Somas de Riemann e Integração Numérica

Introdução

Problemas de tangente e de velocidade

⇩

Derivada

Problemas de área e distância

⇩

Integral Definida

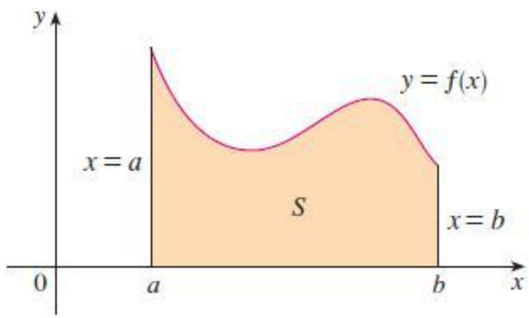
1.1 Áreas e distâncias

1.2 Integral Definida

1.1 Áreas e distâncias

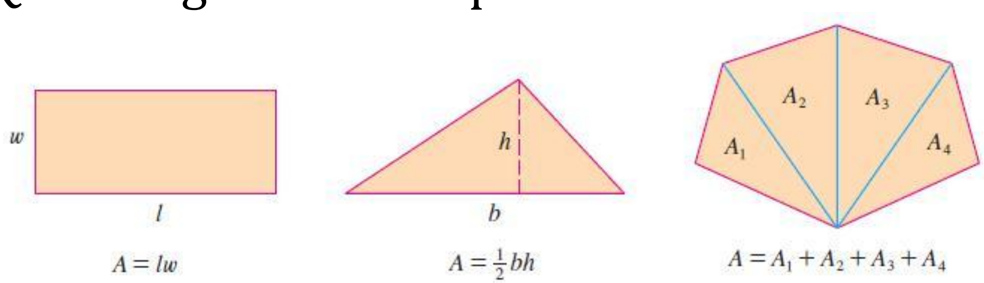
O PROBLEMA DA ÁREA

Achar a área de uma região S que está sob a curva y=f(x) de *a* até *b*. Isto significa que S está limitada pelo gráfico de uma função contínua f (onde $f(x) \geq 0$), as retas verticais x=a e x=b e o eixo x.



$$S = \left\{ (x, y) \middle| a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

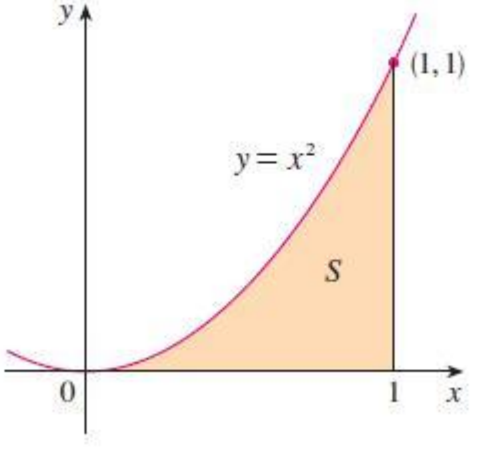
Qual o significado da palavra *área*?



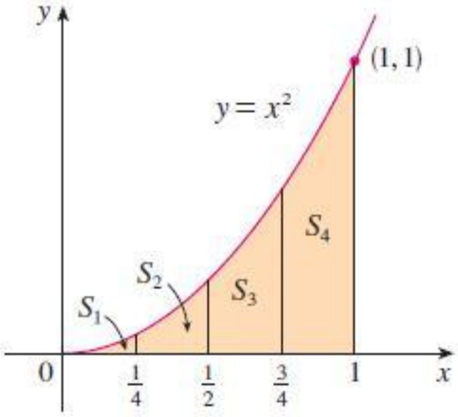
No entanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos.
Uma ideia similar à que usamos para definir uma tangente, aproximando a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações. Aqui aproximaremos a região S por retângulos e então tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos.

EXEMPLO 1

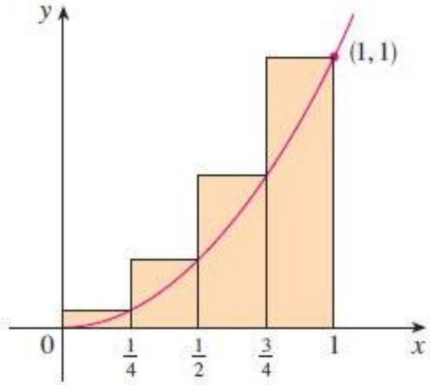
Use retângulos para estimar a área sob a parábola abaixo:



Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4.



Podemos aproximar cada faixa por um retângulo de base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa.



Alturas são valores da função nas extremidades direitas dos subintervalos:

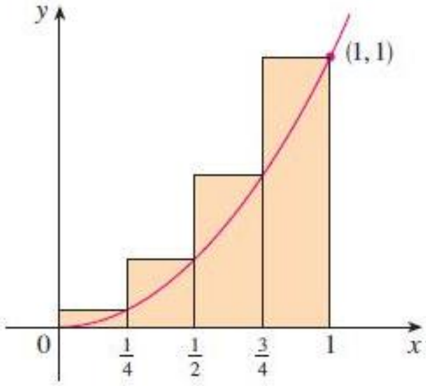
Subintervalo Altura

$$\left[0,\frac{1}{4}\right] \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

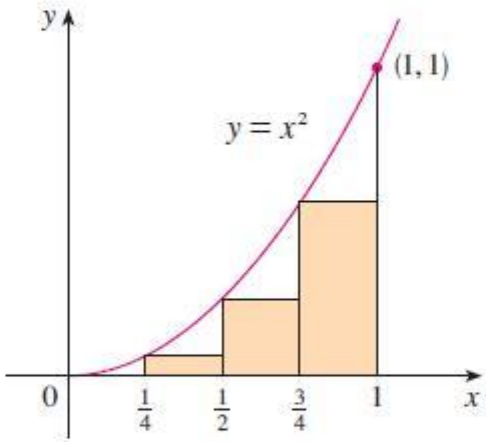
$$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right] \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left[\frac{3}{4},1\right] \rightarrow (1)^2$$



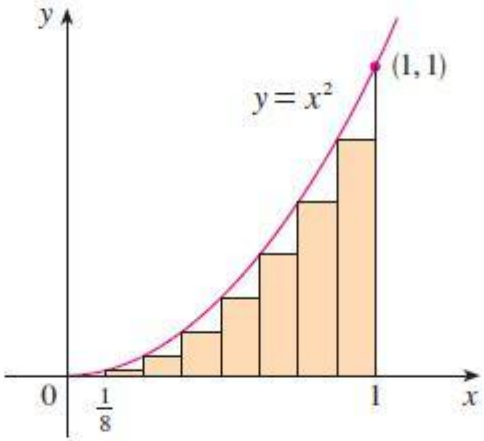
$$R_4 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.(1)^2 = \frac{15}{32} = 0,46875$$

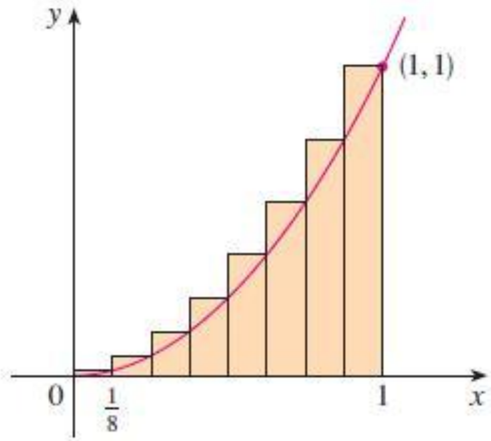
$$A < 0,46878$$



$$L_4 = \frac{1}{4}.(0)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0,21875$$

$$0,21875 < A < 0,46878$$





$L_8 = 0,2734375$ $R_8 = 0,3984375$

$$0,2734375 < A < 0,3984375$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

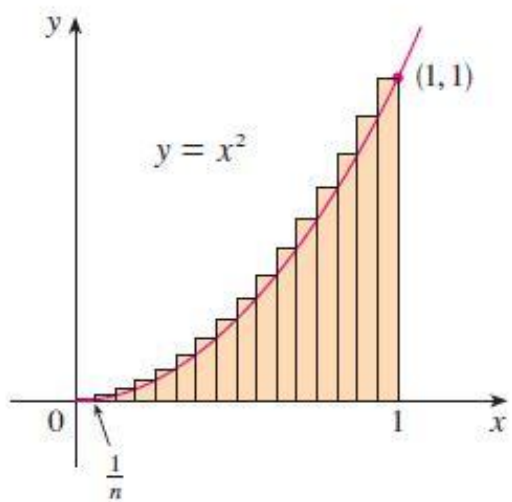
$$A \approx 0,3333335$$

Dos valores da tabela parece que R_n aproxima-se de $1/3$ à medida que aumentamos n. Vamos confirmar isso:

EXEMPLO 2:

Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $1/3$, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$



RESOLUÇÃO:

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} . \frac{1}{n^2} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \right)$$

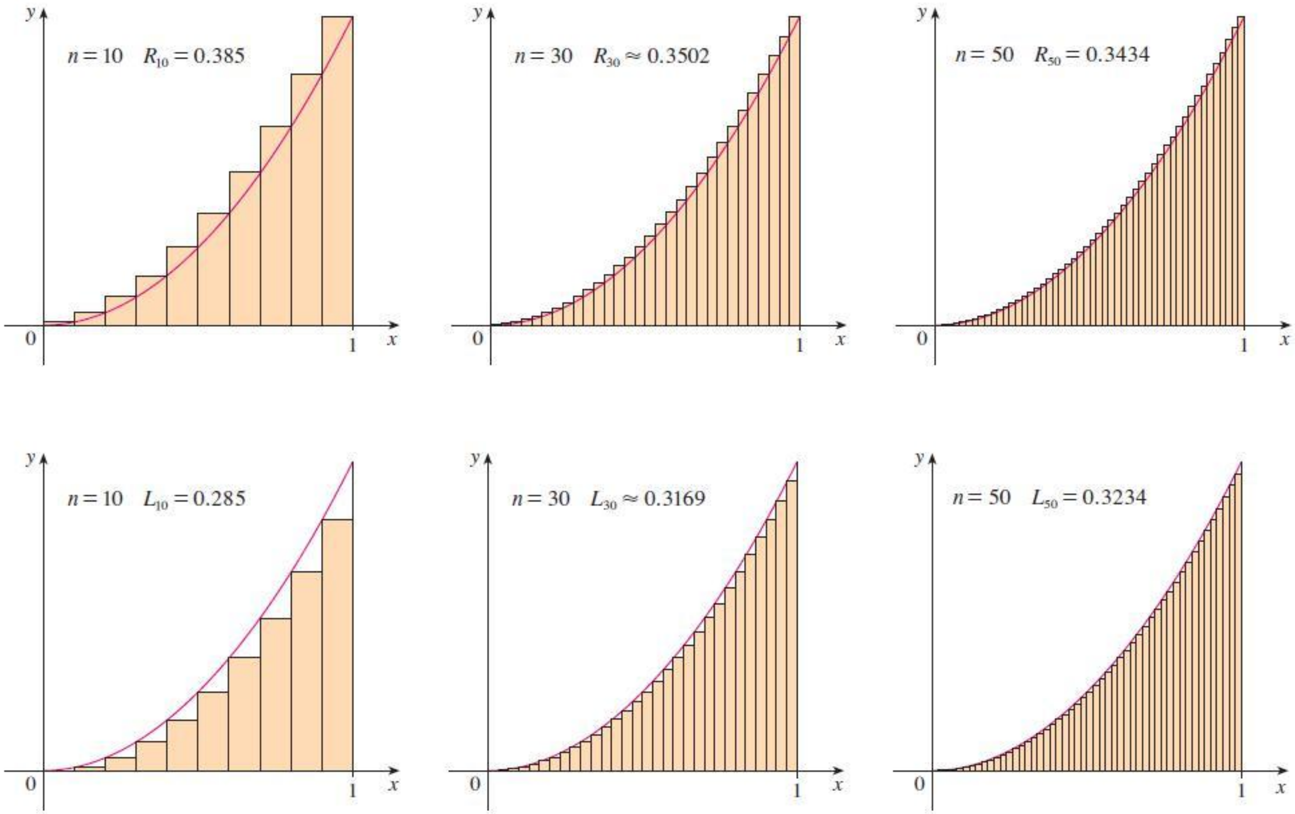
Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos (demonstrada no Apêndice E do Stewart):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$R_n = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

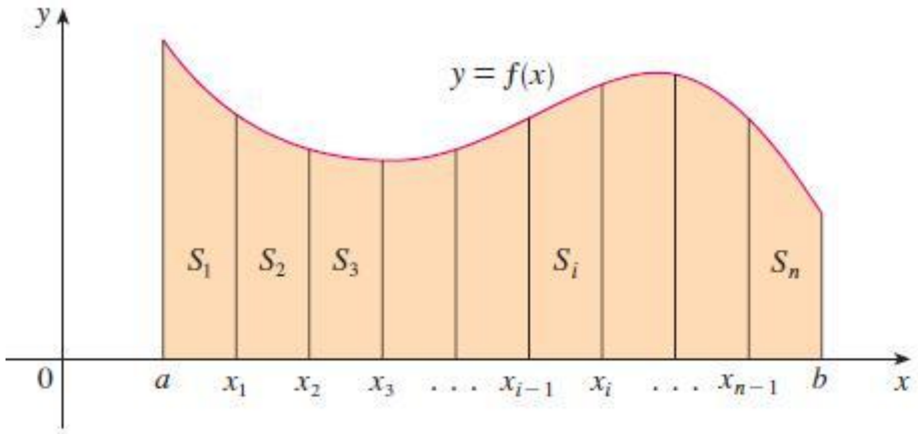
$$\lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{6} .1.2 = \frac{1}{3}$$



$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Vamos usar regiões S mais gerais que a do Exemplo $1\ e\ 2$. Começamos por subdividir S em n faixas como na figura abaixo:



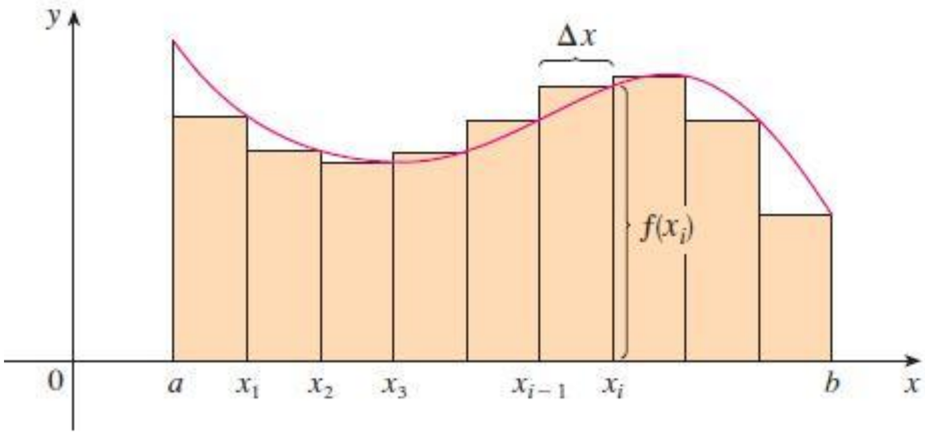
A largura do intervalo [a,b] é b-a; assim, a largura de cada uma das faixas é: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Essas faixas dividem o intervalo [a,b] em n subintervalos:

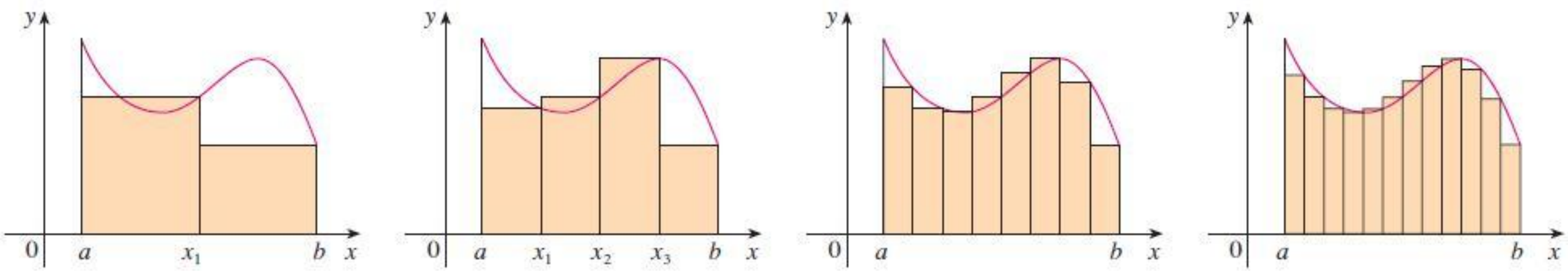
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são:

$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\dots$$



$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

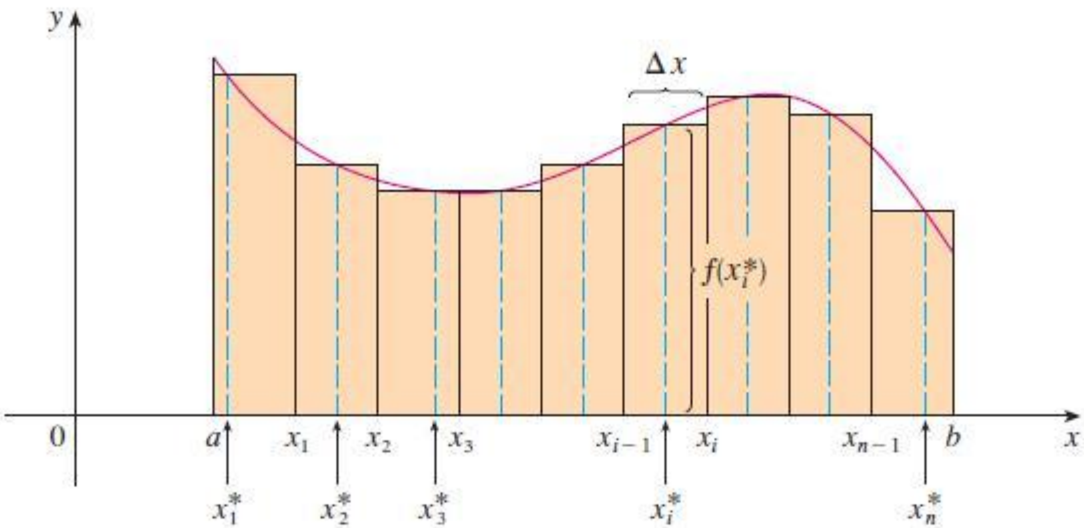
DEFINIÇÃO:

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x \right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_0\right)\Delta x + f\left(x_1\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_{n-1}\right)\Delta x \right]$$

Podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em qualquer número x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Pontos amostrais

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[f\left(x_1^*\right) \Delta x + f\left(x_2^*\right) \Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right) \Delta x \right]$$

Usando a notação de somatória (sigma):

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

O PROBLEMA DA DISTÂNCIA

Estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos.

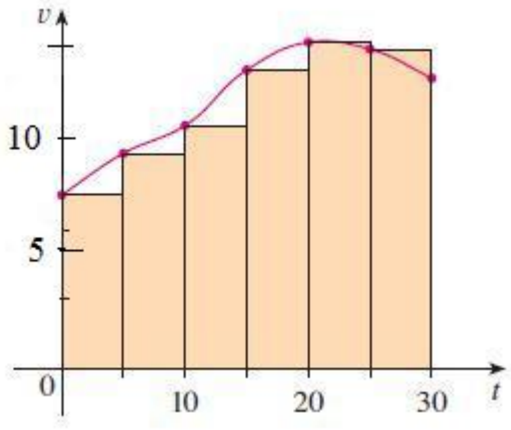
Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Distância = velocidade x tempo

$$(7,5\times 5)+(9,4\times 5)+(10,6\times 5)+(12,8\times 5)+(14,2\times 5)+(13,9\times 5)=342m$$

$$(9,4\times 5)+(10,6\times 5)+(12,8\times 5)+(14,2\times 5)+(12,5\times 5)=367m$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$



1.2 A integral definida

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_1^*\right)\Delta x+ f\left(x_2^*\right)\Delta x+\ldots+ f\left(x_n^*\right)\Delta x\right]$$

DEFINIÇÃO:

Se f é uma função contínua definida em a≤x≤b, dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x=(b-a)/n$. Sejam $x_0(=a), x_1, x_2,\ldots x_n(=b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*,\ldots x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é integrável em [a,b]

$\int$ Sinal de integral introduzido por Leibniz

$f(x)$ Integrando

$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ Soma de Riemann

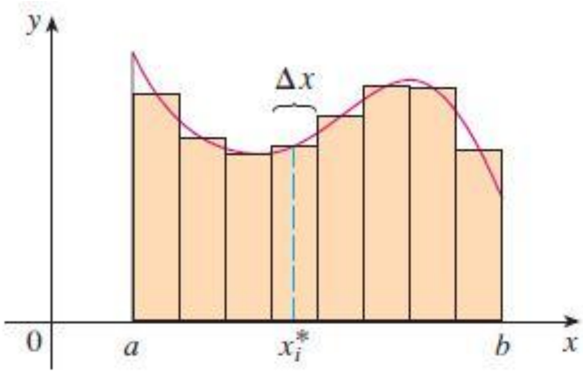
a, b Limites de integração, inferior e superior

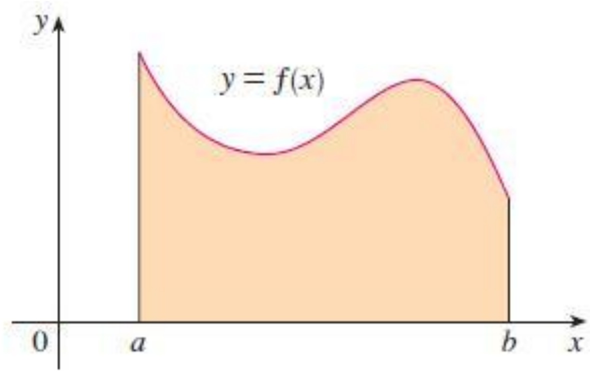
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

$1826 - 1866$

"Uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil"
Gauss

Se f(x)≥0





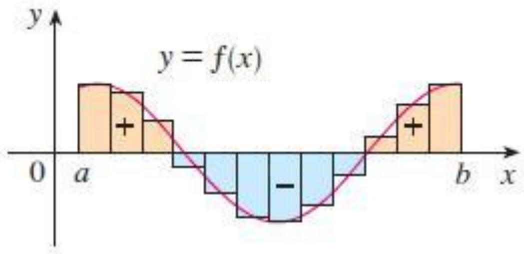
A soma de Riemann é a soma de áreas de retângulos

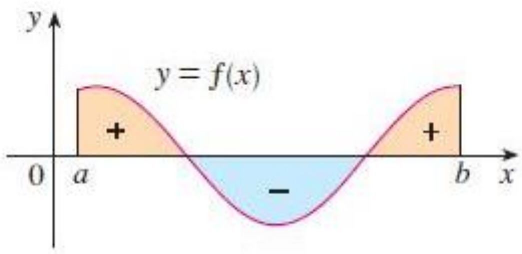
$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

A integral é a área sob a curva y=f(x) de a até b

$$\int_a^b f(x)dx$$

Se f(x)assumir valores positivos e negativos:





A soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos rosas menos os azuis

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$

CÁLCULO DE INTEGRAIS

Para trabalhar com somas precisamos de três fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EXEMPLO 3:

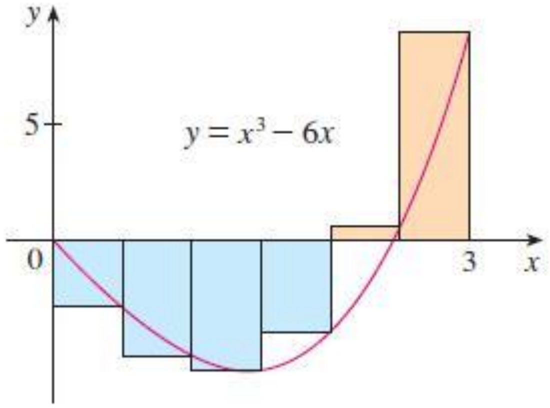
A. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e a=0, b=3 e n=6

B. Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

RESOLUÇÃO:

A. Com n=6, o comprimento de intervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$



As extremidades direitas são:

$x_1 = 0,5, x_2 = 1, x_3 = 1,5, x_4 = 2, x_5 = 2,5 \; e \; x_6 = 3.$

Logo a soma de Riemann é:

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x$$

$$R_6 = f(0,5)\Delta x + f(1,0)\Delta x + f(1,5)\Delta x + f(2,0)\Delta x + f(2,5)\Delta x + f(3,0)\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}(-2,875 - 5 - 5,625 - 4 + 0,625 + 9)$$

$$= -3,9375$$

B. Com n subintervalos, temos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim, $x_0 = 0,\ x_1 = 3/n,\ x_2 = 6/n,\ x_3 = 9/n$ e em geral $x_i = 3i/n$.
Utilizando as extremidades direitas, podemos usar a equação:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

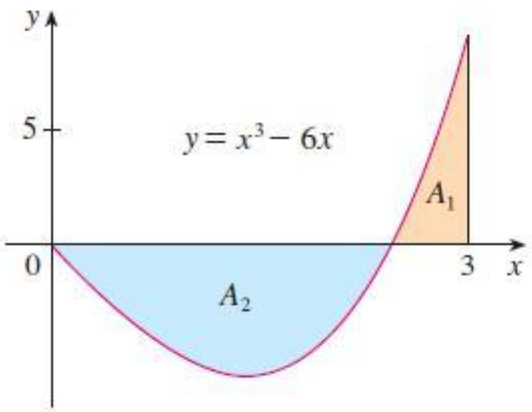
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

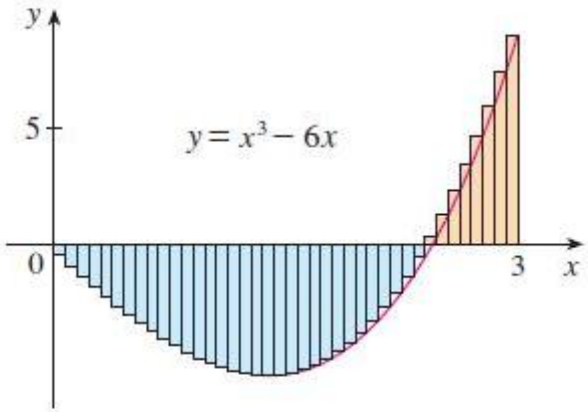
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$





n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA:

Se b<a:

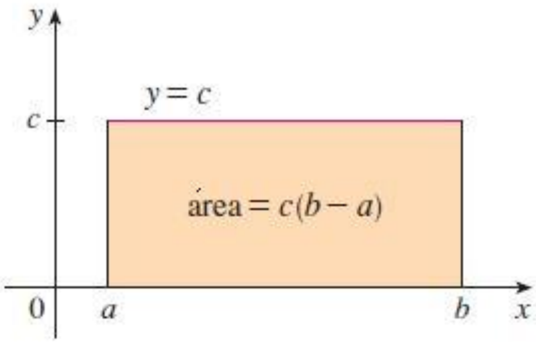
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Se a=b:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

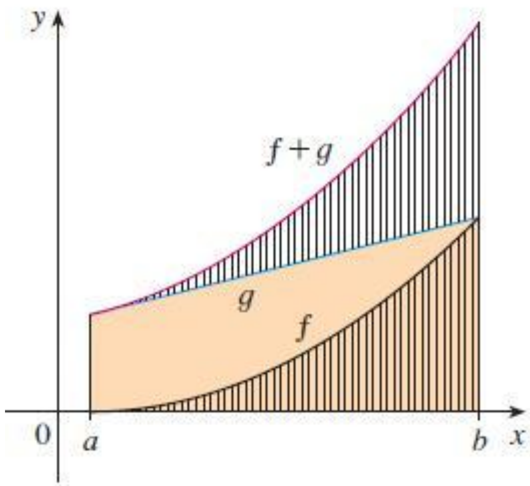
1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

PROPRIEDADE 1:



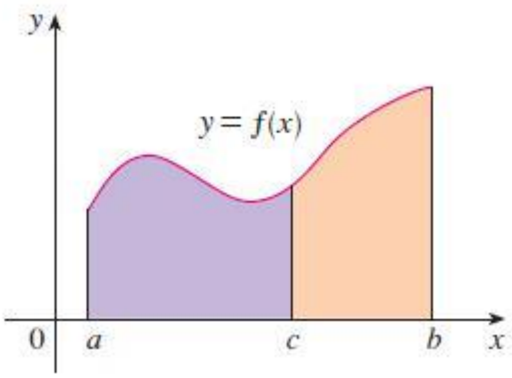
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

PROPRIEDADE 2:



$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

PROPRIEDADE 5:



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

PROPRIEDADES COMPARATIVAS DA INTEGRAL:

6. Se f(x)≥0 para a≤x≤b, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
7. Se f(x)≥g(x) para a≤x≤b, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
8. Se m≤f(x)≤M para a≤x≤b, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

PROPRIEDADE 8: