Método da Substituição

Introdução

Nossas fórmulas de antidiferenciação não mostram como calcular integrais do tipo

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Uma maneira de calcularmos esta integral é mudarmos a variável x para uma nova variável u.

Suponha que façamos $u = 1 + x^2$. Então calculamos a derivada:

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \rightarrow \text{du=2xdx}$$

Portanto podemos reescrever a nossa integral:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^n du \rightarrow n = 1/2$$

⟹ integral imediata! $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$= \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Substituindo $u = 1 + x^2$

$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C \Longrightarrow F$$

Podemos verificar a resposta correta usando a Regra da Cadeia para diferencial a função final:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}(x^2+1)^{3/2-1}2x\right] = \qquad \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx}$$

$$(x^2+1) \Longrightarrow u$$

$$= 2x(x^2+1)^{1/2} = 2x\sqrt{x^2+1}$$

$$F' \qquad F' = f \qquad \text{TFC1} \qquad f$$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO:

Esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma, onde u=g(x)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$$

PASSO A PASSO:

Passo 1. Considere $u = g(x)$, onde $g(x)$ é parte do integrando, em geral "a função interna" da função composta $f(g(x))$.

Passo 2. Calcule $du = g'(x)\,dx$.

Passo 3. Use a substituição $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$ para converter a integral em uma outra envolvendo apenas u.

Passo 4. Calcule a integral resultante.

Passo 5. Substitua u por $g(x)$ para obter a solução final como função de x.

EXEMPLO 1:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx$$

RESOLUÇÃO:

Seja u=2x+1, então du=2dx ou $dx = \frac{du}{2}$

$$\int \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3} + C = \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + C$$

EXEMPLO 2:

$$\int e^{5x}dx$$

RESOLUÇÃO:

Seja u=5x, então du=5dx ou $dx = \frac{du}{5}$

$$\int e^u \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{5}e^u + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

EXEMPLO 3:

$$\int sen(x^2)xdx$$

RESOLUÇÃO:

Seja u=x^2, então du=2xdx ou $xdx = \frac{du}{2}$

$$\int sen(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int sen(u)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos(u)\right) + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C$$

EXEMPLO 4:

$$\int x^3 \cos(x^4+2)dx$$

RESOLUÇÃO:

Seja u=x^4+2, então du=4x^3dx ou $x^3 dx = \frac{du}{4}$

$$\int \cos(u)\frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos(u)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(sen(u)\right) + C = \frac{sen(x^4+2)}{4} + C$$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO (definida)

Existem 2 métodos para se calcular uma integral definida por substituição. Um deles consiste em se calcular a integral indefinida e então usar o TFC2.

O outro método, usualmente preferível, consiste em mudar os limites de integração ao se variar a variável.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

DO EXEMPLO 1:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

1º método

RESOLUÇÃO:

$$\left[\int \sqrt{2x+1}\,dx\right]_0^4 = \left[\frac{(2x+1)^{3/2}}{3}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{(2.4+1)^{3/2}}{3} - \frac{(2.0+1)^{3/2}}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{(9)^{3/2}}{3} - \frac{(1)^{3/2}}{3}\right] = \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$$

2º método

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \Rightarrow u = g(x) = 2x+1$$

$$g(b) = 2.4+1 = 9$$

$$g(a) = 2.0+1 = 1$$

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$= \left[\frac{(u)^{3/2}}{3}\right]_1^9 = \left[\frac{(9)^{3/2}}{3} - \frac{(1)^{3/2}}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$$