UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DAS ENGENHARIAS

Disciplina: *Vetores e Álgebra linear* **Prof.:** *Germán Suazo*

Lista 03

1. Sejam $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $F=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule as matrizes seguintes (se possível):

   a. $A+2D$; b. $3D-2A$; c. $B-C$; d. $B-C^T$; e. AB;
   f. BD; g. $D+BC$; h. B^TB; i. $E(AF)$; j. $(I_2-D)^2$.

2. Dê um exemplo de uma matriz 2×2 não nula, A, tal que $A^2=O$.
3. Uma empresa fabrica três produtos (x, y e z) e os transporta para dois depósitos para armazená-los. O número de unidades de cada produto transportadas para cada depósito está dado pela matriz $A=\begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix}$ (onde a_{ij} é o número de unidades do produto i enviado para o depósito j e os produtos são considerados em ordem alfabética). O custo de transporte de cada produto por caminhão é R$1,50 para x, R$1,00 para y e R$2,00 para z. Os custos correspondentes por trem são R$1,75, R$1,50 e R$1,00. Organize estes custos numa matriz B e depois utilize a multiplicação matricial para mostrar como a empresa pode comparar o custo de transporte dos seus produtos a cada um dos depósitos por caminhão e por trem.
4. Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.
   a. Escreva cada coluna de AB como uma combinação linear das colunas de A.
   b. Escreva cada linha de AB como uma combinação linear das linhas de B.
   c. Calcule o produto AB como a expansão de produtos externos.
5. Seja $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a. Calcule A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 e A^7.
   b. Qual o valor de A^{2011}? Por qué?
6. Escreva por extenso a matriz 4×4, $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$, tal que:

   a. $a_{ij}=\begin{cases} i+j, & se\ i\le j, \\ 0, & se\ i>j. \end{cases}$ b. $a_{ij}=\begin{cases} 1, & se\ |i-j|\le 1, \\ 0, & se\ |i-j|>1. \end{cases}$

7. Suponha que $A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   a. Se $X = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]$, calcule AX.
   b. Se $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, calcule o vetor $\mathbf{x}$.
8. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Sem calcular o produto completo, determine
   a. a segunda coluna de AB;
   b. a segunda linha de AB;
   c. a segunda linha de $AA = A^2$;
   d. a segunda linha de $AAA = A^3$.
9. Decomponha as matrizes a seguir como $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, verificando que a primeira parcela é uma matriz simétrica e a segunda parcela é uma matriz anti-simétrica:
   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$; c. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
10. Verifique que a soma de duas matrizes simétrica é uma matriz simétrica.
11. Verifique que a soma de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica.
12. O ***traço*** de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é a soma dos elementos na sua diagonal principal, ou seja,
$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$
   a. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, qual o valor de $tr(A)$? Qual o valor de $tr(AA^T)$?
   b. Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, qual o valor de $tr(A + B)$?
   c. Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, qual o valor de $tr(AA^T)$?
13. Encontre condições algébricas sobre x, y, z e w, para que a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ comute com todas as matrizes 2×2 da forma $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.
14. Dê um exemplo de matrizes para mostrar que se A e B são matrizes simétricas $n \times n$, então AB ***não*** é necessariamente uma matriz simétrica.

RESPOSTAS:

1. a. $A + 2D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$; 1. b. $3D - 2A = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$;

1. c. $B-C$ não existe porque as ordens das matrizes são incompatíveis para a adição.

1. d. $B-C=\begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

1. e. $AB=\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{bmatrix}$;

1. f. BD não existe pois as ordens das matrizes são incompatíveis para a multiplicação.

1. g. $D+BC=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$;

1. h. $B^TB=\begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$;

1. i. $E(AF)=[10]$;

1. j. $(I_2-D)^2=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. $B=\begin{bmatrix} 1{,}50 & 1{,}00 & 2{,}00 \\ 1{,}75 & 1{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 650{,}00 & 462{,}50 \\ 675{,}00 & 406{,}25 \end{bmatrix}$

Na última matriz, a coluna i corresponde ao depósito, a linha 1 contem os custos de transportar por caminhão, e a fila 2 contem os custos de transportar por trem.

4. a. coluna 1 de $AB = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

coluna 2 de $AB = 3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+6\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

coluna 3 de $AB = 0\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4. b. linha 1 de $AB=1\cdot[2\quad 3\quad 0]+0\cdot[1\quad -1\quad 1]+(-2)\cdot[-1\quad 6\quad 4]=[4\quad -9\quad -8]$

linha 2 de $AB=(-3)\cdot[2\quad 3\quad 0]+1\cdot[1\quad -1\quad 1]+1\cdot[-1\quad 6\quad 4]=[-6\quad -4\quad 5]$

linha 3 de $AB=2\cdot[2\quad 3\quad 0]+0\cdot[1\quad -1\quad 1]+(-1)\cdot[-1\quad 6\quad 4]=[5\quad 0\quad -4]$

4. c.

$$AB=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}[2\quad 3\quad 0]+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1\quad -1\quad 1]+\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}[-1\quad 6\quad 4]$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -12 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -9 & -8 \\ -6 & -4 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

5. a. $A^2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $A^4=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, $A^5=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $A^6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, e enfim, $A^7=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=A$

5. b. $A^{2011}=A^{2010+1}=A^{2010}\cdot A^1=\left(A^6\right)^{335}\cdot A=\left(I_2\right)^{335}\cdot A=A$

6. a. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ 6. b. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7. a. $AX=\begin{bmatrix}A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$

7. b. $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 8\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=3A\mathbf{x}_1+5A\mathbf{x}_2+8A\mathbf{x}_3=A\left(3\mathbf{x}_1+5\mathbf{x}_2+8\mathbf{x}_3\right)$;

Como A possui inversa, $\mathbf{x}=3\mathbf{x}_1+5\mathbf{x}_2+8\mathbf{x}_3=3\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 8\\ 16\end{bmatrix}$.

8. a. segunda coluna de $AB=0\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$;

8. b. segunda linha de $AB=3\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}1 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

8. c. segunda linha de $AA=3\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$;

8. d. segunda linha de $AAA=0\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$.

9. a. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

9. b. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

9. c. $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

10. Se A e B são simétricas, $A=A^T$ e $B=B^T$. Assim,

$$\begin{aligned}(A+B)^T &= A^T+B^T\\ &= A+B\end{aligned}$$

Implicando que $A+B$ é simétrica.

11. Se A e B são anti-simétricas, $-A=A^T$ e $-B=B^T$. Assim,

$$\begin{aligned}(A+B)^T &= A^T + B^T \\ &= -A - B \\ &= -(A+B)\end{aligned}$$

Implicando que $A+B$ é anti-simétrica.

12. a. $tr(A) = 1+3+7 = 11$. Também, $AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 22 & 30 \\ 22 & 35 & 48 \\ 30 & 48 & 66 \end{bmatrix}$, e

$tr(AA^T) = 14+35+66 = 115$.

12. b. $tr(AA^T)$ é a soma dos quadrados de todos os elementos da matriz A.

13. Impomos a condição $AB = BA$:

$$AB = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & x \\ -w & z \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -x & -y \end{bmatrix};$$

Assim, $w = x$ e $z = -y$ são as condições algébricas.

A matriz A deve ter a forma $A = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$.

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é simétrica.