UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Vetores e Álgebra linear* **Prof.:** *Germán Suazo*

Lista 07

1. Determine se cada um dos seguintes conjuntos é ou não um subespaço, mostrando as propriedades ou dando um contra-exemplo.

   a. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / x = 0 \right\}$

   b. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / y = 2x \right\}$

   c. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / xy = 0 \right\}$

   d. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / y = x + 1 \right\}$

   e. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / x = y = z \right\}$

   f. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / z = 2x, \quad y = 0 \right\}$

   g. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / x - y + z = 1 \right\}$

   h. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / |x - y| = |y - z| \right\}$

2. Diga se os seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbf{R}^3$:

   a. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

   b. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. Diga se os seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbf{R}^4$:

   a. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

   b. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

4. Encontre, se existirem, as coordenadas do vetor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ no subespaço gerado pelos vetores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

5. Encontre, se existirem, as coordenadas do vetor $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ no subespaço gerado pelos vetores $\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$.

6. Verifique que cada um dos seguintes conjuntos de vetores é linearmente dependente:

   a. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$ b. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$ c. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$

   d. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ e. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ f. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

7. Diga se cada um dos seguintes conjuntos de vetores é linearmente independente ou linearmente dependente:

   a. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ b. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ c. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

   d. $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ e. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ f. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

8. Encontre a matriz de mudança de base indicada:

   a. da base canônica de $\mathbf{R}^2$ para a base $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$;

   b. da base $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ para a base $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$;

   c. da base $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ para a base canônica de $\mathbf{R}^3$;

   d. da base $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ para a base $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

9. Considere $\mathbf{B}_A$ como sendo a base canônica de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{B}_N=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

   Encontre $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_N\to\mathbf{B}_A}$ e determine a equação na base $\mathbf{B}_N$ das seguintes equações dadas na base canônica $\mathbf{B}_A$:

   a. $7x-2y=2$; b. $xy-x=1$; c. $x^2-2xy+y=2$.

10. Considere $\mathbf{B}_A$ como sendo a base canônica de $\mathbf{R^3}$ e $B_N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Encontre $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_N \to \mathbf{B}_A}$ e determine a equação na base $\mathbf{B}_N$ das seguintes equações dadas na base canônica $\mathbf{B}_A$:

a. $x + y + z = 2$; b. $xy - xz = 2$;

c. $x^2 - 2xy + 4yz + z^2 + x + y + z = 2$.

11. Calcule os autovalores e autovetores associados para cada uma das matrizes a seguir

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

RESPOSTAS:

1. a. É espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ e $\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\, y_2 \end{bmatrix}$ que são elementos do conjunto.

1. b. É espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$ e $\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, x_1 \\ 2(\alpha\, x_1) \end{bmatrix}$ que são elementos do conjunto.

1. c. Não é espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertencem ao conjunto mas a soma $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ não pertence.

1. d. Não é espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertence ao conjunto mas o múltiplo $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ não pertence.

1. e. É espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ e $\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, x_1 \\ \alpha\, x_1 \\ \alpha\, x_1 \end{bmatrix}$ que são elementos do conjunto.

1. f. É espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ 2(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$ e $\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, x_1 \\ 0 \\ 2\alpha\, x_1 \end{bmatrix}$ que são elementos do conjunto.

1. g. Não é espaço vetorial pois $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertence ao conjunto mas o dobro desse vetor, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, não pertence.

1. h.

2. a. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, formada pela transposta da matriz que tem como

colunas os vetores em questão, tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

O posto da matriz é 3 que coincide com o número de vetores. Logo, o conjunto forma uma base.

2. b. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, formada pela transposta da matriz que tem como

colunas os vetores em questão, tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O posto da matriz é 2 que é diferente do número de vetores. Logo, o conjunto não forma uma base.

3. a. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, formada pela transposta da matriz que tem como

colunas os vetores em questão, tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

O posto da matriz é 4 que coincide com o número de vetores. Logo, o conjunto forma uma base.

3. b. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O posto da matriz é 3 que é diferente do número de vetores. Logo, o conjunto não forma uma base.

4. Devemos resolver o sistema $c_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\\2\end{bmatrix}$, se ele for consistente:

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 6\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, e uma forma escalonada é

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Isto significa que $c_2=-2$ e $c_1=3$. Logo, as coordenadas de $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\6\\2\end{bmatrix}$ no subespaço gerado pelos vetores $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$ são $\mathbf{w}_B=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}_B$.

5. Devemos resolver o sistema $c_1\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5\\1\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$, se ele for consistente:

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\1 & 1 & 3\\4 & 6 & 4\end{bmatrix}$, e uma forma escalonada é

$\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\0 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3}\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ Isto significa que $c_2=-4$ e $c_1=7$.

Logo, as coordenadas de $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ no subespaço gerado pelos vetores $B=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$ são $\mathbf{w}_B=\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}_B$.

6. a. Uma forma escalonada da matriz $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$.

Assim, o posto é 1, que é diferente do número de vetores. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

6. b. A matriz $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ já está na forma escalonada.

Assim, o posto é 1, que é diferente do número de vetores. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

6. c. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, implicando que o posto é 2, diferente do número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

6. d. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ já está numa forma escalonada, implicando que o posto é 1, diferente do número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

6. e. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e desta maneira o posto é 1, diferente do número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

6. f. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, resultando que o posto é 3, diferente do número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

7. a. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ já está numa forma escalonada, e observamos que o posto é 2, igual ao número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente independente.

7. b. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e observamos que o posto é 1, diferente do número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente dependente.

7. c. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ já está numa forma escalonada, implicando que o posto é 3, igual ao número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente independente.

7. d. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, implicando que o posto é 3, igual ao número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente independente.

7. e. A matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ já está numa forma escalonada, implicando que o posto é 1, igual ao número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente independente.

7. f. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem uma forma escalonada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, implicando que o posto é 3, igual ao número de vetores do conjunto. Assim, o conjunto é linearmente independente.

8. a. Temos $B_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o processo prático

$$[B_N \;\vdots\; B_A] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{L_2 - L_1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, $P_{B_A \to B_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. b. Temos $B_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o processo prático

$$[B_N \;\vdots\; B_A] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{L_2 + L_1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbf{L_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{L_1 - L_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Logo, $P_{B_A \to B_N} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

8. c. Temos $B_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o processo prático

$$[B_N \;\vdots\; B_A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, $P_{B_A \to B_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. d. Temos $B_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o processo prático

$$[B_N \;\vdots\; B_A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathbf{L_3 - L_1}]{\mathbf{L_2 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow{\mathbf{L_3 - L_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $P_{B_A \to B_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Pelo processo prático: $[B_A \ \vdots \ B_N] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$. Assim, $P_{B_N \to B_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbf{B}A} = P_{B_N \to B_A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_N},$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Então $\begin{cases} x = x', \\ y = x' + y'. \end{cases}$

9. a. $7x - 2y = 2$ significa que $7x' - 2(x' + y') = 2$, ou seja, $5x' - 2y' = 2$.

9. b. $xy - x = 1$ significa que $x'(x' + y') - x' = 1$, ou seja, $(x')^2 + x'y' - x' = 1$.

9. c. $x^2 - 2xy + y = 2$ significa que $(x')^2 - 2x'(x' + y') + (x' + y') = 2$, ou seja, $-(x')^2 - 2x'y' + x' + y' = 2$.

10. Pelo processo prático: $[B_A \ \vdots \ B_N] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Assim, $P_{B_N \to B_A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathbf{B}A} = P_{B_N \to B_A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_N},$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Então $\begin{cases} x = x' + y' + z', \\ y = y' + z', \\ z = z'. \end{cases}$

10. a. $x + y + z = 2$ significa que $(x' + y' + z') + (y' + z') + z' = 2$, ou seja, $x' + 2y' + 3z' = 2$.

10. b. $xy - xz = 2$ significa que $(x' + y' + z')(y' + z') - (x' + y' + z')z' = 2$, ou seja, $x'y' + (y')^2 + (z')^2 = 1$.

10. c. A equação $x^2 - 2xy + 4yz + z^2 + x + y + z = 2$ pode ser transformada para a nova base mediante substituição direta. Este processo é trabalhoso. Uma abordagem matricial alternativa é expressar a equação

$$x^2 - 2xy + 4yz + z^2 + x + y + z = 2$$

da forma $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1$.

Então como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ teremos que

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 1,$$

que simplificando, resulta

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 1,$$

ou, a equação

$$(x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2 + 4x'z' + 2y'z' + x' + 2y' + 3z' = 1.$$

11. a. $\lambda_1 = 1$, raiz dupla, com autovetores $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. b. $\lambda_1 = 3$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 0$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$;

$\lambda_3 = 1$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

11. c. $\lambda_1 = 1$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 2$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\lambda_3 = 0$, raiz simples, com autovetor $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. d. $\lambda_1 = 2$, raiz dupla, com autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 0$, raiz dupla, com autovetores $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.