Vetores

Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

Introdução

Grandeza é tudo aquilo que pode variar quantitativamente.

Algumas vezes necessitamos mais que um número e uma unidade para representar uma grandeza física.

Grandezas escalares: ficam totalmente expressas por um valor e uma unidade.

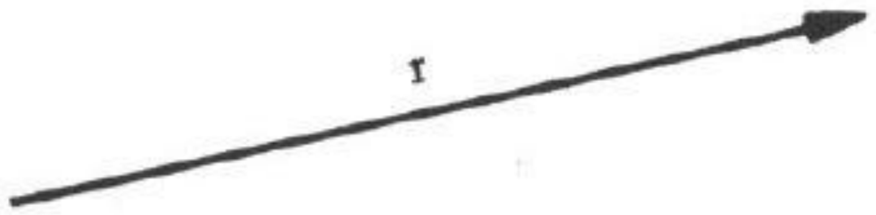
Exemplos: temperatura, massa, calor, tempo, etc.

Grandezas vetoriais: são aquelas que necessitam de módulo (número com unidade de medida), direção e sentido.

Exemplos: velocidade, força, aceleração, etc.

1.1 Reta orientada – eixo

Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado *positivo* e indicado por uma seta.



O sentido oposto é *negativo*, e a reta orientada é denominada *eixo.*

1.2 Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o segundo é chamado de *extremidade.*

O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.

1.2.1 Segmento nulo

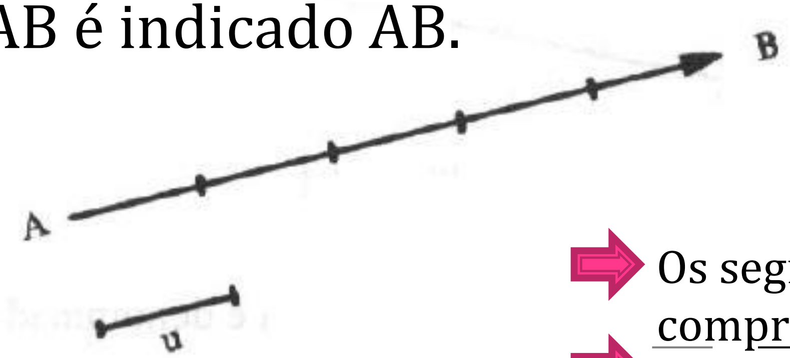
Um segmento nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem.

1.2.2 Segmentos opostos

Se AB é um segmento orientado, o segmento orientado BA é o *oposto* de AB.

1.2.3 Medida de um segmento

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida do segmento orientado é o seu comprimento ou seu módulo. O comprimento do segmento AB é indicado $\overline{AB}$.

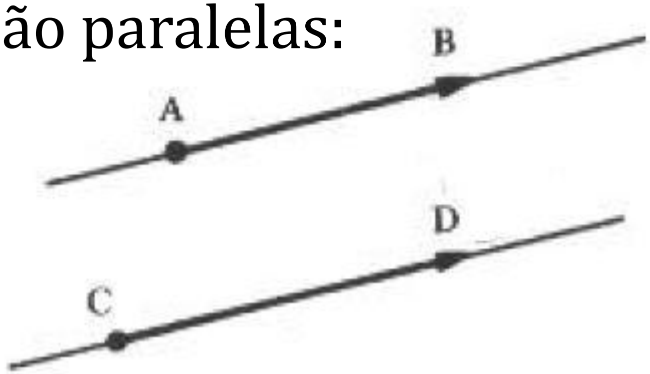


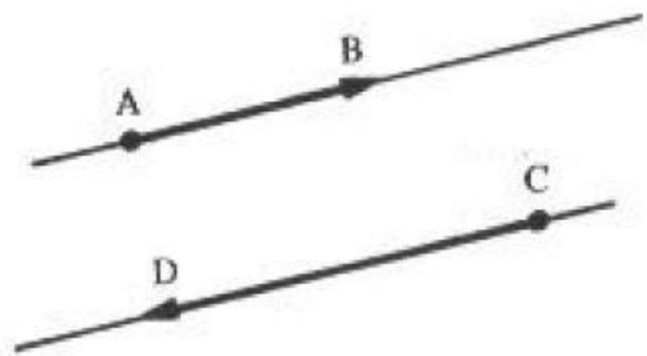
- Os segmentos nulos têm comprimento igual a zero.
- $\overline{AB}=\overline{BA}$

$\overline{AB}$= 5 u. c.

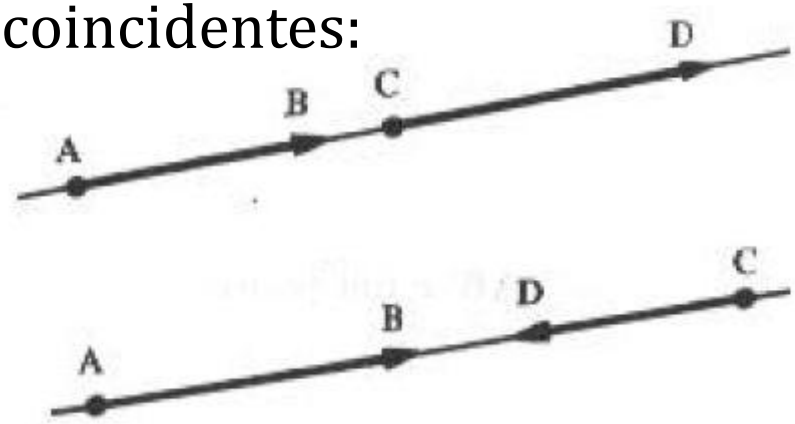
1.2.4 DIREÇÃO E SENTIDO

Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas:





ou coincidentes:

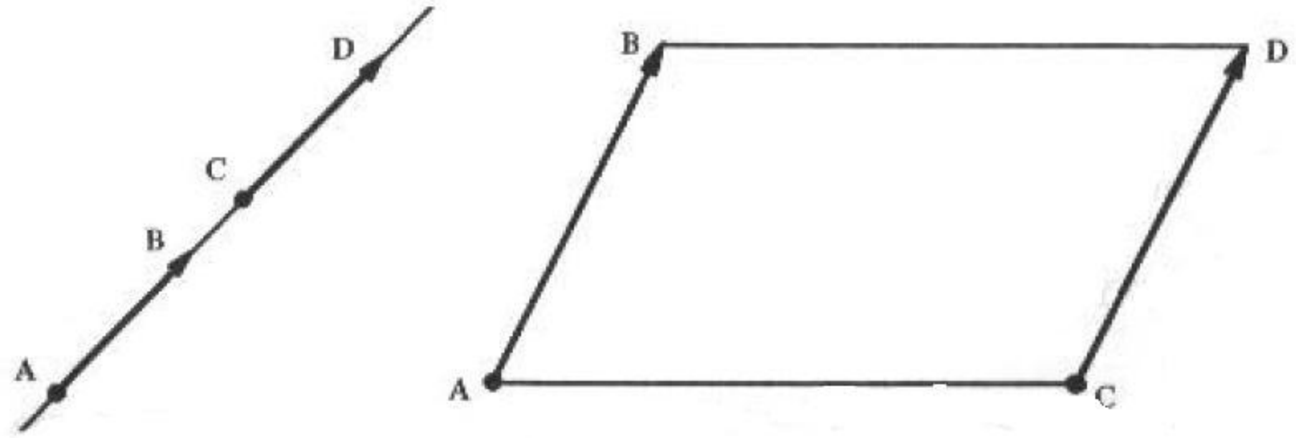


- Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.
- Só se pode comparar os sentidos se eles têm a mesma direção.

1.3 Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se os segmentos AB e CD não pertencerem à mesma reta, para que AB seja equipolente a CD é necessário que AB//CD e AC//BD, isto é, ABCD deve ser um paralelogramo.



- Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.
- A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por

AB~CD

1.3.1 PROPRIEDADES DA EQUIPOLÊNCIA

I) AB~ AB (Reflexiva)

II) Se AB~CD, CD~AB (Simétrica)

III) Se AB~CD e CD~EF, AB~EF (Transitiva)

IV) Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D tal que AB~CD

1.4 VETOR

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$.

Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes deste vetor, e todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um desses representantes determina o mesmo vetor.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um dos seu representantes, isto é: o *módulo*, a *direção* e o *sentido*.

O módulo de $\vec{v}$ se indica por $|\vec{v}|$.

1.4.1 VETORES IGUAIS

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, AB~CD.

1.4.2 VETOR NULO

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um *único* vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, e que é indicado por $\overrightarrow{0}$.

1.4.3 VETORES OPOSTOS

Dado um vetor $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

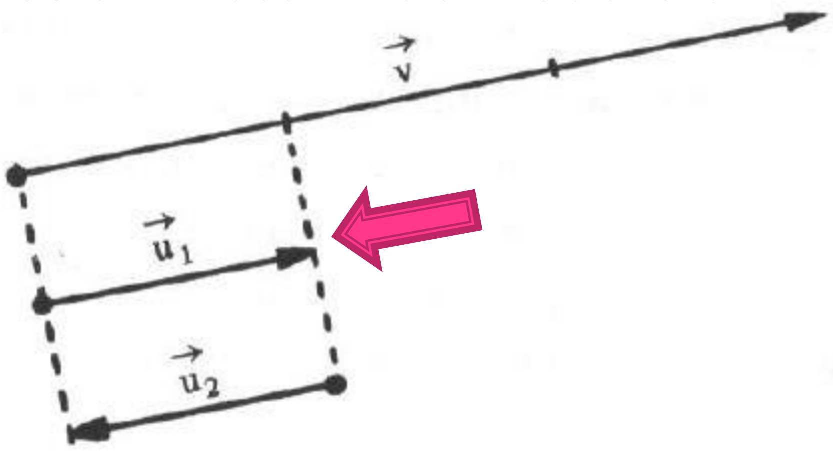
1.4.4 VETOR UNITÁRIO

Um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $|\vec{v}|=1$.

1.4.5 VERSOR

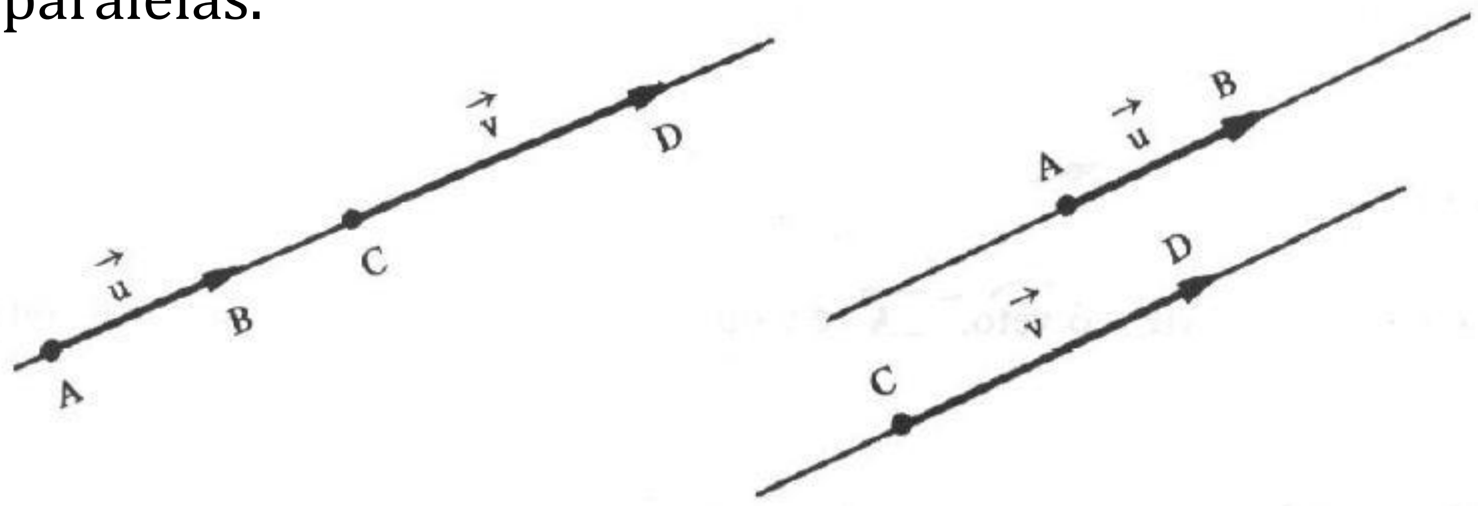
Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

Tomemos um vetor $\vec{v}$ de módulo 3:



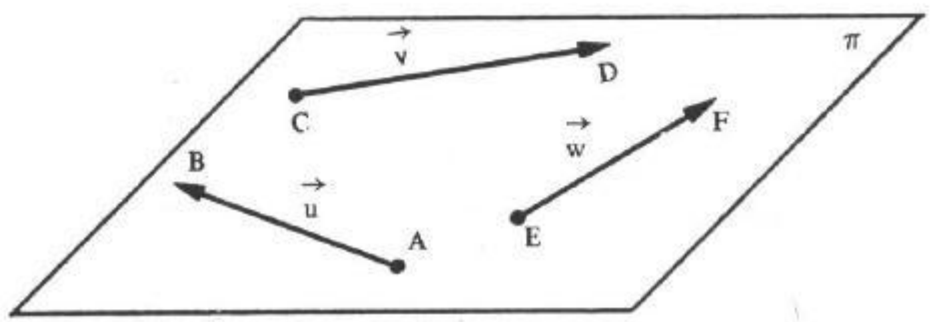
1.4.6 VETORES COLINEARES

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *colineares* se tiverem a *mesma direção.* Em outras palavras, se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



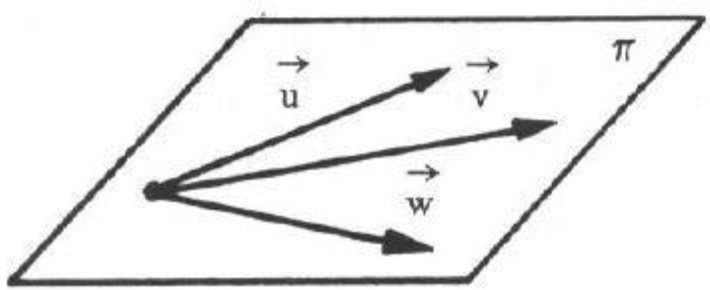
1.4.7 VETORES COPLANARES

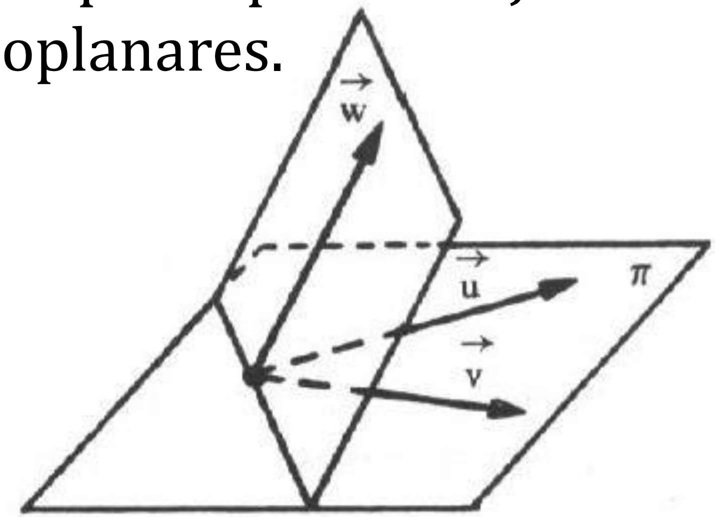
Se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (o número não importa) possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano π, diz-se que eles são *coplanares*.



1.4.7 VETORES COPLANARES

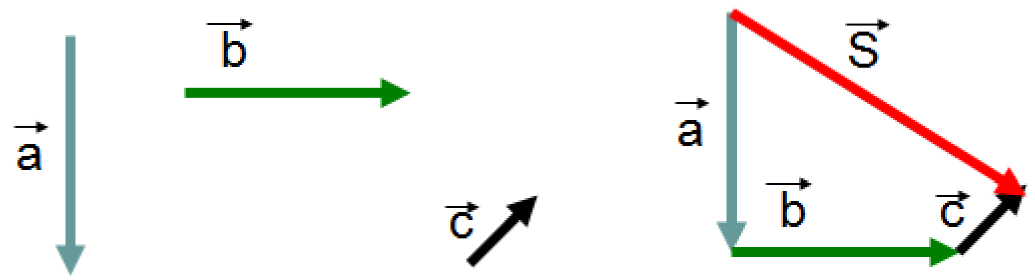
Dois vetores quaisquer são sempre coplanares. Já três vetores poderão ou não ser coplanares.





1.5 OPERAÇÕES COM VETORES

1.5.1 ADIÇÃO DE VETORES



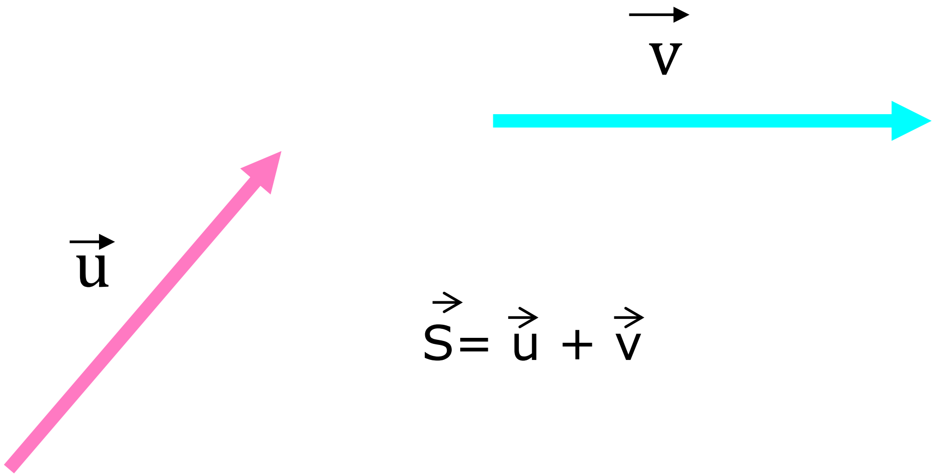
$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Regra do polígono:

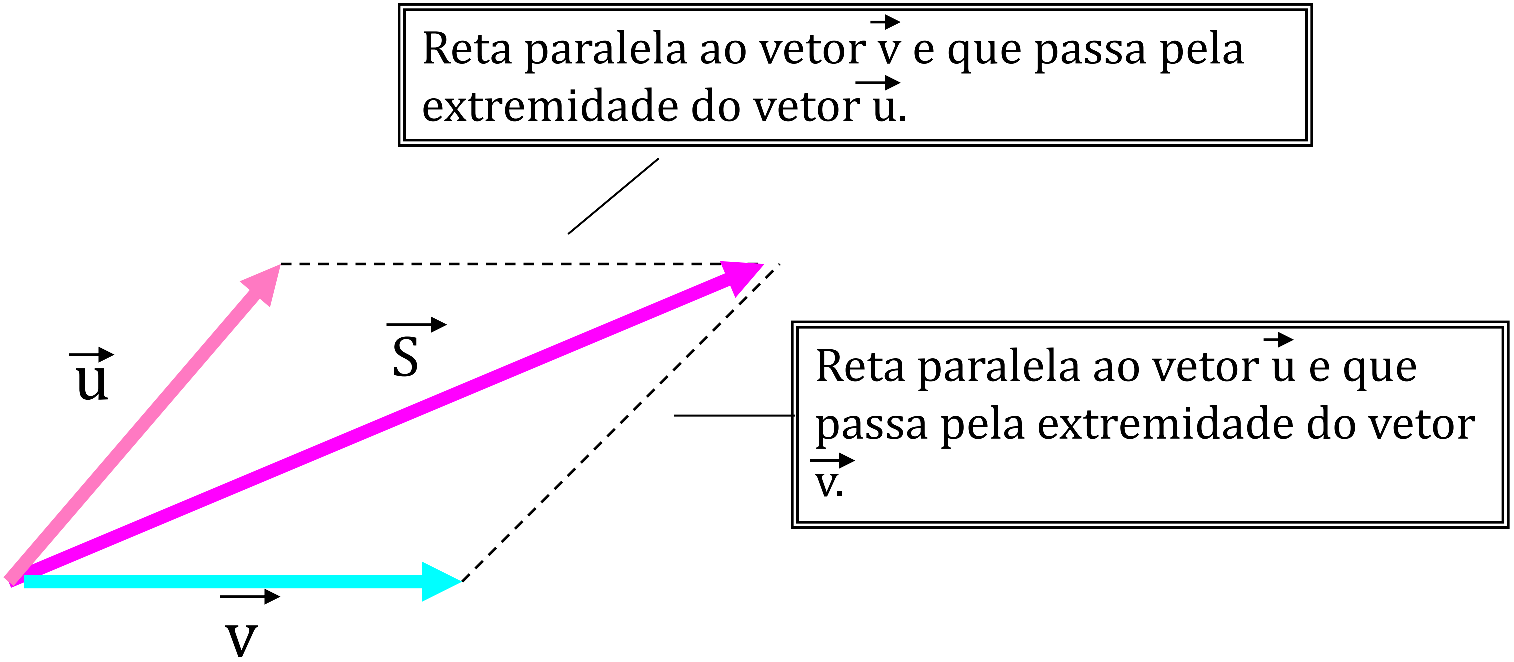
Ligam-se os vetores origem com extremidade. O vetor soma é o que tem origem na origem do 1º vetor e extremidade na extremidade do último vetor.

Regra do paralelogramo:

É utilizada para realizar a adição de <u>apenas dois vetores.</u>



$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$



A origem dos dois vetores deve estar no mesmo ponto.

Traçar uma reta paralela a cada um deles, passando pela extremidade do outro.

E o vetor soma, ou vetor resultante, será o vetor que une a origem dos dois vetores com o cruzamento das duas retas paralelas a cada vetor, formando assim um paralelogramo.

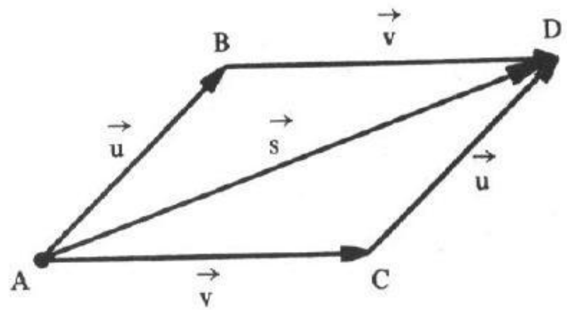
1.5.1.1 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

I) Comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

III) Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$

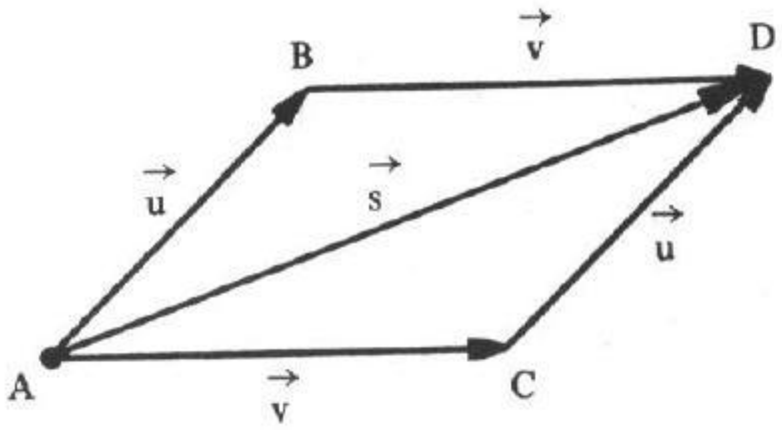
IV) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$ (oposto) tal que $\vec{v}+(-\vec{v})=-\vec{v}+\vec{v}=\vec{0}$

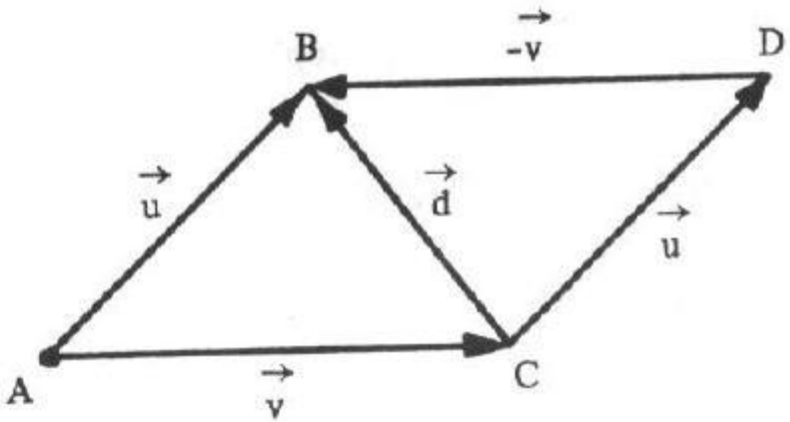


1.5.2 Diferença de vetores

A *diferença* de dois vetores se representa por:

$$\vec{d}=\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

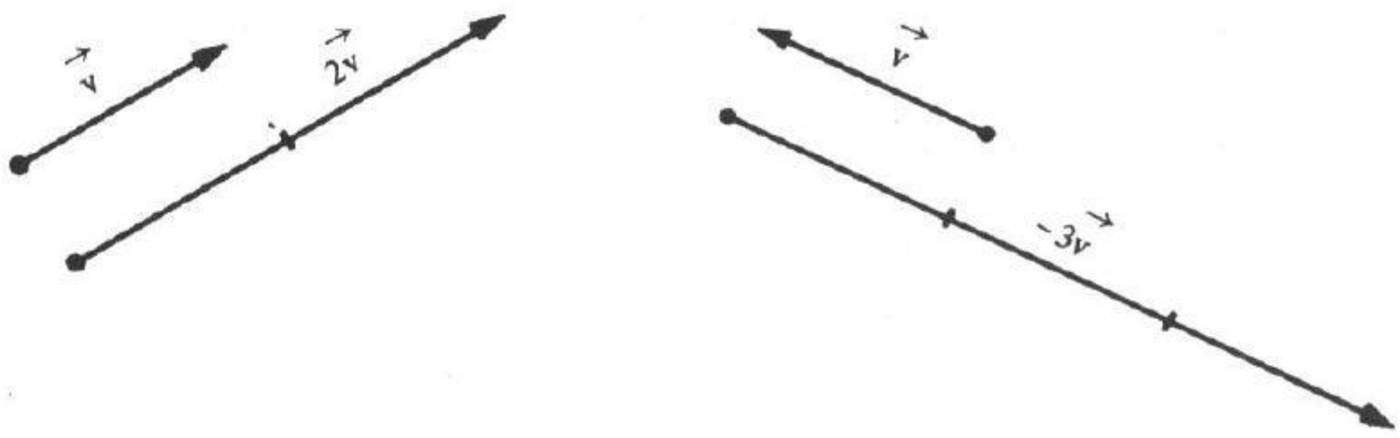




Realizar a subtração é como somar a mais um vetor de mesma intensidade, mesma direção, mas de sentido oposto ao do vetor $\vec{v}$ originalmente.

1.5.3 Multiplicação por um número real

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se *produto de um número real k* pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:



Observações:

a) Se k=0 ou $\vec{v}=\vec{0}$, o produto é o vetor $\vec{0}$.

b) Seja um vetor $k\vec{v}$, com $\vec{v}\neq 0$. Se fizermos com que o número real k percorra o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, obteremos todos os infinitos vetores colineares a $\vec{v}$, e, portanto, colineares entre si, isto é, qualquer um deles é sempre múltiplo escalar (real) do outro. Reciprocamente, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, colineares, sempre existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{u}=k\vec{v}$.

c)O versor de um vetor $\vec{v} \neq 0$ é o unitário $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

1.5.3.1 Propriedades da Multiplicação por um número real

Sendo a e b números reais, temos:

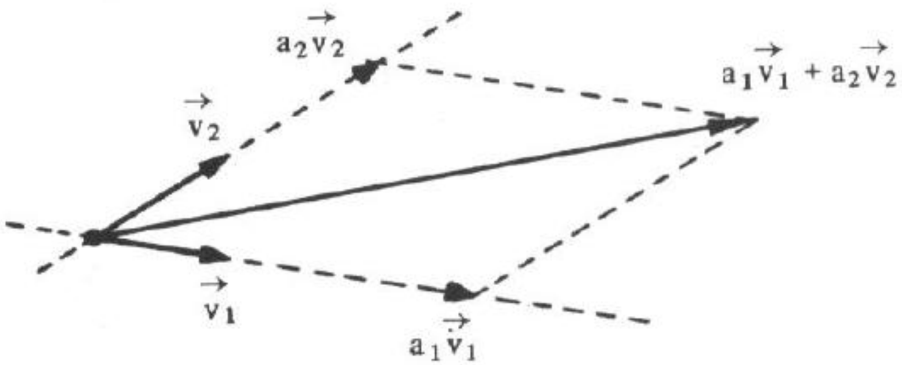
I) $a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}$ (Associativa)

II) $(a+b)\vec{v}= a\vec{v}+b\vec{v}$ (Distributiva em relação à adição de escalares)

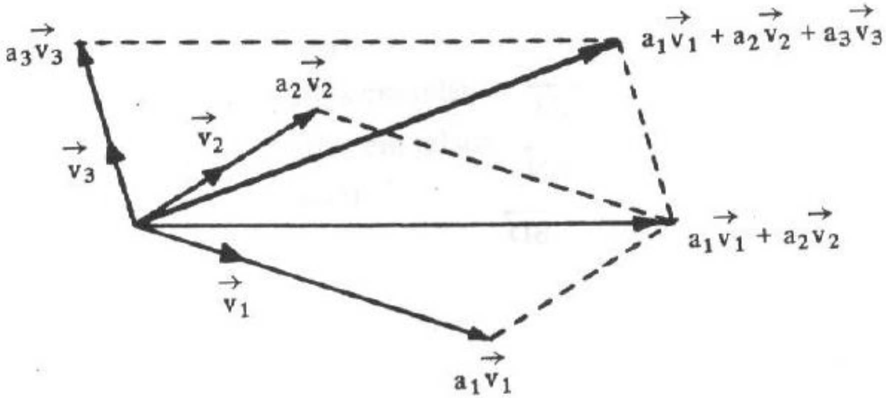
III) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$ (Distributiva em relação à adição de vetores)

IV) $1\vec{v}=\vec{v}$ (Identidade)

Dois vetores não colineares são sempre coplanares.

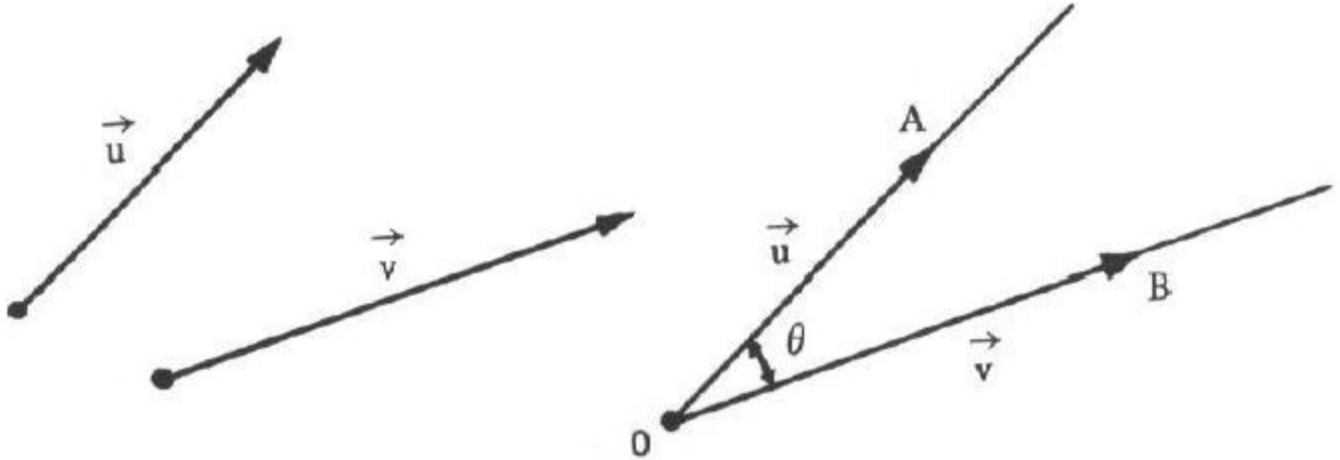


E três vetores?



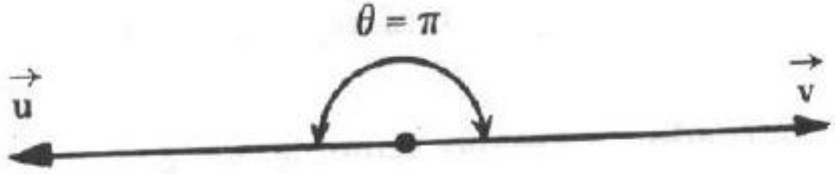
1.7 ÂNGULO DE DOIS VETORES

O *ângulo de dois vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas AO e OB e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

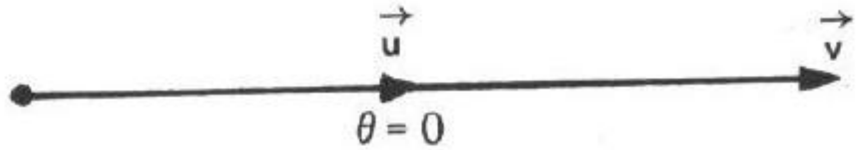


Observações:

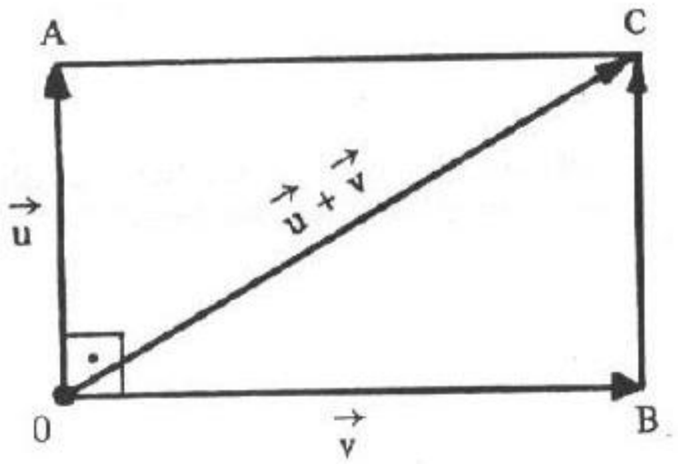
a) Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.



b) Se $\theta=0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e mesmo sentido.



c) Se $\theta=\pi/2$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e indica-se: $\vec{u}\perp\vec{v}$.



Neste caso, o ΔOBC permite escrever:
$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$

d) Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e k é um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $k\vec{v}$.

e) O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.