UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Vetores e Álgebra linear* **Prof.:** *Germán Suazo*

Lista 04

1. Mediante operações elementares, calcule uma forma escalonada das matrizes a seguir:

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$; d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$;

   e. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; f. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$; g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Determine o posto e a nulidade de cada uma das matrizes do exercício anterior.
3. Realize, quando possível, a fatoração LU das matrizes a seguir:

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

   d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; f. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

4. Sem calcular a inversa pelo algoritmo (Gauss-Jordan), diga qual é a inversa, se existir, de cada uma das matrizes a seguir:

   a. $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$; b. $D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$; c. $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

5. Verifique que se A e B são matrizes invertíveis, então o produto AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. Calcule, se possível, a inversa das matrizes a seguir, utilizando operações elementares (este procedimento é denominado de processo de Gauss-Jordan):

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; d. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$;

   e. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; f. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; g. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

h. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$; i. $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$; j. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

RESPOSTAS:

1. a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; 1. b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 1. c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; 1. d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

1. e. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{7} & \frac{-5}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-70}{27} & \frac{28}{27} \end{bmatrix}$; 1. f. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 1. g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

2. a. posto 2, nulidade 0; 2. b. posto 2, nulidade 0;
2. c. posto 2, nulidade 2; 2. d. posto 2, nulidade 1;
2. e. posto 4, nulidade 0; 2. f. posto 2, nulidade 2;
2. g. posto 4, nulidade 0.

3. a. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 3. b. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

3. c. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3. d. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$;

3. e. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

3. f. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

4. a. A inversa de I_n é a própria matriz $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, pois $I_n I_n = I_n$.

4. b. A inversa da matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ existe no caso em que todos os elementos da diagonal sejam não nulos, e neste caso, a inversa está

dada por $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{bmatrix}$, pois, verificando diretamente, temos que $DD^{-1} = D^{-1}D = I_n$.

5. Se A e B são matrizes invertíveis, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ e $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$. Também, temos que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Similarmente, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$. Isso mostra que AB é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. a. $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; 6. b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$; 6. c. não existe; 6. d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}$;

6. e. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$; 6. f. $\begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & -1 & \frac{-3}{5} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{7}{5} & -1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; 6. g. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

6. h. $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a^3} & \frac{-1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$, se $a \neq 0$; 6. i. não existe; 6. j. $\begin{bmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.