Distâncias

Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

6.1 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ é o módulo do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$, isto é:

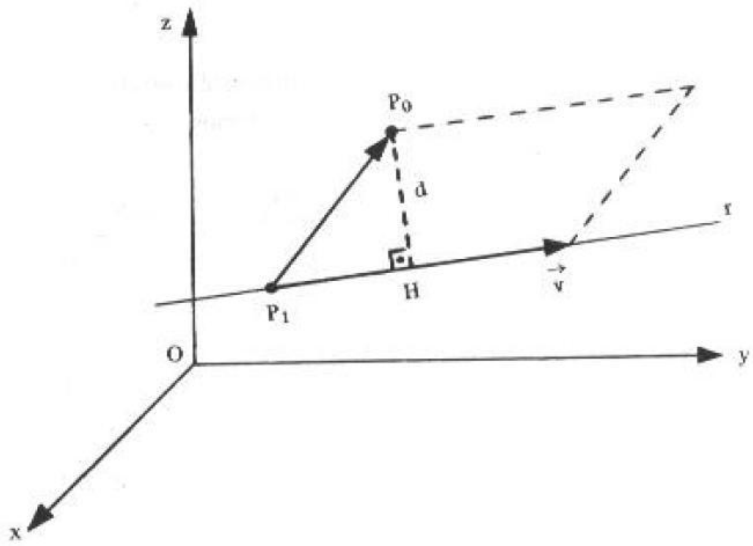
$$d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

e, portanto,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

6.2 Distância de um ponto a uma reta

Seja uma reta r definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v}=(a,b,c)$ e seja $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_0}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d de P_0 a r que pretendemos calcular.



área do paralelogramo= base x altura

$A=|\vec{v}|d$ (I)

ou de acordo com a interpretação do módulo do produto vetorial, por:

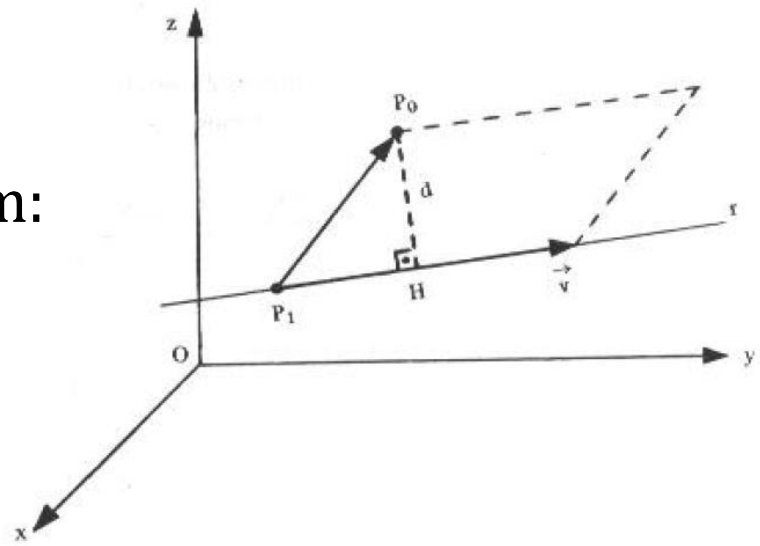
$A=|\vec{v}\times\overrightarrow{P_1P_0}|$ (II)

Comparando (I) com (II), vem:

$$|\vec{v}|d = |\vec{v}\times\overrightarrow{P_1P_0}|$$

e:

$$d = d(P_0,r) = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}$$

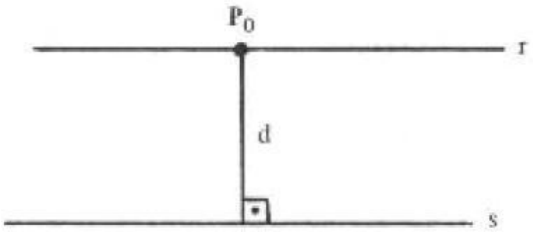


6.3 Distância entre duas retas

6.3.1 As retas são concorrentes

A distância d entre duas retas r e s concorrentes é nula, por definição.

6.3.2 As retas são paralelas



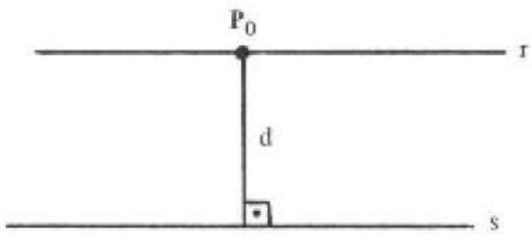
A distância d entre duas retas r e s, paralelas é a distância de um ponto qualquer P_0 de uma delas à outra reta, isto é:

$$d(r,s) = d(P_0, s), P_0 \in r$$

ou:

$$d(r,s) = d(P_0, r), P_0 \in s$$

Se reduz então ao item 6.2.

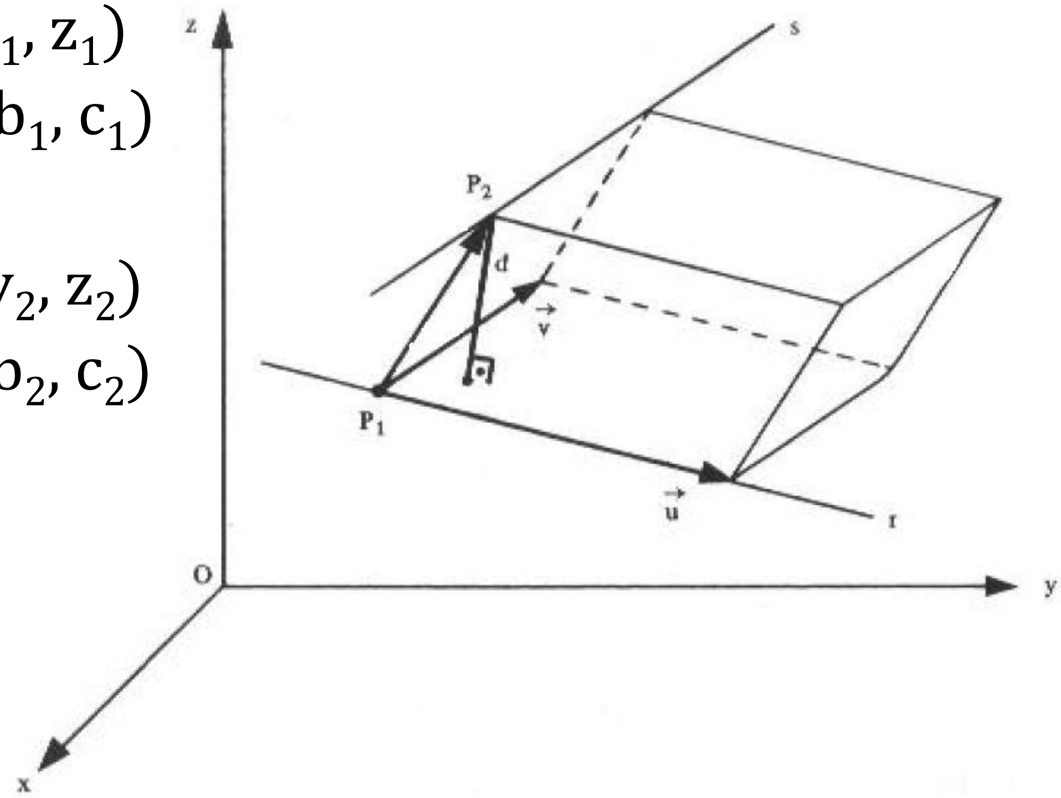


6.3.3 As retas são reversas

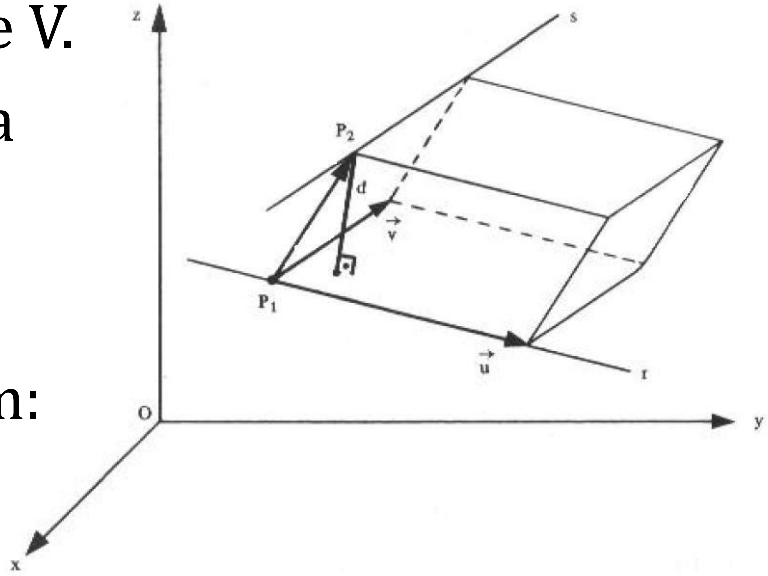
Considerando duas retas reversas definidas por:

reta r $\begin{cases} P_1(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \end{cases}$

reta s $\begin{cases} P_2\ (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{v} = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$



Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ determinam um paralelepípedo de volume V.



volume=área da base x altura

$V = |\vec{u} \times \vec{v}|\, d$ (I)

$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})|$ (II)

Comparando (I) com (II), vem:

$|\vec{u} \times \vec{v}|\, d = |(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})|$ e :

$$d = d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

6.4 Distância de um ponto a um plano

Sejam um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um plano

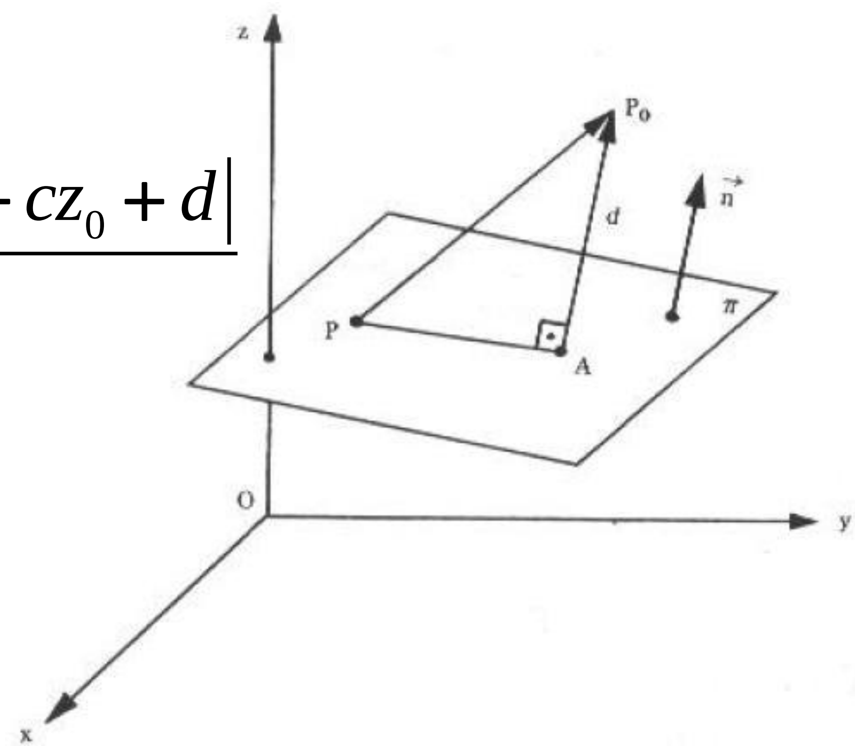
π: ax+by+cz+d=0

Sejam P(x,y,z) um ponto qualquer desse plano.

O vetor $\vec{n}$=(a,b,c) é normal ao

plano π.

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|}$$



Observação:

Se o ponto considerado for a origem O(0,0,0) do sistema, tem-se:

$$d(O,\pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

6.5 Distância entre dois planos

A distância entre dois planos é definida somente quando os planos forem paralelos.

Dados dois planos π_1 e π_2, paralelos, a distância d entre eles é a distância de um ponto qualquer de um dos planos ao outro:

$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_2)$ com $P_0 \in \pi_1$

$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_1)$ com $P_0 \in \pi_2$

Se reduz então ao cálculo do item anterior.

6.6 Distância de uma reta a um plano

A distância de uma reta a um plano é definida somente quando a reta é paralela ao ponto.

Dada uma reta r paralela a um plano π, a distância d da reta ao plano é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano, isto é,

$$d(r,\pi)=d(P_0,\pi) \text{ com } P_0 \in r.$$

Se reduz então ao cálculo do item 6.4.