse determinar. Este problema foi resolvido para alguns casos específicos pelos gregos. Cabe mencionar que o problema da quadratura do círculo, cuja impossibilidade depende do fato que o número π é transcendente, teve inúmeras tentativas de resolução por parte de dezenas de gerações de matemáticos, desde a época dos gregos até o aparecimento de ferramentas algébricas na época de **Evariste Galois** (1811 - 1832).

O Renascimento, no século XVI, possibilitou o ressurgimento da metodologia axiomático-dedutiva inventada pelos gregos. Luca Valerio (1552-1618) publicou *De quadratura parabolae* em Roma (1606) que continuava os métodos gregos para abordar este tipo de problemas de calcular áreas. **Johannes Kepler** (1571 - 1630), no seu trabalho sobre movimentos planetários, tinha que encontrar a área de setores de uma elipse e seu método consistia em pensar nas áreas como somas de linhas, uma forma rudimentar de integração.

Posteriormente, **Pierre de Fermat** (1601 – 1665), Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) e Bonaventura Francesco **Cavalieri** (1598 – 1647) foram os próximos a fazer contribuições principais. Cavalieri chegou ao 'método dos indivisíveis' partindo das tentativas de integração de **Kepler**. Ele não foi rigoroso na sua abordagem e não ficou claro como criou esse método. Pelo que parece, Cavalieri imaginou uma área como sendo formada por componentes que eram linhas e somou seu número infinito de 'indivisíveis'. Mediante este método, mostrou que a área abaixo do gráfico de x^n e acima o eixo x entre 0 e a era $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ verificando o resultado para alguns valores de a0 e inferindo o resultado geral. Roberval considerou problemas do mesmo tipo, mas foi muito mais rigoroso que Cavalieri. Roberval pensou na área entre uma curva e uma reta como sendo formada por um número infinito de retângulos infinitamente finos. Aplicou isto para determinar a área abaixo do gráfico de a0 e acima o eixo a0 entre a0 e a1, mostrando que tinha um valor aproximado de a0 e a1 quando a2 fende a3 quando a3 tende a infinito.

Fermat também foi mais rigoroso na sua abordagem mas não forneceu demonstrações. Generalizou o problema descrito anteriormente para os casos da parábola e a hipérbole. Fermat calculou a soma $\sum_{i=1}^n i^p$. Fermat também pesquisou sobre máximos y mínimos considerando onde a tangente à curva é paralela ao eixo x. Este último resultado foi comunicado a René Descartes (1596 - 1650). Devido a este fato, Joseph Louis Lagrange (1736 -1813) afirmou que ele considerava Fermat como o inventor do cálculo.

Descartes inventou um importante método para determinar normais em *La Géometrie*, em 1637 **Johann van Waveren Hudde** (1628 - 1704) inventou um método mais simples, denominado a 'Regra de Hudde'. O método de Descartes e a Regra de Hudde tiveram uma influência importante sobre **Isaac Newton** (1643 – 1727).

Newton escreveu um tratado sobre 'fluxões' em outubro de 1666. Esta obra não foi publicada nesse momento mas foi

lida por muitos matemáticos e teve grande influência no rumo que tomaria o cálculo. **Newton** imaginou que uma partícula que percorre una curva com duas retas móveis que eram as coordenadas. A velocidade horizontal x' e a velocidade vertical y' eram os 'fluxões' de x e y associados com o fluxo do tempo. Os 'fluentes' eram os mesmos x e y. Com esta notação de 'fluxão', $\frac{y'}{x'}$ era a tangente a f(x,y)=0. Neste mesmo tratado, Newton discute o problema inverso: dada a relação entre x e $\frac{y'}{x'}$, encontrar y. Este problema foi resolvido por antiderivação. Este método lhe permitiu o cálculo de áreas e também foi enunciado de maneira clara o Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton teve problemas para publicar sua obra matemática. A obra de **Newton** sobre *Analysis with infinite series* foi escrita em 1669 e circulou como manuscrito. Não foi publicada até 1711. De modo similar, a obra *Method of fluxions and infinite series* foi escrito em 1671 e publicado em inglês em 1736. O original em latim foi publicado muito depois. Nestas duas obras, **Newton** calculou a expansão em séries de sen(x) e cos(x) e a expansão do que é, na verdade, a função exponencial, mas esta função não ficaria estabelecida como tal até que Leonhard Euler (1707 – 1783) apresentou a notação atual e^x . Também, a obra *Tractatus de Quadrarura Curvarum* escrita em 1693, só foi publicada em 1704.

Gottfried von Leibniz (1646 - 1716) aprendeu muito numa viagem pela Europa em que conheceu Christiaan Huygens (1629 - 1695), em Paris, em 1672. Também conheceu Robert Hooke (1635 - 1703) e Robert Boyle (1627 – 1691), em Londres, em 1673 onde comprou vários livros de matemática, incluindo as obras de Isaac Barrow (1630 - 1677). Leibniz manteria correspondência por um longo período com Barrow. Na sua volta a Paris, Leibniz fez um trabalho muito bom sobre cálculo, pensando nos fundamentos de maneira bem diferente a Newton.

Newton considerava que as variáveis mudam ao longo do tempo. **Leibniz** imaginava que as variáveis $x \in y$ variavam sobre seqüências de valores infinitamente próximos. Denotou por $dx \in dy$ as diferenças entre valores consecutivos de essas seqüências. **Leibniz** sabia que $\frac{dy}{dx}$ dava a tangente mas não a usou como propriedade de definição.

Para **Newton**, a integração consistia em encontrar fluxos para um "fluxons", de maneira que tem-se que a integração e a diferenciação são inversas. **Leibniz** usava a integral como uma suma, de forma muito similar à de Cavalieri e também as 'infinitesimais' dx e dy, enquanto **Newton** usava x' e y' que eram velocidades finitas. É claro que nem **Leibniz** nem **Newton** pensavam em termos de funções, mas em termos de gráficos. Para **Newton**, o cálculo era geométrico enquanto **Leibniz** estava mais orientado à análise.

Leibniz sabia que encontrar uma boa notação era muito importante e pensou nela por muito tempo. **Newton**, por outro lado, escreveu mais para ele mesmo e como conseqüência, tendia a usar qualquer notação que se lhe ocorria no momento. A notação d e \int de Leibniz destacavam o aspecto de operadores que provaria se importante mais adiante. Em, Leibniz usava $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ como se faz hoje. Seus resultados sobre cálculo integral foram publicados em 1864 y 1686 sob o nome *Calculus Summatorius*; o termo 'cálculo integral' foi sugerido por **Jacob Jacques Bernoulli** (1654 - 1705) em 1690.

Após **Newton** e **Leibniz**, o desenvolvimento do cálculo foi continuado por **Jacob Bernoulli** y Johann Bernoulli. Porém, quando Berkeley publicou seu *Analyst* em 1734 atacando a falta de rigor no cálculo e disputando a lógica usada como base, passaram-se a fazer grandes esforços para fechar o raciocínio. **Colin Maclaurin** (1698 - 1746) intentou colocar o cálculo sobre uma base geométrica rigorosa mas os fundamentos realmente satisfatórios teriam que esperar pelo trabalho de **Agustín Louis Cauchy** (1789 - 1857).

Equações Diferenciais

As equações diferenciais são um ramo principal das matemáticas pura e aplicada desde sua apresentação na metade do século XVII Aqui, consideram-se as partes mais importantes de sua história, desde seu início com Newton e Leibniz até agora.

As equações diferenciais começaram com Leibniz, os irmãos Bernoulli brothers e outros desde a década de 1680, não muito depois das *equações fluxonais* de Newton. Foram feitas muitas aplicações a problemas geométricos e mecânicos.

O problema de determinar uma curva dada uma propriedade das tangentes a dita curva foi proposto na segunda metade do século XVII. Descartes descreveu como podem ser construídas curvas algébricas satisfazendo tais propriedades. Mas logo os problemas perderam seu contexto cartesiano e começaram a aparecer métodos para construção de curvas transcendentes.

Em 1707, Gabriele Manfredi publicou um livro sobre equações diferenciais de primeiro grau seguindo as diretrizes dos irmãos Bernoulli e Leibniz. Aqui, se dão os inícios aos estudos das equações de variáveis separáveis e homogêneas.

Em 1752, Vincenzo Riccati publicou um tratado em latim sob o título *De usu motus tractorii in constructione aequationum* differentialium, sobre movimento de tração na geometria. A importância desta publicação explica-se porque resumia idéias importantes sobre esta geometria vindas de Euler e Clairaut.

D'Alembert publicou duas obras importantes: *Traité da dynamique* (1743) e *Rechercher sur Le Calcul Intégral* (1745 – 1752). A primeira destas obras versa sobre a resolução do problema de um pêndulo múltiplo, e, a segunda, sobre a resolução de sistemas diferenciais lineares, utilizando a redução de equações a sistemas diferenciais de primeira ordem. Estas obras tiveram boa acolhida entre os contemporâneos tais como Lacroix e Euler. Porém, deve-se a Cauchy a sistematização e organização do conhecimento de cálculo e equações diferenciais no período de 1817 a 1824.

A matemática do século XVIII caracterizou-se por considerar as funções sob dois aspectos importantes: são objetos que podem ser tabelados e calculados, e, surgem da extensão de propriedades algébricas e da transição do finito para o infinito. Esta concepção fez surgir as funções transcendentes (Legendre e Euler) e seu tratamento analítico. Aqui, cabe mencionar o trabalho de Joseph Fourier.

A visão matemática do século XVIII foi enormemente ampliada com os trabalhos de Gauss e a introdução de funções especiais como soluções de equações diferenciais específicas e o surgimento de operadores funcionais. Em 1824, Abel apresentou as funções elípticas como sendo a inversa de uma integral elíptica.

As séries de Lagrange, pouco conhecidas hoje, tiveram um papel fundamental nos trabalhos de Kepler e Laplace.

Já no século XIX, a transformação de variáveis permitiu resolver diversos tipos de equações diferenciais. Foi estabelecida uma teoria geral sobre as transformações. Nesta época aparece o estudo sistemático das equações diferenciais parciais por Hamilton, Jacobi e posteriormente por Hertz e Maxwell. Este século foi fechado com broche do ouro pelas idéias de Poincaré sobre a equação de Hamilton-Jacobi. Desse século, vale a pena mencionar os trabalhos de Riemann, Fredholm e Hilbert.

O século XX é marcado, de maneira geral, por dois fatos importantes: a sistematização da teoria matemática e a aparição dos computadores, que possibilitou a análise numérica como uma ferramenta fundamental para a resolução de equações diferenciais.

ANUIAÇUES	



Exemplo E1: O volume do sólido que está acima do quadrado R = [-2,2] x [-2,2] e abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$, pode ser aproximado pela subdivisão de R em nove quadrados iguais; a área de cada quadrado é igual a 16/9.

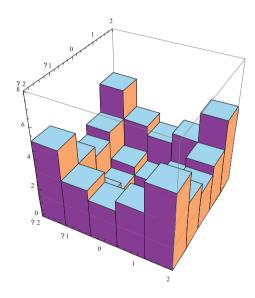
Aproximando o volume pela soma de Riemann abaixo, com m = n = 3, temos:

$$V \approx \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A =$$

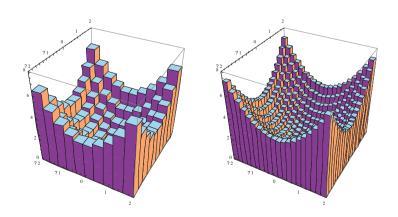
$$= f(-1, -1) \Delta A + f(-1, 0) \Delta A + f(-1, 1) \Delta A + f(0, -1) \Delta A + f(0, 0) \Delta A + f(0, 1) \Delta A + f(1, -1) \Delta A + f(1, 0) \Delta A + f(1, -1) \Delta A =$$

$$= 12x16/9 = 21,333u.v.$$

A figura abaixo mostra a diferença entre o volume do sólido e a soma dos volumes das caixas que foi calculado:



Podemos melhorar a aproximação do volume aumentando o número de subdivisões em R. As ilustrações abaixo mostram aproximações de 100 e 400 quadrados, respectivamente.



Exemplo E2: O valor da integral $\iint_{\mathbb{R}} x^2 y dA$, onde R = [0,3] x [1,2], pode ser obtido através do cálculo:

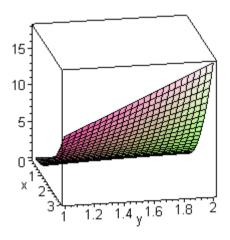
$$\iint_{R} x^{2} y dA = \int_{0}^{3} \left[\int_{1}^{2} x^{2} y dy \right] dx = \int_{0}^{3} \left[x^{2} \frac{y^{2}}{2} \right]_{1}^{2} dx = \int_{0}^{3} \left(x^{2} \frac{4}{2} - x^{2} \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{3} \left(\frac{3}{2} x^{2} \right) dx = \frac{3}{2} \int_{0}^{3} y^{2} dy = \frac{3}{2} \left(\frac{y^{3}}{3} \right)_{0}^{3} = \frac{3}{2} \left(\frac{(3)^{3}}{3} - \frac{(0)^{3}}{3} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{3} = \frac{27}{2} = 13,5$$

$$\iint_{R} x^{2} y dA = \int_{1}^{2} \left[\int_{0}^{3} x^{2} y dx \right] dy = \int_{1}^{2} \left[\frac{x^{3}}{3} y \right]_{0}^{3} dy = \int_{1}^{2} \left(\frac{27}{3} y - 0 \right) dy =$$

$$= \int_{1}^{2} (9y) dy = \frac{9y^{2}}{2} \Big|_{1}^{2} = \frac{36}{2} - \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$$

O valor obtido corresponde ao volume do sólido acima de R e abaixo do gráfico da função $f(x,y) = x^2y$, conforme a ilustração abaixo.



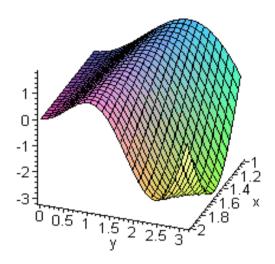
Exemplo E3: A integral $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$, quando $R = [1,2] \times [0,\pi]$, é nula. De fato:

$$\iint_{R} y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} y \operatorname{sen}(xy) dx dy = \int_{0}^{\pi} \left[-\cos xy \right]_{1}^{2} dy = \int_{0}^{\pi} \left(-\cos 2y + \cos y \right) dy = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y \right]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi + \operatorname{sen} \pi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen} 0 = 0$$

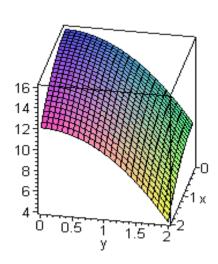
O valor obtido nesta integral representa a diferença de volume da parte do sólido que está acima do retângulo R e da parte

do sólido que está abaixo de R. Como o resultado é zero, estes volumes são iguais.

Se mudarmos a ordem de integração, invertendo as integrais iteradas, a resolução das mesmas irá requerer a aplicação de técnicas de integração, tornando o trabalho mais demorado. Portanto, também é importante observar o tipo de função que iremos integrar e fazer uma boa escolha da ordem de integração.



Exemplo E4: O volume do sólido S que é delimitado pelo parabolóide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, os planos x = 2 e y = 2 e os três planos coordenados, é igual ao volume do sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do retângulo $R = [0,2] \times [0,2]$, como mostra a figura abaixo. Assim, o cálculo do volume deste sólido, usando integral dupla, é dado por:



$$V = \iint_{R} (16 - x^{2} - 2y^{2}) dA =$$

$$= \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} (16 - x^{2} - 2y^{2}) dx dy =$$

$$= \int_{0}^{2} \left[16x - \frac{x^{3}}{3} - 2xy^{2} \right]_{0}^{2} dy =$$

$$= \int_{0}^{2} \left(32 - \frac{8}{3} - 4y^{2} \right) dy =$$

$$= \int_{0}^{2} \left(\frac{88}{3} - 4y^{2} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{88}{3}y - 4\frac{y^{3}}{3} \right]_{0}^{2} = \frac{88.2 - 4.8}{3} = 48u.v.$$

Exemplo E5: Para a determinação do valor médio da função f(x, y) = xy - x na região $R = [0,2] \times [0,1]$, podemos usar integração dupla; inicialmente, a integral de f(x, y) sobre R é:

$$\iint\limits_{R} f(x,y) dx dy = \int\limits_{0}^{1} \left[\int\limits_{0}^{2} (xy - x) dx \right] dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{x^{2}}{2} y - \frac{x^{2}}{2} \right)^{2} dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{(2)^{2}}{2} y - \frac{(2)^{2}}{2} - 0 + 0 \right) dy = \int$$

$$= \int_{0}^{1} (2y-2) dy = 2\frac{y^{2}}{2} - 2y \Big|_{0}^{1} = (1)^{2} - 2(1) - 0 + 0 = -1.$$

Como valor médio de uma função f(x, y) numa região R é dado por:

$$\frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_{R} f(x, y) dx dy$$

e a área do retângulo R é Área(R) = 1 × 2 = 2u.a., temos que o valor médio da função f(x,y) no retângulo R dado é

igual a
$$\frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$
.

Exemplo E6: Se a densidade por unidade de área de uma população de organismos sobre a região $R = [0,3] \times [0,1]$ é $f(x,y) = xy + y^2$ em cada ponto $(x,y) \in R$, a população total sobre essa região será:

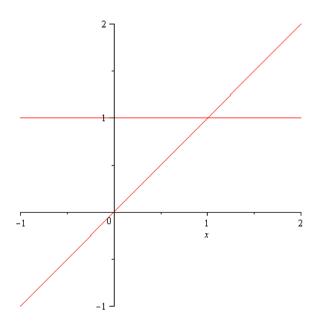
$$\iint_{R} (xy + y^{2}) dx dy = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{3} (xy + y^{2}) dx \right] dy = \int_{0}^{1} \left(\frac{x^{2}}{2} y + xy^{2} \right) \Big|_{0}^{3} dy = \int_{0}^{1} \left(\frac{3^{2}}{2} y + 3y^{2} - \frac{0^{2}}{2} y - 0y^{2} \right) dy =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{9}{2} y + 3y^{2} \right) dy = \frac{9}{2} \cdot \frac{y^{2}}{2} + 3 \frac{y^{3}}{3} \Big|_{0}^{1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1^{3} - 0 - 0 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

milhares de bactérias ou 3250 bactérias.

Exemplo E7: Determinação da região de integração e troca da ordem de integração para a integral $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y) dy dx$: temos que $y \in [x, 1]$ e $x \in [0, 1]$, assim, a seguir temos um esboço desta região e os limites de integração na nova ordem.

> plot({x,1},x=-1..2,color=red,scaling=constrained);



Os novos limites de integração serão:

 $x \in [0, y]$ e $y \in [0, 1]$, logo, a integral pode ser escrita como $\int_{0}^{1} \int_{0}^{y} f(x, y) dx dy$.

Exemplo E8: Para trocarmos a ordem de integração da integral $\int_{0}^{1} \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy dx$, temos, inicialmente, que

 $y \in [x^3, \sqrt{x}]$ e $x \in [0, 1]$; então, fazendo com que x varie em função de y, ou seja, $y = \sqrt{x} \implies y^2 = x$

$$y = x^{3} \Rightarrow (y)^{\frac{1}{3}} = (x^{3})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$
$$\Rightarrow x \in [y^{2}, \sqrt[3]{y}],$$

obtemos: $y \in [0, 1]$. Logo, a integral também pode ser escrita como: $\int\limits_0^1 \int\limits_{v^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx dy$.

Exemplo E9: O valor da integral dupla $\int_{1}^{3} \int_{0}^{1} (1+4xy)dxdy$ pode ser calculado através das seguintes integrais iteradas:

$$\int_{1}^{3} \int_{0}^{1} (1+4xy) dx dy = \int_{1}^{3} \left(x + 4 \frac{x^{2}}{2} y \Big|_{0}^{1} \right) dy = \int_{1}^{3} \left(1 + 4 \frac{(1)^{2}}{2} y - 0 - 4 \frac{(0)^{2}}{2} y \right) dy =$$

$$= \int_{1}^{3} (1+2y) dy = y + 2 \frac{y^{2}}{2} \Big|_{1}^{3} = 3 + (3)^{2} - 1 - (1)^{2} = 10$$

Exemplo E10: Calculando a integral dupla $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 3ydydx$, temos

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3y dy dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3y \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3 \frac{\pi}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3 \cdot 0 \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{1}{3} (-\cos x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} (\cos \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3} (\cos 0) = -\frac{1}{3}$$

Exemplo E11: Calculando a integral $\int\limits_{1}^{4}\int\limits_{0}^{2}(x+\sqrt{y})dxdy$, obtemos:

$$\int_{1}^{4} \int_{0}^{2} (x + \sqrt{y}) dx dy = \int_{1}^{4} \left(\frac{x^{2}}{2} + x \sqrt{y} \Big|_{0}^{2} \right) dy = \int_{1}^{4} \left(\frac{(2)^{2}}{2} + 2\sqrt{y} - \frac{(0)^{2}}{2} - 0\sqrt{y} \right) dy =$$

$$= \int_{1}^{4} \left(2 + 2\sqrt{y} \right) dy = 2y + 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{y^{3}} \Big|_{0}^{4} = 2(4) + \frac{4}{3} \sqrt{4^{3}} - 2(1) - \frac{4}{3} \sqrt{1^{3}} = 8 + \frac{4}{3} \cdot 8 - 2 - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot 8 - 2 - \frac{4}{3} -$$

$$=6+7\cdot\frac{4}{3}=\frac{18+28}{3}=\frac{46}{3}$$

Exemplo E12: Resolvendo $\int_{0}^{1} \int_{0}^{2} xye^{y} dxdy$, determinamos:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{2} xy e^{y} dx dy = \int_{0}^{1} \left(y e^{y} \frac{x^{2}}{2} \Big|_{0}^{2} \right) dy = \int_{0}^{1} \left(y e^{y} \frac{(2)^{2}}{2} - y e^{y} \frac{(0)^{2}}{2} \right) dy = \int_{0}^{1} \left(2y e^{y} \right) dy;$$

agora, utilizando a técnica de integração por partes, temos

$$\int_{0}^{1} (2ye^{y}) dy = 2ye^{y} \Big|_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1} (e^{y}) dy = 2(1)e^{1} - 2(0)e^{0} - 2e^{y} \Big|_{0}^{1} = 2e - (2e^{1} - 2e^{0}) = 2e - 2e + 2 = 2.$$

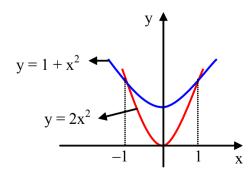
Exemplo E13: O valor de $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} \right) dx dy$ pode ser obtido como segue:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left(\frac{1+x^{2}}{1+y^{2}} \right) dx dy = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1} \frac{1}{1+y^{2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{1+y^{2}} dx \right] dy = \int_{0}^{1} \left[\frac{x}{1+y^{2}} + \frac{x^{3}}{3} \frac{1}{1+y^{2}} \Big|_{0}^{1} \right] dy =$$

$$= \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{1+y^{2}} + \frac{(1)^{3}}{3} \frac{1}{1+y^{2}} - 0 - 0 \right] dy = \int_{0}^{1} \left[\left(1 + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{1+y^{2}} \right] dy =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+y^{2}} \right) dy = \frac{4}{3} \arctan y \Big|_{0}^{1} = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Exemplo E14: A seguir, temos o cálculo de $\iint_W (x+2y)dA$, onde W é a região limitada pelas parábolas $y=2x^2$ e $y=1+x^2$.



Os pontos de intersecção das duas parábolas têm abscissas -1 e 1 e a região W, do Tipo I, pode ser escrita como:

$$W = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, \ 2x^2 < y < 1 + x^2\}.$$

Assim, podemos calcular a integral dupla através das seguintes integrais iteradas:

$$\iint_{W} (x+2y)dA = \int_{-1}^{1} \left[\int_{2x^{2}}^{1+x} (x+2y)dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^{2} \right]_{2x^{2}}^{1+x^{2}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1+x^{2}) + (1+x^{2})^{2} \right] - \left[2x^{3} + 4x^{4} \right] dx =$$

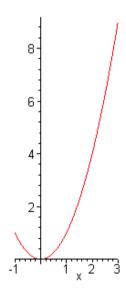
$$= \int_{-1}^{1} \left(x + x^{3} + 1 + 2x^{2} + x^{4} - 2x^{3} - 4x^{4} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-3x^{4} - x^{3} + 2x^{2} + x + 1 \right) dx =$$

$$= \left[-3\frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{4}}{4} + 2\frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{2}}{2} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}.$$

Exemplo E15: O volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região do plano xy, limitada pela reta y = 2x e pela parábola $y = x^2$, pode ser obtido considerando W uma região do Tipo I como segue:

$$W = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x \}$$



Assim, o volume é aproximadamente:

$$V = \iint_{D} (x^{2} + y^{2}) dA = \int_{0}^{2} \left[\int_{x^{2}}^{2x} (x^{2} + y^{2}) dy \right] dx = \int_{0}^{2} \left[x^{2} y + \frac{y^{3}}{3} \right]_{x^{2}}^{2x} dx = \int_{0}^{2} \left[2x^{3} + \frac{8x^{3}}{3} - x^{4} - \frac{x^{6}}{3} \right] dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \left(\frac{14x^{3}}{3} - x^{4} - \frac{x^{6}}{3} \right) dx = \left[\frac{14x^{4}}{12} - \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{7}}{21} \right]_{0}^{2} = \frac{14.16}{12} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} = \frac{216}{35} u.v.$$

Também podemos descrever a região W como do Tipo II:

 $W = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4, \ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y} \ \}$, onde, nas equações dadas inicialmente, isolamos a variável x, ou seja:

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$$
 e $y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}$.

Agora, o volume pode ser calculado como:

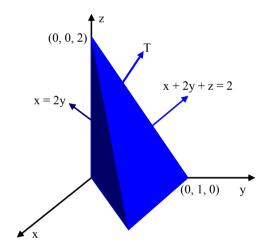
$$V = \iint_{W} ((x^{2} + y^{2})) dA = \int_{0}^{4} \left[\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^{2} + y^{2}) dx \right] dy = \int_{0}^{4} \left[\frac{x^{3}}{3} + xy^{2} \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} = \int_{0}^{4} \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^{3}}{24} - \frac{y^{3}}{2} \right) dy =$$

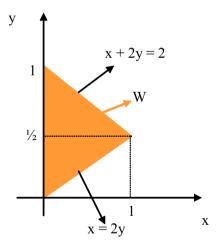
$$= \int_{0}^{4} \left(\frac{1}{3} y^{3/2} + y^{5/2} - \frac{13}{24} y^{3} \right) dy = \left[\frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^{4} \right]_{0}^{4} = \frac{2}{5} \cdot 32 + \frac{2}{7} \cdot 128 - \frac{13}{96} \cdot 256 = \frac{216}{35} u.v.$$

Exemplo E16: Determinação do volume do tetraedro limitado pelos planos x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0 e z = 0.

Em uma questão como esta, é prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana W. base do sólido.

Igualando as equações dos planos, duas a duas, obtemos as retas que contém as arestas do tetraedro:





A figura acima, à esquerda, mostra o tetraedro T, limitado pelos planos coordenados x = 0 e z = 0, o plano vertical x = 2y e o plano x + 2y + z = 2.

Como x + 2y + z = 2 intercepta o plano xy (de equação z = 0) através da reta x + 2y = 2, vemos que T está sobre a região triangular W, do plano xy, limitada pelas retas x = 2y, x + 2y = 2 e x = 0.

O plano x + 2y + z = 2 pode ser escrito como z = 2 - x - 2y e a região W como:

$$W = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x/2 \le y \le 1 - x/2\}.$$

Portanto, o volume de T é:

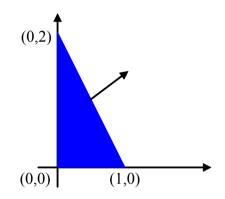
$$V = \iint_{W} (2 - x - 2y) dA = \int_{0}^{1} \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) dy dx = \int_{0}^{1} \left[2y - xy - y^{2} \right]_{x/2}^{1-x/2} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left[2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{2} - x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{2}}{4} \right] dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(2 - x - x + \frac{x^{2}}{2} - 1 + x - \frac{x^{2}}{4} - x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{2}}{4} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(1 - 2x + x^{2} \right) dx = \left[x - x^{2} + \frac{x^{3}}{3} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} u.v.$$

Exemplo E17: Determinação da massa e do centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0,0), (1,0) e (0,2), sendo a função densidade $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.



A região R está limitada pelas retas x = 0, y = 0 e y = 2 - 2x. Podemos expressar R por:

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2 - 2x\}.$$

A massa da lâmina, em unidades de massa, é:

$$M = \iint_{R} \rho(x, y) dA = \iint_{R} (1 + 3x + y) dA$$

Portanto:

$$M = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (1+3x+y) dy dx = \int_{0}^{1} \left[y+3xy+\frac{y^{2}}{2} \right]_{0}^{2-2x} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(2-2x+6x-6x^{2}+\frac{(2-2x)^{2}}{2} \right) dx = \int_{0}^{1} \left(2+4x-6x^{2}+2-4x+2x^{2} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(4-4x^{2} \right) dx = \left[4x-4\frac{x^{3}}{3} \right]_{0}^{1} = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Os momentos são:

$$M_{Y} = \iint_{D} y \rho(x, y) dA = \iint_{D} (y + 3xy + y^{2}) dA =$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (y + 3xy + y^{2}) dy dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{y^{2}}{2} + 3x \frac{y^{2}}{2} + \frac{y^{3}}{3} \right]_{0}^{2-2x} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{(2 - 2x)^{2}}{2} + 3x \frac{(2 - 2x)^{2}}{2} + \frac{(2 - 2x)^{3}}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(2 - 4x + 2x^{2} + 6x - 12x^{2} + 6x^{3} + \frac{8}{3} - 8x + 8x^{2} - \frac{8x^{3}}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{14}{3} - 6x - 2x^{2} + \frac{10}{3}x^{3} \right) dx = \left[\frac{14}{3}x - 3x^{2} - \frac{2}{3}x^{3} + \frac{5}{6}x^{4} \right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{14}{3} - 3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6};$$

$$M_{X} = \iint_{D} x \rho(x, y) dA = \iint_{D} (x + 3x^{2} + xy) dA =$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{2-2x} (x + 3x^{2} + xy) dy dx = \int_{0}^{1} \left[xy + 3x^{2}y + x \frac{y^{2}}{2} \right]_{0}^{2-2x} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(2x - 2x^{2} + 6x^{2} - 6x^{3} + x \frac{(2 - 2x)^{2}}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(2x + 4x^{2} - 6x^{3} + 2x - 4x^{2} + 2x^{3} \right) dx =$$

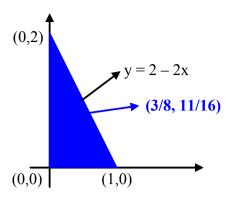
$$= \int_{0}^{1} \left(4x - 4x^{3} \right) dx = \left[2x^{2} - x^{4} \right]_{0}^{1} = 2 - 1 = 1 .$$

Assim:

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{8/3} = \frac{3}{8}$$
,

$$\overline{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

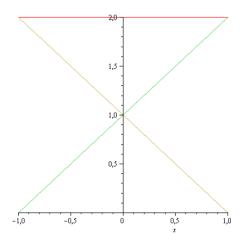
Logo, o centro de massa da lâmina é o ponto (3/8, 11/16), indicado na figura:

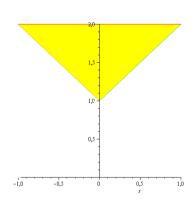


Exemplo E18: Cálculo de $\iint_R (x^2-y)dA$, sendo R a região delimitada pelas retas y=-x+1, y=x+1 e y=2.

Fazendo um esboço de R é possível observar uma simetria. Assim, podemos inicialmente, calcular a integral sobre uma metade de R; o resultado procurado é o dobro desse resultado obtido.

> plot({1-x,x+1,2},x=-1..1);





Logo, considerando a região $y \in [1-x,2]$ e $x \in [-1,0]$, a integral sobre essa região será:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-1}^{2} (x^{2} - y) dy dx = \int_{-1}^{0} \left(yx^{2} - \frac{y^{2}}{2} \Big|_{1-x}^{2} \right) dx = \int_{-1}^{0} \left(2x^{2} - 2 - x^{2} (1-x) + \frac{(1-x)^{2}}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2x^{2} - 2 - x^{2} + x^{3} + \frac{1 - 2x + x^{2}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(4x^{2} - 4 - 2x^{2} + 2x^{3} + 1 - 2x + x^{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(2x^{3} + 3x^{2} - 2x - 3 \right) dx = \frac{1}{2} \left(2\frac{x^{4}}{4} + 3\frac{x^{3}}{3} - 2\frac{x}{2} - 3x \Big|_{-1}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 + 1 - 3 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{4}$$

Agora, multiplicando o resultado por 2, temos o valor de $I = \iint_R (x^2 - y) dA$ sobre a região compreendida pelas retas

$$y = -x + 1$$
, $y = x + 1$ e $y = 2$:

$$I = -\frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2}$$

Também é conveniente resolver a integral $\int_{1}^{2} \int_{1-y}^{y-1} (x^2 - y) dx dy$ e comparar os resultados.

Exemplo E19: A integral $\iint_R (2x^2-3y)dA$, se R é a região que consiste de todos os pontos (x,y), tais que,

 $-1 \le x \le 2$ e $-1 \le y \le 3$, é dada por:

$$\iint_{R} \left(2x^{2} - 3y \right) dA = \int_{1}^{3} \int_{1}^{2} \left(2x^{2} - 3y \right) dx dy = \int_{1}^{3} \left(2\frac{x^{3}}{3} - 3x y \Big|_{-1}^{2} \right) dy =$$

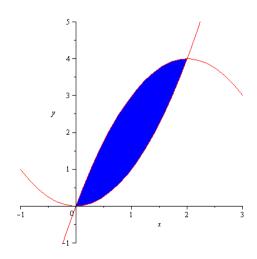
$$= \int_{1}^{3} \left[\left(2\frac{(2)^{3}}{3} - 3 \cdot 2 \cdot y \right) - \left(2\frac{(-1)^{3}}{3} - 3(-1)y \right) \right] dy = \int_{1}^{3} \left[\left(2 \cdot \frac{8}{3} - 6y \right) - \left(2 \cdot \frac{-1}{3} + 3y \right) \right] dy =$$

$$= \int_{1}^{3} \left[\frac{16}{3} - 6y + \frac{2}{3} - 3y \right] dy = \int_{1}^{3} \left[6 - 9y \right] dy = \left(6y - 9\frac{y^{2}}{2} \right) \Big|_{1}^{3} = \left(6 \cdot 3 - 9\frac{(3)^{2}}{2} \right) - \left(6 \cdot 1 - 9\frac{(1)^{2}}{2} \right) =$$

$$= \left(18 - 9 \cdot \frac{9}{2} \right) - \left(6 - \frac{9}{2} \right) = 18 - \frac{81}{2} - 6 + \frac{9}{2} = 12 - 36 = -24.$$

Exemplo E20: A área da região no plano xy, limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$, está determinada, a seguir, por integração dupla:

> plots[implicitplot]({y=x^2,y=4*x-x^2},x=-1..3,y=-1..5);



Os pontos de intersecção das curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$ são (0,0) e (2,4).

$$A = \iint_{R} dy dx = \int_{0}^{2} \int_{x^{2}}^{4x-x^{2}} dy dx = \int_{0}^{2} \left(y \Big|_{x^{2}}^{4x-x^{2}} \right) dx = \int_{0}^{2} \left(y \Big|_{x^{2}}^{4x-x^{2}} \right) dx = \int_{0}^{2} \left(4x - x^{2} - x^{2} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \left(4x - 2x^{2} \right) dx = 4 \frac{x^{2}}{2} - 2 \frac{x^{3}}{3} \Big|_{0}^{2} = 4 \frac{(2)^{2}}{2} - 2 \frac{(2)^{3}}{3} - 4 \frac{(0)^{2}}{2} + 2 \frac{(0)^{3}}{3} = \frac{16}{2} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} =$$

Exemplo E21: O centro de massa de uma lâmina correspondente à região parabólica $0 \le y \le 4 - x^2$, com densidade no ponto (x, y) proporcional à distância entre (x, y) e o eixo dos x, ou seja, $\rho(x, y) = ky$ (densidade variável) é $\left(0, \frac{16}{7}\right)$.

De fato, primeiramente, pela simétrica em relação ao eixo dos x e como $\rho(x,y)=ky$, o centro de massa esta no eixo dos x. Logo, $\overline{x}=0$. Também,

$$\max = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^{2}} ky dy dx = k \int_{-2}^{2} \frac{y^{2}}{2} \Big|_{0}^{4-x^{2}} dx = \frac{k}{2} \int_{-2}^{2} \left[\left(4 - x^{2} \right)^{2} - (0)^{2} \right] dx = \frac{k}{2} \int_{-2}^{2} \left(4 - 8x^{2} + x^{4} \right) dx =$$

$$= \frac{k}{2} \left(16x - 8\frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{5}}{5} \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{k}{2} \left(16(2) - 8\frac{(2)^{3}}{3} + \frac{(2)^{5}}{5} - 16(-2) + 8\frac{(-2)^{3}}{3} - \frac{(-2)^{5}}{5} \right) =$$

$$= \frac{k}{2} \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{k}{2} \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} \right) = \frac{k}{2} \left(\frac{960 - 640 + 192}{15} \right) =$$

$$= k \left(\frac{256}{15} \right) = \left(\frac{256}{15} k \right) u.m.$$

O momento em torno do eixo dos x é dado por:

$$M_{x} = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^{2}} (y)kydydx = k \int_{-2}^{2} \frac{y^{3}}{3} \Big|_{0}^{4-x^{2}} dx = \frac{k}{3} \int_{-2}^{2} \left[(4-x^{2})^{3} - (0)^{3} \right] dx =$$

$$= \frac{k}{3} \int_{-2}^{2} (64 - 48x^{2} + 12x^{4} - x^{6}) dx = \frac{k}{3} \left[64x - 48\frac{x^{3}}{3} + 12\frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{7}}{7} \right]_{-2}^{2} = \frac{4096}{105} k$$

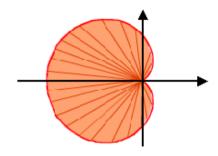
Portanto,

$$\overline{y} = \frac{M_x}{\text{Massa}} = \frac{\frac{4096}{105}k}{\frac{256}{15}k} = \frac{16}{7}.$$

E assim, o centro de massa é o ponto $\left(0,\frac{16}{7}\right)$.

Exemplo E22: Cardióide

Esta é a curva descrita por um ponto pertencente a um círculo de raio a que gira na parte externa de um outro círculo fixo de raio a. É também um caso especial da Espiral de Pascal.



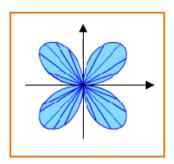
São equações de cardióides:

$$r(\theta) = a(1 \pm \cos\theta)$$
 e $r(\theta) = a(1 \pm \sin\theta)$.

Área abrangida pela curva =
$$(\frac{3}{2}\pi a^2)u.a.$$

Comprimento de arco da curva = (8 a) u.c.

Exemplo E23: Rosácea



São equações de rosáceas:

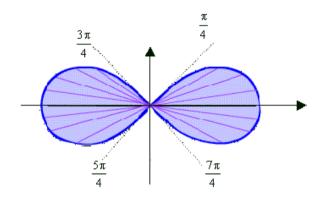
$$r = a\cos(n\theta)$$
 e $r = a\sin(n\theta)$, para $n = 1, 2, 3...$

É importante observar que:

- para n ímpar temos uma rosácea de "n" pétalas;
- para n par temos uma rosácea de "2n" pétalas;
- a metade de uma pétala se encontra entre $0 e \frac{\pi}{2n}$;

- para $r = a\cos(n\theta)$ a metade de uma das pétalas fica junto ao eixo polar;
- para $r = a \operatorname{sen}(n\theta)$ a metade de uma das pétalas fica junto a reta $\theta = \frac{\pi}{2n}$.

Exemplo E24: Lemniscata

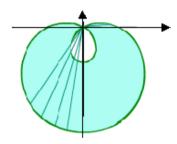


São equações de lemniscatas:

 $r^2=a^2\cos 2\theta$ e $r^2=a^2sen 2\theta$, para a = distância do centro ao ponto de interseção de uma alça com o eixo coordenado.

Área de uma alça = $(a^2)u.a.$

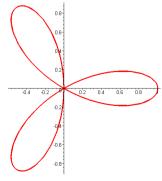
Exemplo E25: Limaçon ou Espiral de Pascal



São equações de limaçons:

 $r = a + b.\cos\theta$ e $r = a + b.\sin\theta$, que possuem laço se a < b. Se a = b, a curva é uma cardióide.

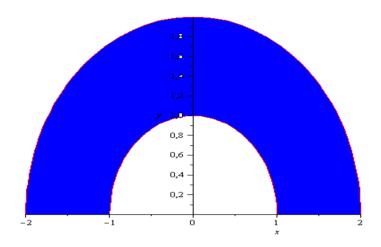
Exemplo E26: A rosácea $\rho = cos(3\theta)$ de três pétalas, mostrada na figura abaixo, tem área igual a três vezes a área de uma pétala.



Assim, mediante integração dupla, a área compreendida pela rosácea é:

Exemplo E27: Resolução de $\iint_R (3x+4y^2)dA$, onde R é a região no semi-plano superior limitado pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

 $> plots[implicitplot]({x^2+y^2=1,x^2+y^2=4},x=-2..2,y=0..2);$



$$R = \{(x, y) / y \ge 0 \ e \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Em coordenadas polares R é dada por:

$$1 \le \rho \le 2$$
, $0 \le \theta \le \pi$.

Portanto, substituindo $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho sen\theta$ na função de duas variáveis dada, temos:

$$\iint_{R} (3x+4y^{2})dA = \iint_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} (3\rho \cos\theta + 4\rho^{2} \sin^{2}\theta) \rho d\rho d\theta = \iint_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} (3\rho^{2} \cos\theta + 4\rho^{3} \sin^{2}\theta) d\rho d\theta =$$

$$= \iint_{0}^{\pi} \left(3\frac{\rho^{3}}{3} \cos\theta + 4\frac{\rho^{4}}{4} \sin^{2}\theta \Big|_{1}^{2} \right) d\theta = \iint_{0}^{\pi} (2)^{3} \cos\theta + (2)^{4} \sin^{2}\theta - (1)^{3} \cos\theta - (1)^{4} \sin^{2}\theta) d\theta =$$

$$= \iint_{0}^{\pi} \left(8\cos\theta + 16\sin^{2}\theta - \cos\theta - \sin^{2}\theta \right) d\theta = \iint_{0}^{\pi} \left(7\cos\theta + 15\sin^{2}\theta \right) d\theta$$

Agora, usando a identidade $\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$, podemos escrever:

$$\int_{0}^{\pi} \left(7\cos\theta + 15\sin^{2}\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left(7\cos\theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right) d\theta = \int_{0}^{\pi} \left(7\cos\theta\right) d\theta + \frac{15}{2} \int_{0}^{\pi} d\theta - \frac{15}{2} \int_{0}^{\pi} (\cos 2\theta) d\theta =$$

$$= 7\int_{0}^{\pi} \left(\cos\theta\right) d\theta + \frac{15}{2} \int_{0}^{\pi} d\theta - \frac{15}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} (2\cos 2\theta) d\theta = \text{(mediante substituição de variáveis)}$$

$$= \left(7\sin\theta\Big|_{0}^{\pi} + \frac{15}{2}\theta\Big|_{0}^{\pi} - \frac{15}{4}\sin 2\theta\Big|_{0}^{\pi}\right) = \left((7\sin\pi - 7\sin\theta) + (\frac{15}{2}\cdot\pi - \frac{15}{2}\cdot\theta) - (\frac{15}{4}\sin 2\pi + \frac{15}{4}\sin\theta)\right) =$$

$$= 0 - 0 + \frac{15\pi}{2} - 0 - 0 - 0 = \frac{15\pi}{2}.$$

Exemplo E28: Encontrar a área da região delimitada pelo gráfico de $\rho = 3\cos(3\theta)$.

Solução: Temos que lembrar que as equações da rosácea podem ser:

$$\rho = a\cos(n\theta)$$
 e $\rho = asen(n\theta)$ para n =1, 2, 3..., que possuem:

Para n ímpar, temos uma rosácea de "n" pétalas;

Para n par, temos uma rosácea de "2n" pétalas.

A metade de uma das pétalas se encontrará entre $0 e^{\frac{\pi}{2n}}$.

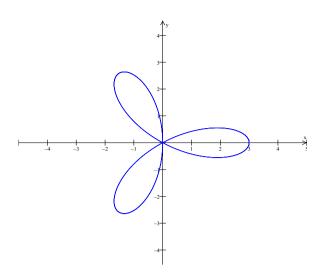
Para $\rho = a\cos(n\theta)$ a metade de uma das pétalas ficará junto ao eixo polar.

Para $\rho = asen(n\theta)$ a metade de uma das pétalas ficará junto a reta $\theta = \frac{\pi}{2n}$.

Logo, na equação do raio, $\rho=3\cos3\theta$, n = 3 e é impar, assim temos uma rosácea de 3 pétalas, a metade de uma das pétalas está entre 0 e $\frac{\pi}{2n}$, ou seja, entre 0 e $\frac{\pi}{6}$, onde uma pétala fica entre $\frac{-\pi}{6}$ e $+\frac{\pi}{6}$, assim os limites de integração são dados por:

$$\frac{-\pi}{6} \! \leq \! \theta \leq \! \frac{\pi}{6} \,$$
 limites de integração fixos para θ .

 $0 \le \rho \le 3\cos 3\theta$ limites de integração variável para ρ .



Portanto, a área de uma pétala da curva é:

$$\frac{1}{3}A = \iint_{R} dA = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{0}^{3\cos 3\theta} \rho \ d\rho \ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\rho^{2}}{2} \right]_{0}^{3\cos 3\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{(3\cos 3\theta)^{2}}{2} - \frac{0}{2} \right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{9}{2} \cos(3\theta) d\theta = \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{2}(3\theta) d\theta$$

Utilizando identidades sobre medidas múltiplas $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$ Logo:

$$\frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{2}(3\theta) d\theta = \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + \cos 6\theta}{2}\right) d\theta = \frac{9}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\theta) d\theta =$$

$$= \frac{9}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta + \frac{9}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 6\theta d\theta =$$

$$= \frac{9}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 6 \cos 6\theta d\theta = \left[\frac{9}{4}\theta \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right] + \left[\frac{9}{24} sen6\theta \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{-\pi}{6}\right)\right] + \left[\frac{3}{8} sen\pi - \frac{3}{8} sen(-\pi)\right] = \frac{3}{4}\pi$$

Exemplo E29: $\iiint_R xy^2z^3dxdydz = \frac{1}{364}$, quando R é a região, no primeiro octante, limitada pela superfície z = xy e os planos x = y, x = 1 e z = 0.

Pelo fato de R estar no primeiro octante, os seus limites inferiores são nulos, assim:

Limites para
$$z \Rightarrow 0$$
 a xy
Limites para $y \Rightarrow 0$ a x
Limites para $x \Rightarrow 0$ a 1.

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[\int_{0}^{xy} xy^{2} z^{3} dz \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[xy^{2} \int_{0}^{xy} z^{3} dz \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[xy^{2} \left(\frac{z^{4}}{4} \Big|_{0}^{xy} \right) \right] dy dx = \\
= \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[xy^{2} \left(\frac{(xy)^{4}}{4} - \frac{(0)^{4}}{4} \right) \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left(\frac{x^{5} y^{6}}{4} \right) dy dx = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{x} \left(\frac{x^{5} y^{6}}{4} \right) dy \right] dx = \\
= \int_{0}^{1} \left[\frac{x^{5}}{4} \int_{0}^{x} y^{6} dy \right] dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{x^{5}}{4} \left(\frac{y^{7}}{7} \Big|_{0}^{x} \right) \right] dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{x^{5}}{4} \left(\frac{x^{7}}{7} - \frac{0^{7}}{7} \right) \right] dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{x^{12}}{28} \right) dx = \\
= \frac{x^{13}}{13 \cdot 28} \Big|_{0}^{1} = \frac{(1)^{13}}{364} - \frac{(0)^{13}}{364} = \frac{1}{364}.$$

Exemplo E30: Resolvendo $\iint_R (x+y+z)dV$, se $R = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$, temos:

$$\iint_{R} (x+y+z)dV = \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} \int_{0}^{1} (x+y+z)dxdydz = \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} \left[\frac{x^{2}}{2} + (y+z) \cdot x \Big|_{0}^{1} \right] dydz =$$

$$= \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} \left[\frac{(1)^{2}}{2} + (y+z) \cdot 1 - \frac{(0)^{2}}{2} - (y+z) \cdot 0 \right] dydz = \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} \left[\frac{1}{2} + y + z \right] dydz =$$

$$= \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{2} y + \frac{y^{2}}{2} + zy \Big|_{0}^{2} \right) dz = \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{(2)^{2}}{2} + 2z - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{(0)^{2}}{2} + 0 \right) dz = \int_{0}^{3} (3 + 2z) dz =$$

$$= \left(3z + 2\frac{z^{2}}{2} \Big|_{0}^{3} \right) = 3 \cdot 3 + 2\frac{(3)^{2}}{2} - 3 \cdot 0 - 2\frac{(0)^{2}}{2} = 9 + 9 = 18.$$

Exemplo E31: Calculando $\int_{1}^{1} \int_{1}^{1} x^2 y^2 z^2 dx dy dz$ obtemos:

$$\int_{-1-1-1}^{1} \int_{-1-1-1}^{1} x^{2} y^{2} z^{2} dx dy dz = \int_{-1-1}^{1} \left[\frac{x^{3}}{3} y^{2} z^{2} \right]_{-1}^{1} dy dz = \int_{-1-1}^{1} \left[\frac{(1)^{3}}{3} y^{2} z^{2} - \frac{(-1)^{3}}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz =$$

$$= \int_{-1-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3} y^{2} z^{2} + \frac{1}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz = \int_{-1-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{y^{3}}{3} \cdot z^{2} \right]_{-1}^{1} dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{9} \cdot (1)^{3} \cdot z^{2} - \frac{2}{9} \cdot (-1)^{3} \cdot z^{2} \right] dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{9} \cdot z^{2} + \frac{2}{9} \cdot z^{2} \right] dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{4}{9} \cdot z^{2} \right] dz =$$

$$= \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{z^{3}}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{(1)^{3}}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{(-1)^{3}}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{27}.$$

Exemplo E32:
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{0}^{xy} x dz dy dx = \frac{1}{10}.$$

De fato:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{0}^{xy} x dz dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[zx \Big|_{0}^{xy} \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[x \cdot xy - z \cdot 0 \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \left[x^{2} y \right] dy dx = \int_{0}^{1} \left[x^{2} \frac{y^{2}}{2} \Big|_{0}^{x} \right] dx = \int_{0}^{1} \left[x^{2} \frac{(x)^{2}}{2} - x^{2} \frac{(0)^{2}}{2} \right] dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{x^{4}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{5}}{5} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{10} \cdot (1)^{5} - \frac{1}{10} \cdot (0)^{5} = \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{10}.$$

Exemplo E33: Para calcular $\iiint\limits_{\mathbb{R}}zdV$, quando R é o tetraedro delimitado pelos planos

x=0, y=0, z=0 e x+y+z=1, temos, inicialmente, que os planos z=0 e x+y+z=1 se interceptam na reta x+y=1 (pertencente ao plano xy). A projeção de R é uma região triangular, e pode ser escrita como:

$$R = \{(x, y, z) / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$$
.

Assim, a integral pode ser calculada através das integrais iteradas:

$$\iiint_{R} z dV = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \int_{0}^{1-x-y} z dz dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \left[\frac{z^{2}}{2} \Big|_{0}^{1-x-y} \right] dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \left(\frac{(1-x-y)^{2}}{2} - \frac{(0)^{2}}{2} \right) dy dx = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \left(\frac{(1-x-y)^{2}}{2} - \frac{(0)^{2}}{2} \right) dy dx$$

Essa integral obtida acima pode ser resolvida com a mudança de variável $u=1-x-y \Rightarrow du=-dy$ ou dy=-du, ou seja, como

$$\int \int -\frac{u^2}{2} du dx = \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} \right) dx = \int \left(-\frac{1}{6} u^3 \right) dx,$$

temos:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \left(\frac{(1-x-y)^{2}}{2} \right) dy dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(-\frac{1}{6} (1-x-y)^{3} \Big|_{0}^{1-x} \right) dx = \int_{0}^{1} \left(-\frac{1}{6} [1-x-(1-x)]^{3} + \frac{1}{6} (1-x-(0))^{3} \right) dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \left(-\frac{1}{6} [0]^{3} + \frac{1}{6} (1-x)^{3} \right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{6} (1-x)^{3} \right) dx = \frac{1}{6} \int_{0}^{1} (1-x)^{3} dx = \frac{1}{6} \cdot -\frac{(1-x)^{4}}{4} \Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\left(1-1\right)^4}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(1-0\right)^4}{4} = -\frac{1}{24} \cdot \left(0\right)^4 + \frac{1}{24} \cdot \left(1\right)^4 = \frac{1}{24}$$

Exemplo E34: Cálculo da integral tripla $\iiint_R xy\sin(yz)dV$, quando R um paralelepípedo retangular limitado pelos planos $x=\pi$, $y=\frac{\pi}{2}$, $z=\frac{\pi}{3}$ e pelos planos coordenados:

$$\iint_{R} xy \sin(yz) dV = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{3} xy \sin(yz) dz dy dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{3} xy \sin(yz) dz dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[-x \cos(yz) \Big|_{0}^{\pi} \right] dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[-x \cos\left(yz\right) \Big|_{0}^{\pi} \right] dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[-x \cos\left(yz\right) \Big|_{0}^{\pi} \right] dy dx + \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} x dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[-x \cos\left(xyz\right) \Big|_{0}^{\pi} \right] dy dx + \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} x dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} xy \sin(yz) dV = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} xy \sin(yz) dy dx + \int_{0}^{\pi} xy \sin(yz) dz dy dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (-x \sin\left(xyz\right) + x \sin(yz)) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin(yz)) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) + x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \cdot \frac{\pi}{2} - x \cdot 0) dx = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xyz\right) dx + \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (x \sin\left(xy$$

Exemplo E35: Calculando $\int_{-1-1-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^2 y^2 z^2 dx dy dz$ obtemos:

$$\int_{-1-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^{2} y^{2} z^{2} dx dy dz = \int_{-1-1}^{1} \left[\frac{x^{3}}{3} y^{2} z^{2} \Big|_{-1}^{1} \right] dy dz = \int_{-1-1}^{1} \left[\frac{(1)^{3}}{3} y^{2} z^{2} - \frac{(-1)^{3}}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3} y^{2} z^{2} + \frac{1}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz = \int_{-1-1}^{1} \left[\frac{2}{3} y^{2} z^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} y^{2} y^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} y^{2} y^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} y^{2} y^{2} \right] dy dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{9} \cdot (1)^{3} \cdot z^{2} - \frac{2}{9} \cdot (-1)^{3} \cdot z^{2} \right] dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{9} \cdot z^{2} + \frac{2}{9} \cdot z^{2} \right] dz = \int_{-1}^{1} \left[\frac{4}{9} \cdot z^{2} \right] dz =$$

$$= \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{z^{3}}{3} \Big|_{-1}^{1} \right] = \frac{4}{9} \cdot \frac{(1)^{3}}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{(-1)^{3}}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$$

Exemplo E36:
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z\rho \ dz d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}$$

De fato:

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-\rho^{2}}} z\rho \, dz d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{\sqrt{1-\rho^{2}}} z\rho \, dz \right] d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left[\rho \cdot \frac{z^{2}}{2} \Big|_{0}^{\sqrt{1-\rho^{2}}} \right] d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left[\frac{\rho}{2} \left(\sqrt{1-\rho^{2}} \right)^{2} - 0^{2} \right] d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left[\frac{\rho}{2} \left(1 - \rho^{2} \right) \right] d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left[\int_{0}^{1} \frac{1}{2} \left(\rho - \rho^{3} \right) d\rho \right] d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\rho^{2}}{2} - \frac{\rho^{4}}{2} \Big|_{0}^{1} \right) \right] d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 \right) \right] d\rho \, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} d\theta = \int_{0}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{8} \cdot \theta \Big|_{0}^{2\pi} = \frac{1}{8} (2\pi - 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo E37: Suponha que um arame semicircular tenha a equação $y=\sqrt{a^2-x^2}$, para a>0. Sabe-se também que a densidade linear de massa é 3a g / cm em y=0 e vai decrescendo linearmente em relação a y para um valor de 2a g / cm em y=a.

A massa $\,M\,$ do arame pode ser calculada mediante a integral de linha:

$$M = \int_{C} \delta(x, y) dS = \int_{C} (3a - y) dS$$

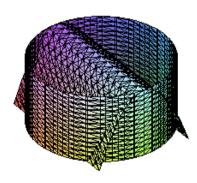
sendo C a curva $\vec{r}(t) = a \cos(t) \vec{i} + a \sin(t) \vec{j}$, $0 \le t \le \pi$.

Assim
$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} = a$$
.

Logo,

$$M = \int_C (3a - y)dS = \int_0^{\pi} [3a - asen(t)]adt = (3\pi - 2)a$$
 g

Exemplo E38: Calcule a área da superfície cilíndrica que se estende verticalmente desde o círculo $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy até o cilindro parabólico $z = 4 - x^2$. Veja a figura.



A área $\,A\,$ da superfície em questão é dada por:

$$A = \int_C (4 - x^2) dS$$

sendo C a curva $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Assim
$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \text{sen}^2(t) + 4 \cos^2(t)} = 2$$
.

Então
$$A = \int_C (2 - x^2) dS = \int_0^{2\pi} (4 - 4\cos^2(t)) \, 2dt = 8\pi$$
.

Exemplo E39: Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = (e^x - y^3)\vec{i} + (\text{sen}(y) + x^3)\vec{j}$ numa partícula que percorre uma volta na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no sentido anti-horário.

O trabalho W realizado pelo campo está dado por $W = \int_C (e^x - y^3) dx + (sen(y) + x^3) dy$.

Tal integral de linha pode ser calculada, mediante o teorema de Green, como

$$W = \iint_{R} \left(\frac{\partial (sen(y) + x^{3})}{\partial x} - \frac{\partial (e^{x} - y^{3})}{\partial y} \right) dA = \iint_{R} (3x^{2} + 3y^{2}) dA,$$

sendo R o círculo contido em $x^2 + y^2 = 1$.

Agora, basta integrar em coordenadas polares:

$$W = \iint_{P} (3x^{2} + 3y^{2}) dA = 3 \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^{2} r dr d\theta = \frac{3}{4} \int_{0}^{2\pi} d\theta = \frac{3}{2} \pi.$$

Exemplo E40: Calcule a área envolvida pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Seja C a curva sobre a elipse orientada em sentido anti-horário e R a região contida nela. Logo, a área A pode ser calculada de duas formas:

$$A = \iint_{R} dA = \int_{C} x dy \text{ e } A = \iint_{R} dA = \int_{C} -y dx$$

ou ainda, como $A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$. Pode-se usar a parametrização

$$\vec{r}(t) = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{j}$$
, $0 \le t \le 2\pi$.

Utilizando a última fórmula tem-se que

$$A = \frac{1}{2} \int_{C} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (ab \cos^{2}(t) + ab \sin^{2}(t)) dt = \pi ab.$$

Exemplo E41: A função $y(x) = e^{-3x} + c$ é solução da equação diferencial y' + 3y = 0, pois substituindo $y = e^{-3x} + c$ e $y' = -3e^{-3x}$ na equação diferencial, obtemos uma igualdade verdadeira: $-3e^{-3x} + 3(e^{-3x} + c) = 0$ \Rightarrow c = 0, logo, $-3e^{-3x} + 3(e^{-3x} + 0) = 0 \Rightarrow -3e^{-3x} + 3e^{-3x} = 0$.

Exemplo E42: A função y = sen(2x) é solução da equação diferencial y'' + 4y = 0; com a substituição de y = sen(2x), $y' = 2\cos(2x)$ e y'' = -4sen(2x) na equação dada, obtemos -4sen(2x) + 4sen(2x) = 0, ou seja, 0=0.

Exemplo E43: Para mostrar que a função y(x) definida implicitamente por $y^3 + 3y - x^3 = 4$ é solução da equação diferencial $y' = \frac{x^2}{(y^2 + 1)}$, primeiro precisamos derivar implicitamente $y^3 + 3y - x^3 = 4$:

$$3y^2 + 3 - 3x^2 \frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + 1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{y^2 + 1}.$$

A seguir, substituindo $y' = \frac{x^2}{(y^2 + 1)}$ na equação diferencial temos:

$$\frac{x^2}{(y^2+1)} = \frac{x^2}{(y^2+1)} \Rightarrow \frac{x^2}{(y^2+1)} - \frac{x^2}{(y^2+1)} = 0,$$

o que prova que a função v(x) é solução da equação diferencial dada.

Exemplo E44: A função y(t) definida implicitamente por $(1+y^3)^2=(1+t^2)^3$ é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dt}=\frac{t(1+y^3)}{y^2(1+t^2)}.$ De fato, procedendo a derivação, temos:

$$2(1+y^3)3y^2\frac{dy}{dt} = 3(1+t^2)^2 2t$$

$$6y^{2}(1+y^{3})\frac{dy}{dt} = 6t(1+t^{2})^{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(1+t^2)^2}{y^2(1+y^3)};$$

substituindo essa relação na equação dada, obtemos:

$$\frac{t(1+t^2)^2}{y^2(1+y^3)} = \frac{t(1+y^3)}{y^2(1+t^2)},$$

ou $(1+t^2)^3=(1+y^3)^2$. Essa igualdade é uma identidade, pois satisfaz y(t).

Exemplo E45: Lembrando que a derivada $\frac{dy}{dx}$ de $\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$ é $\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$, podemos verificar que a função dada

na forma paramétrica $\begin{cases} x = \alpha \ sent \\ y = \beta \cos t \end{cases} \text{ \'e solução da equação } y' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x}{y} \, .$

Então, como $\begin{cases} x = \alpha \ sent \\ v = \beta \cos t \end{cases}$ temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta sent}{\alpha \cos t}$; substituindo na equação dada, resulta:

$$-\frac{\beta \, sent}{\alpha \, \cos t} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\alpha \, sent}{\beta \cos t}$$

$$\therefore \frac{sent}{\cos t} = \frac{sent}{\cos t}.$$

Exemplo E46: Resolução da equação $y' + \frac{2}{x}y = x^2$.

a) Método de Bernoulli

Inicialmente consideramos v = u.v, com u e v funções incógnitas:

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$
.

Substituindo y e y' na equação $y' + \frac{2}{x}y = x^2$, obtemos:

$$u'.v + \frac{2}{x}u.v + u.v' = x^2$$

$$v \left[u' + \frac{2}{x} u \right] + u \cdot v' = x^2$$
.

Considerando que u pode ser determinada arbitrariamente, temos:

$$u' + \frac{2}{r}u = 0$$

de onde
$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = -2\ln x \Rightarrow \ln u = \ln x^{-2} \Rightarrow u = x^{-2}$$
.

Agora, substituindo u na equação, resulta que $u.v'=x^2$ e com a integração dessa EDO temos:

$$x^{-2}.v' = x^2 \Rightarrow v' = x^2.x^2 \Rightarrow v' = x^4 \Rightarrow v = \int x^4 dx \Rightarrow v = \frac{x^5}{5} + C$$

Assim, a solução geral da equação dada é:

$$y = u.v \Rightarrow y = \left(\frac{x^5}{5} + C\right).x^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + C.x^{-2}$$

b) Método de Lagrange (Método de variação de parâmetros)

A equação linear homogênea correspondente à equação dada é:

$$y' + \frac{2}{x}y = 0,$$

cuja solução, obtida por integração, será

$$y = Ce^{-\int_{x}^{2} dx} = Ce^{-2\ln x} = Ce^{\ln x^{-2}} = Cx^{-2}$$

Logo, a solução de Lagrange para a equação $y' + \frac{2}{x}y = x^2$ será da forma:

$$y = C(x)x^{-2}.$$

Substituindo $y = C(x)x^{-2}$ e $y' = C'(x)x^{-2} - 2x^{-3}C(x)$ na equação dada, obtemos:

$$C'(x)x^{-2} - 2x^{-3}C(x) + \frac{2}{x}C(x)x^{-2} = x^2$$

$$C'(x)x^{-2} - 2x^{-3}C(x) + 2x^{-3}C(x) = x^2$$

$$C'(x)x^{-2} = x^2$$

$$C'(x) = x^4 \Rightarrow C(x) = \int x^4 dx \Rightarrow C(x) = \frac{x^5}{5} + C$$
.

Finalmente, substituindo $C(x) = \frac{x^5}{5} + C$ em $y = C(x)x^{-2}$, determinamos a solução geral:

$$y = \left(\frac{x^5}{5} + C\right)x^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + Cx^{-2}.$$

c) Determinação de um Fator Integrante

Multiplicando a equação por $\mu(x)=e^{\int_x^2\!dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$, obtemos

$$x^{2}y' + \frac{2}{x}x^{2}y = x^{2}x^{2} \Rightarrow x^{2}y' + 2xy = x^{4}$$
.

O primeiro membro da equação acima é a derivada $\dfrac{d}{dx} (x^2 y)$, logo:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^4 \Rightarrow x^2y = \int x^4 dx \Rightarrow x^2y = \frac{x^5}{5} + C.$$

A solução geral é $y = \frac{1}{5}x^3 + Cx^{-2}$.

É importante observar os resultados obtidos através dos três métodos.

Exemplo E47: Podemos escrever a equação $x^2y' + 2xy = 1$ na forma $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; após identificada como uma equação linear, será resolvida pelo Método de Variação dos Parâmetros.

A solução da equação linear homogênea correspondente é:

$$y = C.e^{-\int_{x}^{2} dx} = C.e^{-2\ln x} = C.e^{\ln x^{-2}} = C.x^{-2}.$$

Logo, a solução de Lagrange será da forma $y = C(x) x^{-2}$.

Derivando temos:

$$y' = C'(x) x^{-2} + C(x) \cdot (-2x^{-3})$$

Substituindo $y = C(x) x^{-2}$ e $y' = C'(x) x^{-2} + C(x) \cdot (-2x^{-3})$ na equação dada, temos:

$$C'(x) x^{-2} + C(x) \cdot (-2x^{-3}) + \frac{2}{x} C(x) x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$C'(x) x^{-2} - 2C(x) x^{-3} + 2C(x) x^{-3} = \frac{1}{x^2},$$

$$C'(x) x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$C'(x) = \frac{1}{x^2 \cdot x^{-2}} = 1$$
.

Assim, $C(x) = \int dx = x + C$ e a solução geral é:

$$y = (x+C) x^{-2} \Rightarrow yx^2 = C + x.$$

Exemplo E48: Determinação da solução geral de $y' \cos^2 x + y = tgx$.

Inicialmente, pelo Método de Bernoulli, consideramos v = u.v, com u e v funções incógnitas:

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$
.

Substituindo y e y' na equação $y'\cos^2 x + y = tgx$, obtemos:

$$(u \cdot v' + u' \cdot v) \cdot \cos^2 x + u \cdot v = tgx$$

$$u \cdot v' \cdot \cos^2 x + u' \cdot v \cdot \cos^2 x + u \cdot v = tgx$$

$$v(u' \cdot \cos^2 x + u) + u \cdot v' \cdot \cos^2 x = tgx$$

Considerando que u pode ser determinada arbitrariamente, temos:

$$u' \cdot \cos^2 x + u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} \cos^2 x = -u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \ln u = -\lg x$$

$$\Rightarrow u = e^{-\lg x}.$$

Agora, substituindo u na equação, resulta que $u \cdot v' \cdot \cos^2 x = tgx$ e após a integração dessa EDO determinamos v:

$$u \cdot v' \cdot \cos^2 x = tgx \Rightarrow e^{-tgx} \cdot v' \cdot \cos^2 x = tgx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{e^{tgx} \cdot tgx}{\cos^2 x} \Rightarrow \int dv = \int \frac{e^{tgx} \cdot tgx}{\cos^2 x} dx$$
$$\Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x} e^{tgx} \cdot tgx dx \Rightarrow v = \int e^{tgx} \cdot tgx \cdot d(tgx) \Rightarrow v = e^{tgx} \cdot (tgx - 1) + C \text{ (integral por partes)}.$$

Como y = u.v, temos:

$$y = e^{-tgx} (e^{tgx} \cdot (tgx - 1) + C) = (tgx - 1) + C \cdot e^{-tgx}$$

 $y + 1 = tgx + Ce^{-tgx}$

Exemplo E49: Resolução da equação diferencial linear $\,y' + x^2 y - x^2 = 0\,$.

Supondo que y = u.v, com u e v incógnitas, derivando y e substituindo, juntamente com sua derivada, na equação, resulta:

$$y' + x^2y - x^2 = 0$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + x^2 \cdot u \cdot v = x^2$$

$$v(u'+x^2\cdot u)+u\cdot v'=x^2.$$

Considerando $u'+x^2 \cdot u = 0$, obtemos:

$$\frac{du}{dx} = -x^2 \cdot u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int x^2 \cdot dx \implies \ln u = -\frac{x^3}{3} \implies u = e^{\frac{-x^3}{3}}.$$

Levando u na equação:

$$u \cdot v' = x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{e^{\frac{-x^3}{3}}} \Rightarrow dv = x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \cdot dx \Rightarrow v = \int x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \cdot dx \Rightarrow v = \int e^{\frac{x^3}{3}} \cdot d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$\Rightarrow v = \int e^t \cdot dt \Rightarrow v = e^t + C \Rightarrow v = e^{\frac{x^3}{3}} + C.$$

Então,
$$y = e^{\frac{-x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} + C \right) = 1 + e^{\frac{-x^3}{3}} \cdot C \Rightarrow y = 1 + Ce^{\frac{-x^3}{3}}$$
 é a solução geral.

Exemplo E50: A equação $\frac{dy}{dt} + \frac{ty}{1-t^2} = t + \arcsin t$ tem solução geral

$$y = \sqrt{1 - t^2} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{arcsen} t)^2 - \sqrt{1 - t^2} + C \right].$$

De fato:

A equação linear homogênea $\frac{dy}{dt} + \frac{ty}{1-t^2} = 0$, tem solução

$$y = C.e^{-\int \frac{t}{1-t^2}dt} = C.e^{\frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2}dt} = C.e^{\ln(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = C.(1-t^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, a solução de Lagrange para a equação dada no exemplo será da forma:

$$y = C(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo y e $y'=C'(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}}-t.C(t).(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ na equação, resulta:

$$C'(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - t.C(t).(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{tC(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{1-t^2} = t + \arcsin t$$
,

$$C'(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - t.C(t).(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + tC(t).(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = t + \arcsin t,$$

$$C'(t).(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = t + \operatorname{arcsen} t.$$

De onde:

$$C'(t) = \frac{t + arcsent}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow C(t) = \int \frac{t + arcsent}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

ou seja,

$$C(t) = \underbrace{\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{arcsent}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{(2)}$$
:

$$(1) \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int -2t (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-t^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-t^2} + C;$$

(2)
$$\int \frac{arcsent}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{arcsen^2t}{2} + C$$

Então,

$$C(t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{arcsen^2t}{2} + C$$
.

Finalmente, como a solução é da forma $y=C(t)\sqrt{1-t^2}$, resulta:

$$y = \sqrt{1 - t^2} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{arcsen} t)^2 - \sqrt{1 - t^2} + C \right].$$

Exemplo E51: Determinação dos pontos críticos da solução y(x) da E.D.O $y' + \frac{2}{x}y - x = 0$ e cálculo do limite $\lim_{x \to 0} y(x)$.

Inicialmente, supondo que y = u.v, temos:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + \frac{2}{x}\cdot u\cdot v - x = 0 \Rightarrow v\left(u' + \frac{2}{x}\cdot u\right) + u\cdot v' = x$$

De $u' + \frac{2}{x} \cdot u = 0$ obtemos $u = x^{-2}$.

Substituindo $u=x^{-2}$ na equação, resulta $u\cdot v'=x \Rightarrow x^{-2}\cdot \frac{dv}{dx}=x \Rightarrow \int dv=\int x^3 dx \Rightarrow v=\frac{x^4}{4}+C$.

Logo, a solução geral, y = u.v, da EDO é:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + C\right) \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Os pontos críticos da solução são obtidos a partir de $\frac{dy}{dx} = 0$

Como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4} - \frac{2C}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{2C}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 4C}{2x^3},$$

temos

$$\frac{x^4 - 4C}{2x^3} = 0 \implies x^4 - 4C = 0 \implies x = \pm \sqrt[4]{4C}.$$

A seguir, temos o cálculo de $\lim_{x\to 0} y(x)$:

$$\operatorname{para} \operatorname{C} > 0 : \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \right) = \Leftrightarrow \quad , \ \operatorname{pois} \ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{4} = 0 \ \operatorname{e} \ \lim_{x \to 0} \frac{C}{x^2} = \Leftrightarrow \quad ;$$

para C = 0:
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{4}\right) = 0$$
;

para C < 0:
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \right) = +\infty$$
, pois $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{4} = 0$ e $\lim_{x \to 0} \frac{C}{x^2} = +\infty$.

Exemplo E52: Determinação de intervalo de validade da solução do PVI

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y - x = 0 \\ y(-2) = 3 \end{cases}$$

A solução geral da EDO (exemplo anterior) é da forma

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Com a substituição da condição inicial y(-2) = 3 na solução geral, é obtida a solução do PVI:

$$3 = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{C}{(-2)^2} \Rightarrow C = 12 - 4 \Rightarrow C = 8.$$

Logo, a solução do PVI é $y = \frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2}$.

Agora, analisando quando $\frac{dx}{dy} = 0$ podemos determinar onde a derivada de y não está definida:

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4} - 2 \cdot \frac{8}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{16}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 32}{2x^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x^3}{x^4 - 32}$$

$$\frac{2x^3}{x^4 - 32} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então, o intervalo onde $\frac{dy}{dx}$ está definida é $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e o maior intervalo que contém $x_0 = -2$ é $(-\infty, 0)$.

Exemplo E53: A equação de Bernoulli $yy' + xy^2 - x = 0 \Rightarrow y' + xy - x \cdot y^{-1} = 0$ é transformada numa equação linear de primeira ordem mediante a mudança de variável $z = y^{1-(-1)} = y^{1+1} = y^2$.

De fato:

A equação dada pode ser escrita na forma:

$$y\frac{dy}{dx} + xy^2 - x = 0$$

e com a substituição $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$,

obtemos a equação $\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+xz=x$ \Rightarrow $\frac{dz}{dx}+2xz=2x$, que é uma equação linear em z.

Multiplicando essa equação obtida pelo fator integrante $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$, resulta

$$\frac{dz}{dx}e^{x^2} + 2xze^{x^2} = 2xe^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \cdot z\right) = 2xe^{x^2},$$

cuja solução geral é $e^{x^2} \cdot z = \int 2x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C \Rightarrow z = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} + \frac{C}{e^{x^2}}$, ou seja, $z = 1 + Ce^{-x^2}$.

Como $z=y^2$, a solução da equação de Bernoulli dada é $y^2-1-Ce^{-x^2}=0$.

Exemplo E54: A equação diferencial $y'+y^2-2y+1=0$ tem a forma de uma equação de Riccatti com coeficientes constantes. Considerando que a equação quadrática $y^2-2y+1=0$ tem raízes $y_1=y_2=1$, ou seja, é conhecida uma solução particular $y=y_1$ da equação diferencial de Riccatti, a mudança de variável $y=y_1+\frac{1}{z}$ reduz essa EDO a uma equação linear em z.

Então, substituindo $y=1+\frac{1}{z}$ e $y'=-\frac{z'}{z^2}$ na equação, obtemos:

$$-\frac{z'}{z^2} + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0,$$

$$-\frac{z'}{z^2} + 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} - 2 - \frac{2}{z} + 1 = 0,$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow -z' + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1$$
 (equação linear em z).

A solução da equação resultante é z = x + C.

Portanto, a solução geral da equação de Riccatti dada é :

$$y=1+\frac{1}{x+C} \Rightarrow y=\frac{x+C+1}{x+C}$$
.

Exemplo E55: Para a equação de Riccatti $y'+4y^2-9=0$, diferentemente do exemplo anterior, são conhecidas duas soluções particulares distintas $y_1=-\frac{3}{2}$ e $y_2=\frac{3}{2}$, que são as raízes da equação quadrática $4y^2-9=0$.

Neste caso, a solução geral será da forma $\frac{y-y_1}{y-y_2} = C.e^{\int p(x)(y_2-y_1)dx}.$

Então.

$$\frac{y - \frac{3}{2}}{y + \frac{3}{2}} = C \cdot e^{\int 4\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)dx} \Rightarrow \frac{\frac{2y - 3}{2}}{\frac{2y + 3}{2}} = C \cdot e^{\int 12dx} \Rightarrow \frac{2y - 3}{2y + 3} = C \cdot e^{\int 12dx}$$

$$\Rightarrow 2y - 3 = (2y + 3)C \cdot e^{12x} \Rightarrow 2y = 2yC \cdot e^{12x} + 3C \cdot e^{12x} + 3$$

$$\Rightarrow 2y - 2yC.e^{12x} = 3C.e^{12x} + 3.$$

Logo,
$$y = -\frac{3}{2} \frac{\left(C.e^{12x} + 1\right)}{\left(C.e^{12x} - 1\right)}$$
.

Exemplo E56: A solução geral da equação de Riccatti $2y' - \frac{y^2}{x^2} = 1$, que tem y = x como uma solução particular, é $y = -\frac{2x}{\ln x} + x$.

Através da mudança de variável $y=x+\frac{1}{z}$ (com derivada $y'=1-\frac{1}{z^2}\cdot z'$), é possível obter uma equação linear na variável z. Assim, substituindo y e sua derivada na equação dada, temos:

$$1 - \frac{1}{z^2} \cdot z' - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{1}{z^2} \cdot z' - \frac{1}{2} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{2z^2 x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{z^2} \cdot z' + \frac{1}{xz} + \frac{1}{2z^2x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1,$$

$$z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{2x^2}$$
 (EDO linear de primeira ordem).

Um fator integrante para essa equação $z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{2x^2}$ é $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$.

Portanto, multiplicando a equação linear pelo fator integrante, obtemos:

$$z' \cdot x + z = -\frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{d}{dx} (z \cdot x) = -\frac{1}{2x} \Rightarrow z \cdot x = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} \ln x \Rightarrow z = -\frac{1}{2x} \ln x.$$

Como
$$z = \frac{1}{y - x}$$
, temos $y - x = -\frac{2x}{\ln x} \Rightarrow y = -\frac{2x}{\ln x} + x$.

Exemplo E57: Se $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x|x|$, temos que W(x) = 0.

Considerando que
$$y_2(x) = x |x| \Rightarrow y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

temos para $x \ge 0$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = x^2 \cdot 2x - x^2 \cdot 2x = 0;$$

agora, quando x < 0:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = x^2 \cdot (-2x) - (-x^2) \cdot 2x = -x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 2x = 0.$$

Exemplo E58: As funções $y_1=e^{\lambda_1 x}$ e $y_2=e^{\lambda_2 x}$ são linearmente independentes sempre que λ_1 e λ_2 são números reais distintos, pois nessa situação ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) o Wronskiano é não nulo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x},$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_2 x + \lambda_1 x} (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Exemplo E59: As funções $y_1(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda x}$ são soluções linearmente independentes da equação $y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$:

Primeiramente, substituindo $y_1(x)=x\cdot e^{\lambda x}$ e suas derivadas ($y_1'(x)=x.\lambda.e^{\lambda x}+e^{\lambda x}$ e $y_1''(x)=\lambda.e^{\lambda x}+x.\lambda^2.e^{\lambda x}+\lambda e^{\lambda x}=2\lambda.e^{\lambda x}+x.\lambda^2.e^{\lambda x}$) na equação $y''-2\lambda y'+\lambda^2 y=0$, podemos verificar y_1 é solução dessa equação. De fato:

$$2\lambda . e^{\lambda x} + x . \lambda^2 . e^{\lambda x} - 2\lambda \left(x . \lambda . e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\right) + \lambda^2 x . e^{\lambda x} = 0$$
$$2\lambda . e^{\lambda x} + 2\lambda^2 . x . e^{\lambda x} - 2x\lambda^2 . e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow 0=0.$$

De modo análogo podemos mostrar que $y_2(x) = e^{\lambda x}$ é solução da equação dada.

Agora, para mostrar que y_1 e y_2 são linearmente independentes, calculamos W(x):

$$W(x) = \begin{vmatrix} xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} & \lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix} = xe^{\lambda x} \cdot \lambda e^{\lambda x} - \left(e^{\lambda x} \left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right)\right) = x\lambda \left(e^{\lambda x}\right)^2 - \left(e^{\lambda x}\right)^2 - \lambda x \left(e^{\lambda x}\right)^2 = -\left(e^{\lambda x}\right)^2 \neq 0.$$

Portanto, como W(x) \neq 0, as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Exemplo E60: As funções $y_1 = \frac{senx}{x}$ e $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ são soluções, linearmente independentes, da equação xy'' + 2y' + xy = 0.

A função $y_1 = \frac{senx}{x}$ e suas derivadas abaixo,

$$y_1' = \frac{x \cos x - senx}{x^2}$$

$$e$$

$$y_1'' = \frac{-x^3 senx - 2x^2 \cos x - 2x \cdot senx}{x^4}$$

verificam xy''+2y'+xy=0:

$$x \left(\frac{-x^3 senx - 2x^2 \cos x - 2x \cdot senx}{x^4}\right) + 2 \left(\frac{x \cos x - senx}{x^2}\right) + x \cdot \frac{senx}{x} = \\ \left(\frac{-x^3 senx - 2x^2 \cos x - 2x \cdot senx + 2x^2 \cos x - 2x senx + x^3 senx}{x^3}\right) = 0 \ .$$
 O mesmo acontece com $y_2 = \frac{\cos x}{x}$, $y_2' = \frac{-x senx - \cos x}{x^2}$ e

$$y_{2}" = \frac{-x^{3}\cos x + 2x^{2} \cdot senx + 2x \cdot \cos x}{x^{4}}:$$

$$x\left(\frac{-x^{3}\cos x + 2x^{2} \cdot senx + 2x \cdot \cos x}{x^{4}}\right) + 2\left(\frac{-xsenx - \cos x}{x^{2}}\right) + x \cdot \frac{\cos x}{x} =$$

$$\left(\frac{-x^{3}\cos x + 2x^{2} \cdot senx + 2x \cdot \cos x - 2x^{2}senx - 2x\cos x + x^{3}\cos x}{x^{3}}\right) = 0.$$

Além disso, o Wronskiano dessas funções é dado por:

$$\begin{vmatrix} \frac{senx}{x} & \frac{x \cdot \cos x - senx}{x^2} \\ \frac{\cos x}{x} & \frac{-(x \cdot senx + \cos x)}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{senx}{x} \cdot \frac{-(x \cdot senx + \cos x)}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \cdot \frac{x \cdot \cos x - senx}{x^2} =$$

$$=\frac{-\left(x\cdot sen^2x+senx\cdot\cos x\right)}{x^3}-\frac{\left(x\cdot\cos^2x-senx\cdot\cos x\right)}{x^3}=$$

$$=\frac{-x\cdot sen^2x-x\cdot \cos^2x+senx\cdot \cos x-senx\cdot \cos x}{x^3}=\frac{-x\cdot (sen^2x+\cos^2x)}{x^3}=-\frac{1}{x^2}\neq 0.$$

Como W(x) \neq 0, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Exemplo E61: Dada a EDOLH de segunda ordem 3y''+2y'=0, as raízes da equação característica $3\lambda^2+2\lambda=0$ são $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=-\frac{2}{3}$, logo a solução geral é:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-\frac{2}{3} \cdot x} \implies y = C_1 + C_2 e^{-\frac{2}{3} \cdot x}$$

Exemplo E62: Para a equação y''+4y'+8y=0, temos raízes características

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 \cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i \text{ , e portanto,}$$

 $y = e^{-2 \cdot x} (C_1 \cos 2x + C_2 sen 2x)$ é a solução geral.

Exemplo E63: A equação característica da EDOLH y''+y'-2y=0 é $\lambda^2+\lambda-2=0$, com raízes

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-2)\!\!/\,1)}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = -2 \; . \; \text{Assim, a solução geral dessa equação diferencial }$$
 é $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2\cdot x} \; .$

Exemplo E64: Dada a equação y"+4y'=0, a equação característica é $\lambda^2+4\lambda=0$, que tem raízes distintas $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=-4$. Então $y_1=e^{0x}=1$ e $y_1=e^{-4x}$ são duas soluções linearmente independentes dessa equação. Portanto, solução geral é $y=C_1+C_2e^{-4\cdot x}$.

Exemplo E65: A equação y'' - 2y' + 2y = 0 tem $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ e

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \text{ como equação e raízes características,}$$

respectivamente; assim a solução geral é $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 senx)$.

Exemplo E66: A solução geral da EDOLH y''+2y'+4y=0 é $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2sen\sqrt{3}x)$, pois as raízes da equação característica $\lambda^2+2\lambda+4=0$ são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12 \cdot i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

Exemplo E67: Dada a EDOLH 9y''+6y'+y=0, a equação característica tem raízes repetidas:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(9)(1)}}{2 \cdot 9} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, a solução geral é $y = C_1 e^{-\frac{1}{3} \cdot x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3} \cdot x}$

Exemplo E68: A equação $2y''-2\sqrt{2}y'+y=0$ tem solução geral $y=C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x}+C_2xe^{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x}$, pois as raízes da equação característica são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo E69: Determinando a solução geral de 4y''-4y'+3y=0, obtemos

$$y=e^{\frac{x}{2}}\!\!\left(C_1\cos\!\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2sen\!\!\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right), \text{ pois a equação } 4\lambda^2-4\lambda+3=0 \quad \text{tem raízes}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(4)(3)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{32 \cdot i^2}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}i}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{2}$$

Exemplo E70: A EDOLH 2y" $-5\sqrt{3}y$ '+6y = 0 tem raízes da equação característica

$$\lambda_{1,2} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{75 - 48}}{2 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \lambda_1 = 2\sqrt{3} \;\; ; \;\; \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \; , \text{ e portanto, solução geral}$$

$$y = C_1 e^{2\sqrt{3} \cdot x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x} \; .$$

Respostas de listas dos capítulos 1 e 2

Respostas Lista 1.2.5

4. Resp:
$$\int_{1}^{4} \int_{x/2}^{\sqrt{x}} (x+y) dy dx = \frac{121}{40}$$

5. Resp:
$$\int_{1}^{2} \int_{-y+1}^{y-1} (x^{2} - y) dx dy = -\frac{3}{2}$$

6. Resp:
$$\int_0^1 \int_{x^3}^x (x - y) dx dy = \frac{4}{105}$$

7. Resp:
$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = e - 1$$

8. Resp:
$$\int_0^1 \int_0^{2x} \cos(x^2) dy dx = \text{sen}(1)$$

9. Resp:
$$\int_0^6 \int_{x^2/2}^{3x} dy dx = 18$$

10. Resp:
$$4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = 8\pi$$

11. Resp:
$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3) dy dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(8)$$

12. Resp:
$$\frac{4\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{25}\right) dy dx}{25\pi} = \frac{4 \cdot \frac{25\pi}{8}}{25\pi} = \frac{1}{2}$$

13. Resp:
$$4\left(\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{9-x^{2}}}\left(x^{2}+y^{2}\right)dydx+\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^{2}}}\left(x^{2}+y^{2}\right)dydx\right)$$

14. Resp:
$$\int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{y^2} dx dy = \frac{8}{3}$$

15.Resp:
$$\int_{-4}^{1} \int_{3x}^{4-x^2} (x+4) dx dy = \frac{625}{12}$$

16. Resp:
$$\int_{0}^{1} \int_{y-1}^{-y+1^{2}} (x+y) dx dy = \frac{1}{3}$$
$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1^{2}} (x+y) dy dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{-x+1^{2}} (x+y) dy dx = \frac{1}{3}$$

17. Resp:
$$8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}^2} \sqrt{r^2 - x^2} dy dx = \frac{16}{3} r^3$$

Respostas Lista 2.1

1. a)
$$\int_0^1 t^{11} \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt \approx 0,277$$

b)
$$\int_0^1 t^{11} dt = \frac{1}{12}$$

c)
$$\int_0^1 2t^{12} dt = \frac{2}{13}$$

d)
$$\int_0^1 3t^{13} dt = \frac{3}{14}$$

2. a)
$$-1$$

b) Resp:
$$-\frac{3}{2}$$

c) Resp:
$$-\frac{4}{\pi}$$

3. Resp:
$$1 - e^3$$

4. a) Resp:
$$-1$$
.

b) Resp:
$$-4$$

b) Resp:
$$-\frac{7}{3}$$

7. Resp: se
$$f(x,y) = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$$
 com α constante de proporcionalidade, $M = \frac{\alpha}{2} (e^2 - 1)$.

8. a) Resp:
$$\frac{11}{15}$$

9. Resp:
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} - \left(90 - \frac{1}{5}z\right)\overrightarrow{k}$$
 ,

$$\vec{r}(t) = 5\cos(t)\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j} + \frac{5}{2\pi}t\vec{k}, \ 0 \le t \le 8\pi$$
.

$$W = \frac{5}{2\pi} \int_0^{8\pi} \left(\frac{t}{2\pi} - 90 \right) dt = -1760 \ Nm$$

Respostas Lista 2.2

1. a) Resp: Sim,
$$\varphi(x, y) = xy + c$$

b) Resp: Sim,
$$\phi(x, y) = e^x sen(y) + c$$

- c) Resp: Não
- d) Resp: Sim $\varphi(x, y) = \cos(xy)$
- 2. b) Resp: 0
- c) Resp: 0
- 3. Resp: 45