# Teorema Fundamental do Cálculo

# Introdução

Cálculo Diferencial

Problema da tangente

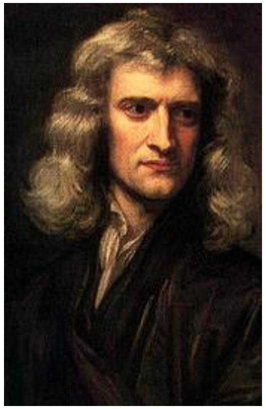
Cálculo Integral

Problema de área

Tem relação!

Isaac Barrow

# Introdução



Isaac Newton

Leibniz

Método sistemático

2.1 Parte 1

2.2 Parte 2

2.3 Integrais Indefinidas

# 2.1 TFC - Parte 1

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CÁLCULO – PARTE 1

Se f for contínua em [a,b], então a função F definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

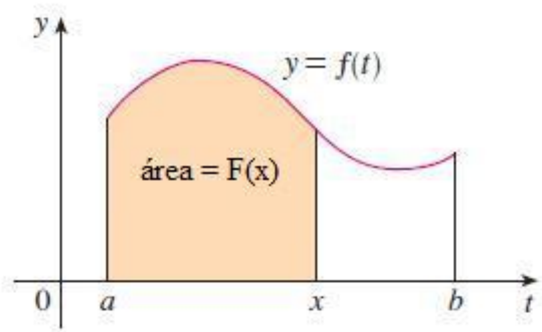
é contínua em [a,b] e diferenciável em (a, b) e F'(x)=f(x), isto é, F é a antiderivada de f.

$$\left[\int_a^x f(t)dt\right]' = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Seja uma função f contínua em [a,b] e defina uma nova função F por: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

onde a≤x≤b. Observe que F depende somente de x, que aparece como variável superior do limite da integral. Se x for um número fixado, então a integral é um número definido. Se variarmos x, o número da integral acima também varia e define uma função de x denotada por F(x).

F(x) pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode varia de a até b - "função área até aqui"




Sabemos a definição da derivada:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

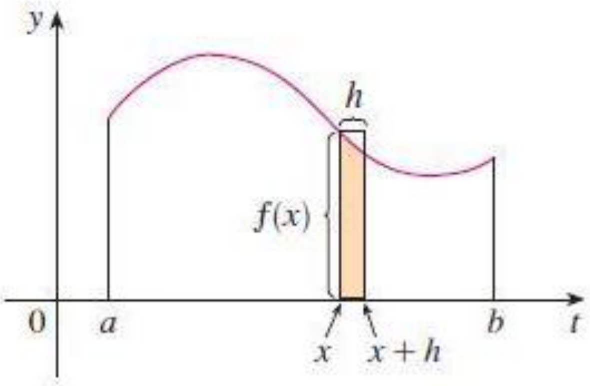
A fim de computar F'(x) da definição de derivada:

$$F(x+h)-F(x) \approx hf(x)$$ quando o h é pequeno!

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$$

Intuitivamente, portanto, esperamos que

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$



# 2.2 TFC - Parte 2

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CÁLCULO – PARTE 2

Se f for contínua em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada (ou primitiva), isto é, uma função tal que F'=f.

Vejamos um exemplo que ilustra o quanto é razoável a parte 2 do TFC:

Sabemos que a velocidade é a taxa da variação do espaço sobre o tempo, isto é v(t)=s'(t). Vimos na aula anterior $\int_a^b v(t)dx$ que fornecia o deslocamento ocorrido no intervalo de tempo [a,b].

Se calcularmos $s(b)-s(a)$ também temos o deslocamento ocorrido nesse intervalo. Deste modo é razoável pensar que:

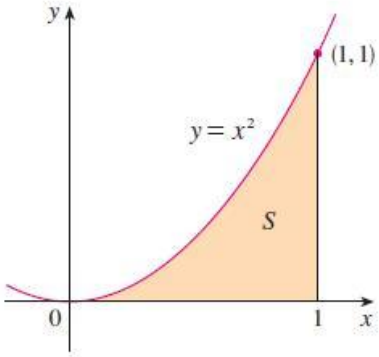
$$\int_a^b v(t)dx = s(b) - s(a)$$

Notações comuns:

$F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$ e $\left[\mathrm{F(x)}\right]_a^b$

EXEMPLO 1:

Ache a área sob a parábola $y=x^2$ de 0 a 1.



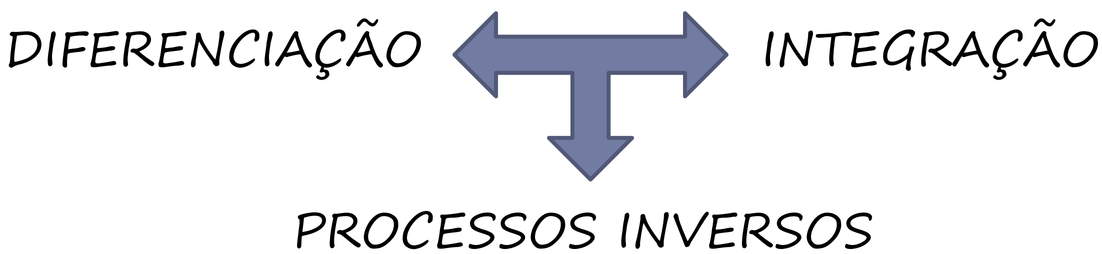

RESOLUÇÃO:

Sabemos que $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ é a antiderivada de $f(x)=x^2$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \quad \text{TFC2}$$

$$A=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$$

Então, do TFC podemos estabelecer que se tomarmos uma função F, a diferenciarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F.



# 2.3 Integral Indefinida

Precisamos de uma notação mais conveniente para as antiderivadas que as tornem fáceis de serem trabalhadas. Devido à relação dada pelo TFC entre antiderivadas e integrais, a notação

$\int f(x)dx$ é tradicionalmente usada para uma antiderivada de f e é chamada de integral indefinida.

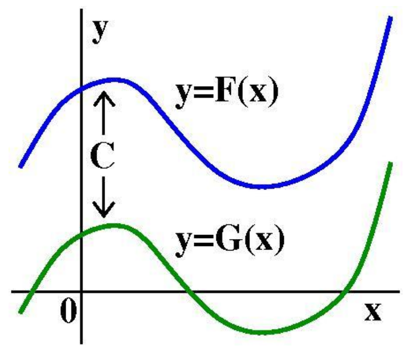
Por exemplo:

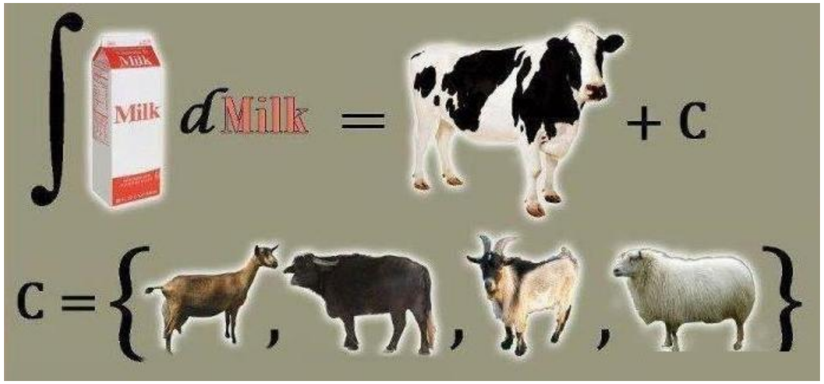
$$\underbrace{\int x^2 dx}_{f(x)} = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{pois} \quad \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{x^3}{3} + C}_{F(x)}\right) = \underbrace{x^2}_{f(x)}$$

Portanto podemos olhar uma integral indefinida como uma família de funções (uma antiderivada para cada valor de constante C).

Se $F(x) = x^2$ é a antiderivada de $f(x) = 2x$ pois $F'(x) = 2x = f(x)$ e se $G(x) = x^2 + 100$ também é antiderivada de $f(x) = 2x$ pois $G'(x) = 2x = f(x)$
Então F e G são antiderivadas de f e sabemos que diferem por uma constante C.

$$G(x) = F(x) + C$$
$$G'(x) = F'(x)$$




*IMPORTANTE:*
*INTEGRAL DEFINIDA* é um número.
*INTEGRAL INDEFINIDA* é uma família de funções.

TABELA DE INTEGRAIS INDEFINIDAS:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int sen\ x\ dx = -\cos\ x + C$$

$$\int \cos\ x\ dx = sen\ x + C$$

$$\int \sec^2 x\ dx = tg\ x + C$$

$$\int \cos\sec^2 x\ dx = -\cot g + C$$