UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Vetores e Álgebra linear* **Prof.:** *Germán Suazo*

Lista 06

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares utilizando a eliminação gaussiana:

a. $\begin{cases} 4x+5y=-8 \\ 11x+y=29 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-3y+z=5 \\ 2x-y \quad\quad =3 \\ 4x \quad\quad -3z=1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x_1+x_2 \quad\quad\quad\quad =4 \\ x_1+2x_2+x_3 \quad\quad =6 \\ x_2+2x_3+x_4 \quad =6 \\ x_3+2x_4=5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

e.

$$\begin{aligned} x_1+x_2 \quad\quad\quad\quad\quad &= 800 \\ x_2-x_3+x_4 \quad\quad &= 300 \\ x_4+x_5 &= 500 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad +x_5 &= 600 \\ x_3 \quad\quad\quad\quad &= 400 \end{aligned}$$

f. $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-y \quad\quad =0 \\ 3x-4y-z=0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2x_1+x_2 \quad\quad\quad\quad =3 \\ x_1+2x_2+x_3 \quad\quad =4 \\ x_2 \quad\quad +2x_4=3 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=10 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x-y-z+2w=1 \\ 2x-2y-z+3w=3 \\ -x+y-z=-3 \end{cases}$

2. Diga qual é a condição algébrica para que os sistemas a seguir sejam consistentes, determinando as soluções em caso de consistência:

a. $\begin{cases} 2x \quad -y=h \\ -6x+3y=k \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x \quad -y=1 \\ -6x+h\,y=k \end{cases}$

c.

$$\begin{aligned} x_1-4x_2+7x_3 &= g \\ 3x_2-5x_3 &= h \\ -2x_1+5x_2-9x_3 &= k \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2-3x_3 &= g \\ 4x_1+7x_2-4x_3 &= h \\ -6x_1-3x_2+x_3 &= k \end{aligned}$$

e. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = f \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 = g \\ x_2 + x_3 + x_4 = h \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = k \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + \alpha x = \beta \end{cases}$

3. Encontre a interseção dos planos $x + 2y - z = 3$ e $2x + 3y + z = 1$.
4. Resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 4x - 3z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

e.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 800 \\ x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= 300 \\ x_4 + x_5 &= 500 \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 600 \\ x_3 \qquad\qquad &= 400 \end{aligned}$$

f. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x - y - z + 2w = 1 \\ 2x - 2y - z + 3w = 3 \\ -x + y - z = -3 \end{cases}$

RESPOSTAS:

1. a. $x = 3$, $y = -4$.

1. b. $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

1. c. $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = 2$.

1. d. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.

1. e. As soluções podem ser escritas como $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 - x_5 \\ 200 + x_5 \\ 400 \\ 500 - x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 400 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

onde x_5 é um parâmetro livre.

1. f. $x = y = z = 0$.

1. g. As soluções podem ser escritas como $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ 3-2x_4 \\ -2+3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ onde x_4 é um parâmetro livre.

1. h. Uma forma escalonada da matriz aumentada é $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

e pelo teorema do posto, este sistema é inconsistente.

1. i. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Pelo teorema do posto, o posto comum é 2 e, portanto, o sistema é consistente e teremos 4-2=2 parâmetros livres. Pela forma da matriz escalonada, é conveniente escolher as incógnitas w e y como parâmetros livres. As soluções podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+y-w \\ y \\ 1+w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. a. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & -1 & h \\ 0 & 0 & k+3h \end{bmatrix}$

e, pelo teorema do posto, o sistema é consistente se, e somente se, $k+3h=0$.

2. b. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & h-3 & k+3 \end{bmatrix}$

Pelo teorema do posto, podemos afirmar que o sistema é consistente nos casos seguintes:

i. $h-3 \neq 0$, e neste caso, a única solução do sistema é $y = \dfrac{k+3}{h-3}$, $x = \dfrac{h+k}{2}$.

ii. $h-3=0$ e $k+3=0$, e neste caso, o posto comum é 1 e haverá 2-1=1 parâmetro livre; a incógnita y pode ser escolhida como parâmetro livre, sendo a solução escrita como $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+y}{2} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, se acontecer que $h-3=0$ e $k+3 \neq 0$, o sistema é inconsistente.

2. c. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & k+2g+h \end{bmatrix}$$

donde, pelo teorema do posto, o sistema é consistente se, e somente se, $k+2g+h=0$. Neste caso, haverá um parâmetro livre, digamos x_3, e as infinitas soluções podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3g-4h-41x_3}{3} \\ \dfrac{h+5x_3}{3} \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3g-4h}{3} \\ \dfrac{h}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -41/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. d. Uma forma escalonada da matriz aumentada é $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & g \\ 0 & -3 & 2 & h-2g \\ 0 & 0 & 0 & k-5g+4h \end{bmatrix}$

Assim, o sistema é consistente se, e somente se, $k-5g+4h=0$. Neste caso, as soluções do sistema podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-7g-5h-x_3}{6} \\ \dfrac{-h+2g+2x_3}{3} \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-7g-5h}{6} \\ \dfrac{-h+2g}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1/6 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. e. Uma forma escalonada da matriz aumentada é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & f \\ 0 & 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g-2f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-f-h \end{bmatrix}$.

Assim, o sistema é consistente se, e somente se, $g-2f=0$ e $k-f-h=0$. Neste caso, teremos dois parâmetros livres e as soluções do sistema podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f-h+x_3 \\ h-x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f-h \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. f. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \beta-1 \end{bmatrix}$.

Pelo teorema do posto, podemos afirmar que o sistema é consistente nos casos seguintes:

i. $\alpha-1\neq 0$, e neste caso, a única solução do sistema é $z=\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}$, $y=-\dfrac{\beta-1}{2(\alpha-1)}$, $x=\dfrac{2\alpha-\beta-1}{2(\alpha-1)}$.

ii. $\alpha - 1 = 0$ e $\beta - 1 = 0$, e neste caso, o posto comum é 2 e haverá 3-2=1 parâmetro livre; a incógnita z pode ser escolhida como parâmetro livre, sendo a solução escrita como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - z/2 \\ z/2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, se acontecer que $\alpha - 1 = 0$ e $\beta - 1 \neq 0$, o sistema é inconsistente.

3. Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$ temos $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim, a interseção representa uma reta com ponto de passo $\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e vetor direcional $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. a. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & 0 \end{bmatrix}$

donde, observamos que a única solução possível é $x = y' = z = 0$.

4. b. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim, teremos 3-2=1 parâmetro livre, digamos z. As soluções podem ser escritas como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z/5 \\ 2z/5 \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, com $t \in \mathbf{R}$ (temos feito $t = z/5$).

Geometricamente, estamos determinando a interseção de três planos como sendo uma reta com ponto de passo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e vetor direcional $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

4. c. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Assim, teremos 3-2=1 parâmetro livre, digamos z. As soluções podem ser escritas como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z/3 \\ z/3 \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, com $t \in \mathbf{R}$ (temos feito $t = z/3$).

Geometricamente, estamos determinando a interseção de dois planos como sendo uma reta com ponto de passo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e vetor direcional $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. d. Uma forma escalonada da matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim, teremos 4-3=1 parâmetro livre, digamos x_4. As soluções podem ser escritas como $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, com $t \in \mathbf{R}$ (temos feito $t = x_4$).