Cônicas e quádricas

Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

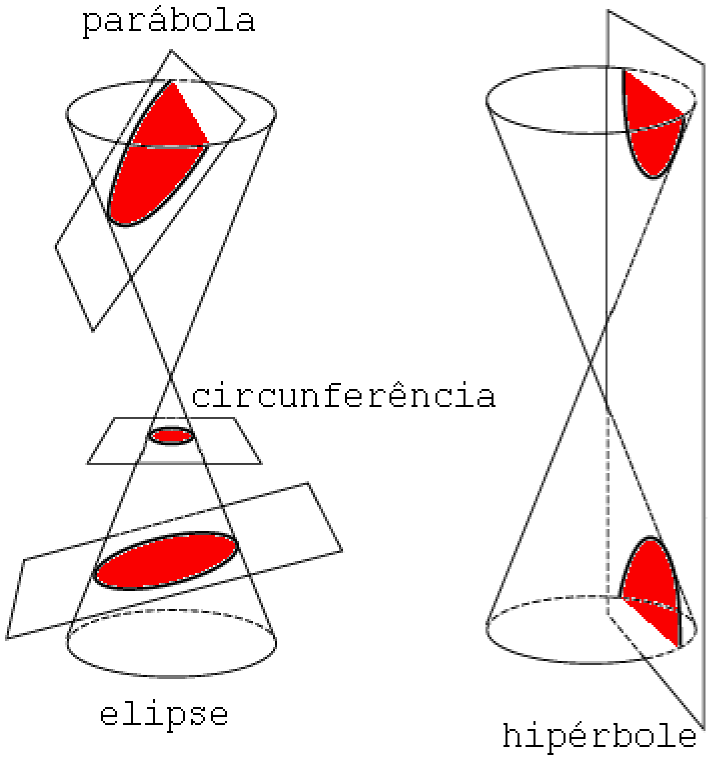
11.1 Cônicas

Pierre de Fermat (1601-1665) estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, segundo o qual, uma equação do 1º grau, no plano, representa uma reta, e uma equação do 2º grau, no plano, representa uma cônica.

Portanto chamamos de cônicas ao lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas (x,y), em relação à base canônica, satisfazem à equação do 2º grau:

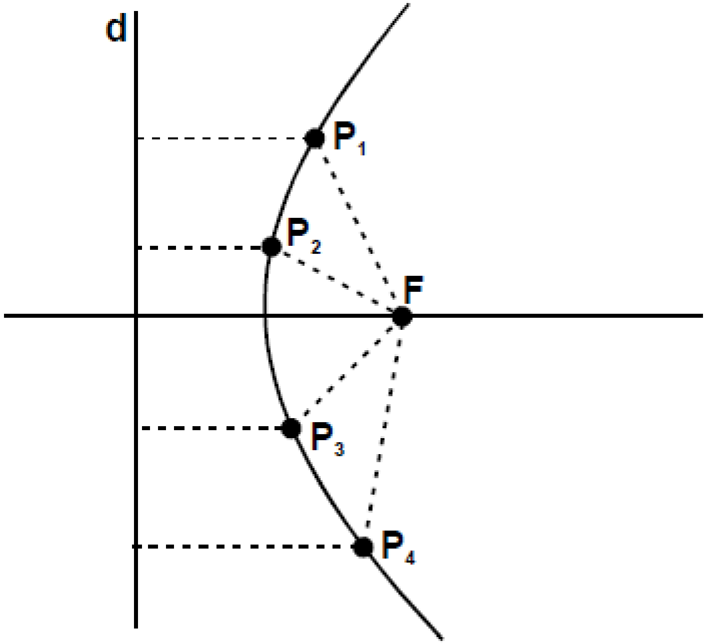
$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

Cônicas são curvas originadas de cortes de cones.
Dependendo do corte podemos ter:



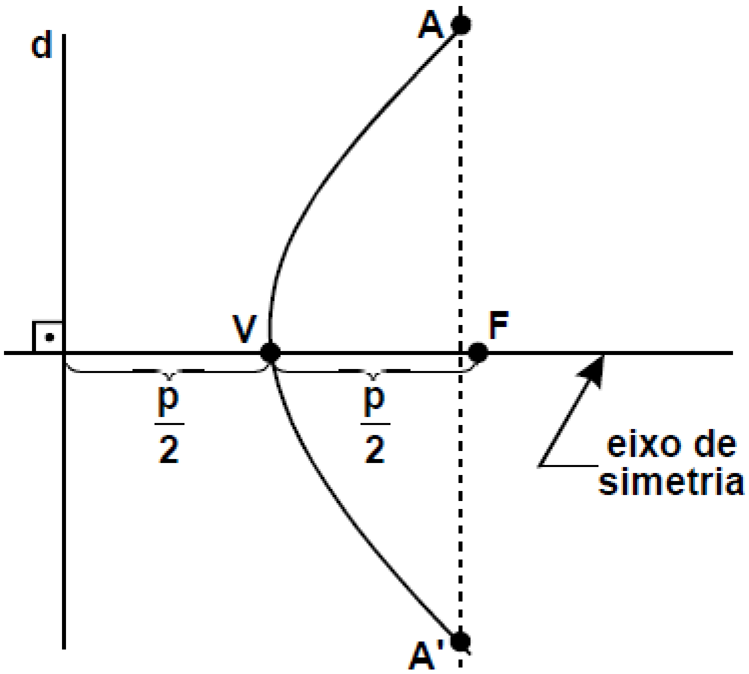
11.1.1 Parábola

Consideramos um ponto F e uma reta d que não contém F. Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de d e F.



$$d(P_1, F) = d(P_1, d)$$

11.1.1.1 Elementos da parábola



Denominamos:

F: foco

d: diretriz

V: vértice

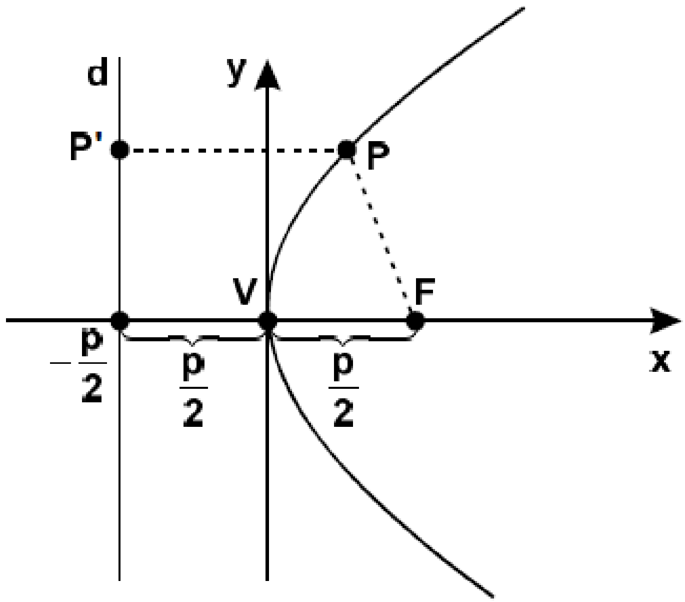
p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$).

reta VF: eixo de simetria da parábola.

LATUS RECTUM: é a corda AA' que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria. Também chamada de corda focal mínima.

11.1.1.2 Equações canônicas da parábola

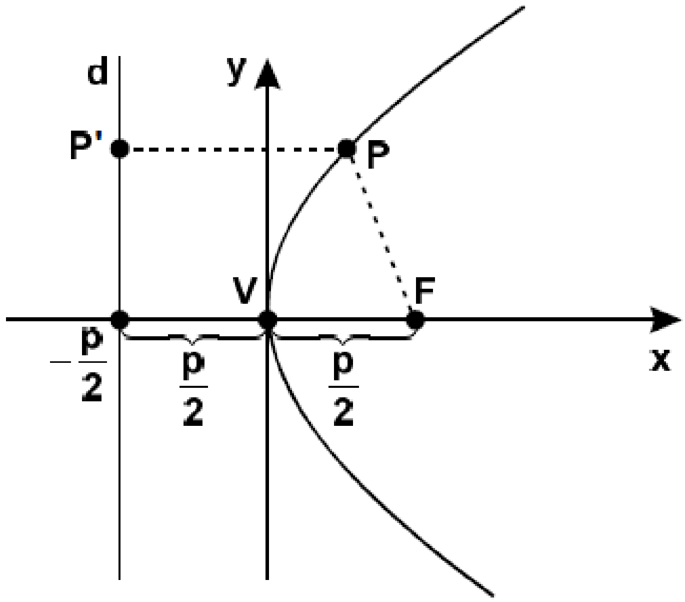
11.1.1.2.1 Eixo de simetria coincide com o eixo x



Na figura tem-se uma parábola de concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy. A diretriz tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

P(x,y) é um ponto genérico da parábola.

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ é o foco. $P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.



Por definição:

$$d(P,F) = d(P,P')$$

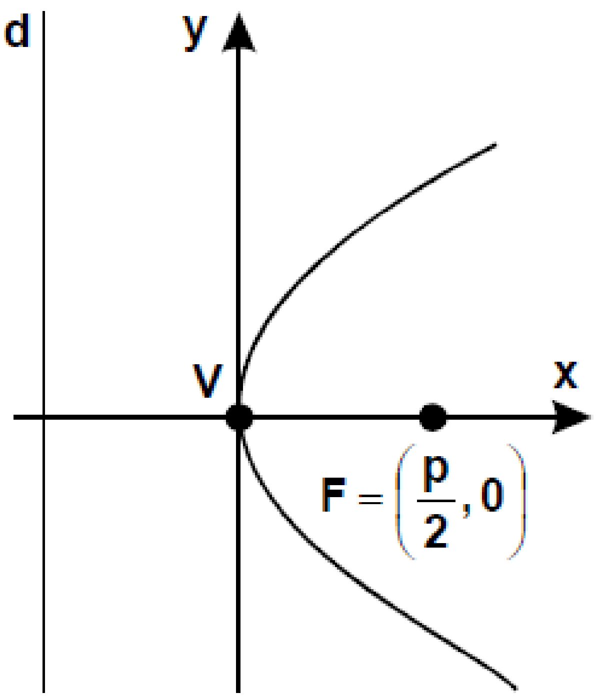
$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}$$

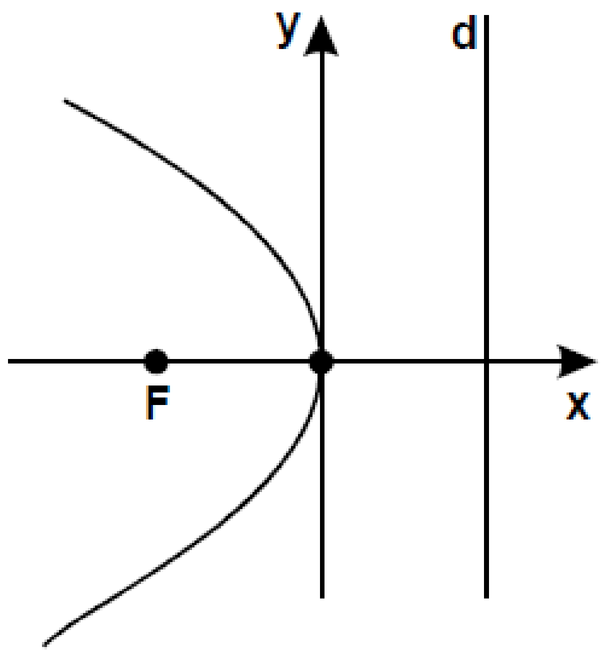
Elevando ambos lados ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$\cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$y^2 = 2px$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x.

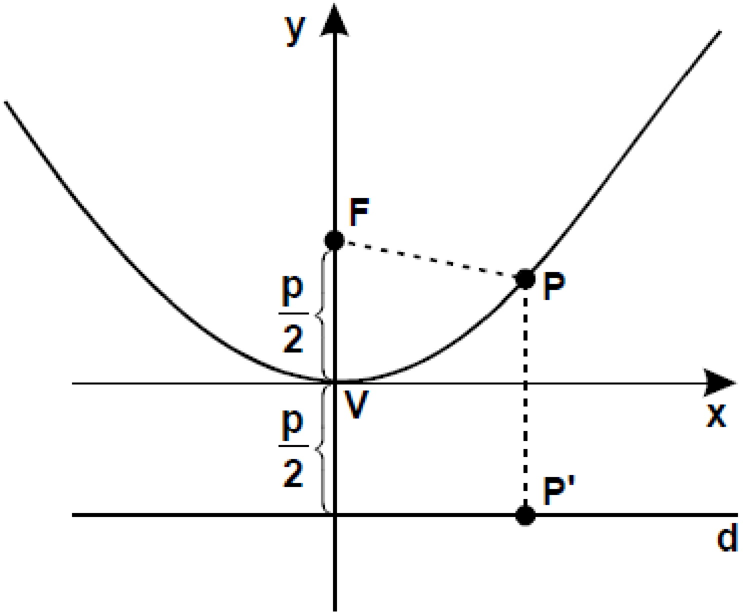




Se p > 0, a parábola tem concavidade voltada para a direita (voltada para a parte positiva do eixo x)

Se p < 0, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

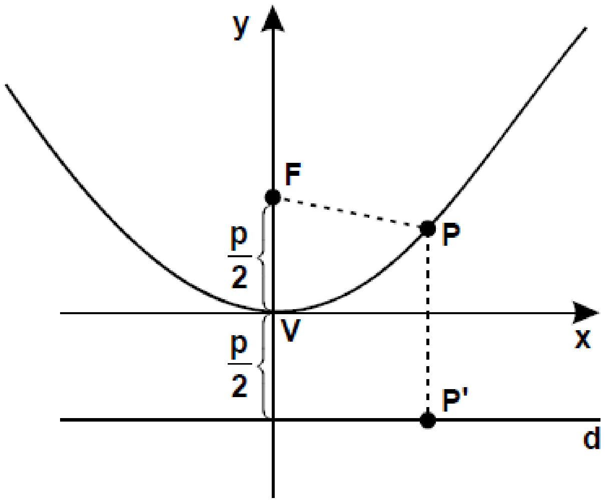
11.1.1.2.2 EIXO DE SIMETRIA COINCIDE COM O EIXO Y



Na figura tem-se uma parábola de concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy. A diretriz tem equação $y = -\frac{p}{2}$.

P(x,y) é um ponto genérico da parábola.

$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ é o foco. $P'\left(x, -\frac{p}{2}\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.



Por definição:

$$d(P,F) = d(P,P')$$

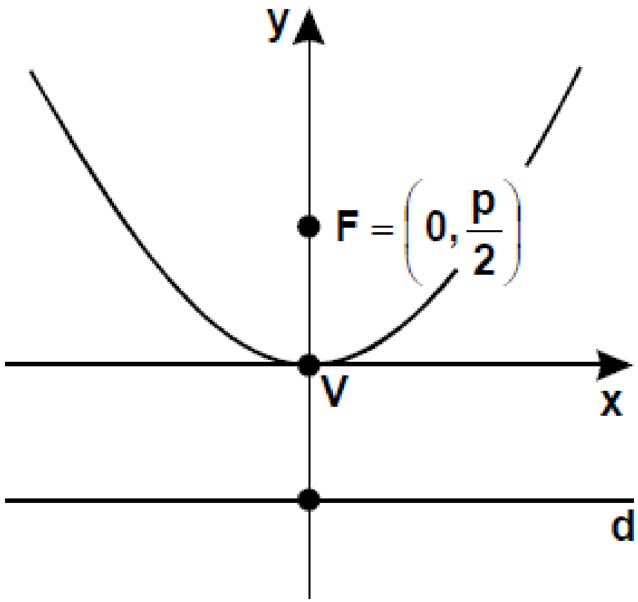
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{p}{2})^2}$$

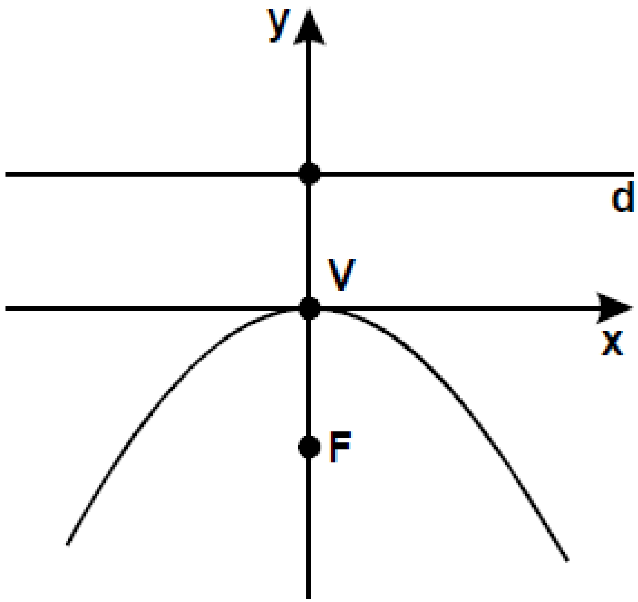
Elevando ambos lados ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$x^2 + \cancel{y^2} - py + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{y^2} + py + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$x^2 = 2py$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y.





Se p > 0, o parábola tem concavidade voltada para cima (voltada para a parte positiva do eixo y).

Se p < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

11.1.1.3 Identificação de uma parábola

a) Uma equação do tipo $Ax^2+By=0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo y.

b) Similarmente uma equação do tipo $Ay^2+Bx=0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo x.

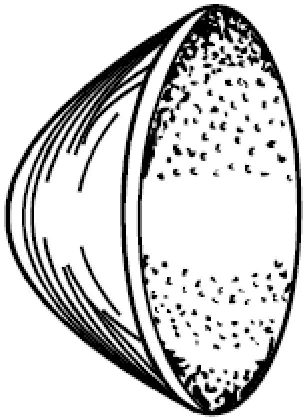
c) O eixo de simetria da parábola é homônimo à variável do 1º grau. Por exemplo:

1) A equação $y^2=-5x$ (ou $y^2+5x=0$) representa uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo x e concavidade voltada para a esquerda.

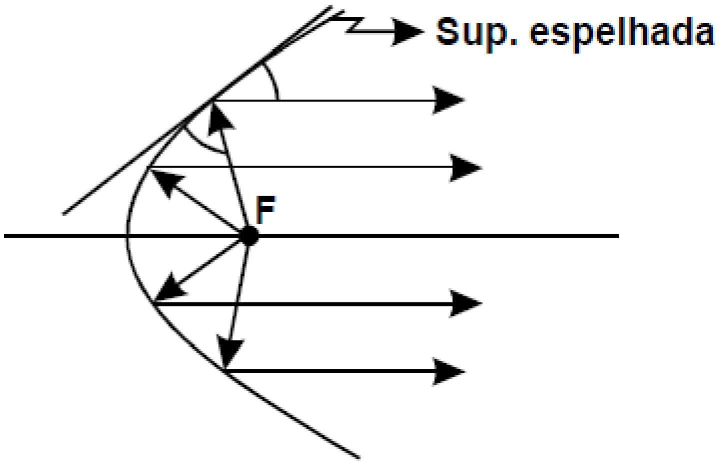
2) A equação $x^2=3/2\ y$ (ou $2x^2-3y=0$) representa uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo y e concavidade voltada para cima.

11.1.1.4 Aplicações práticas da parábola

a) A seção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.

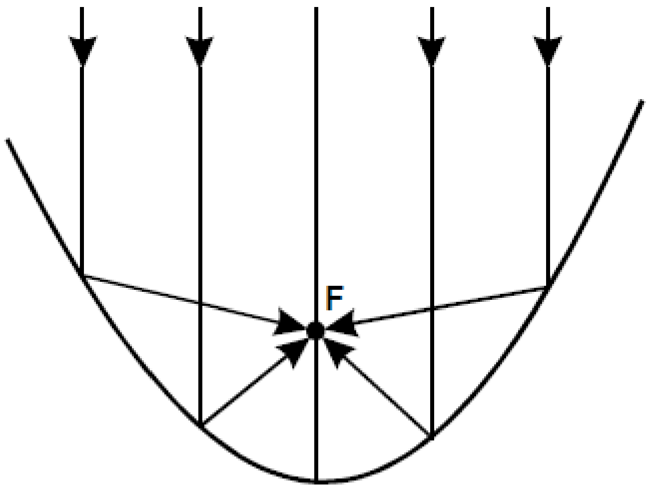


Farol de um automóvel

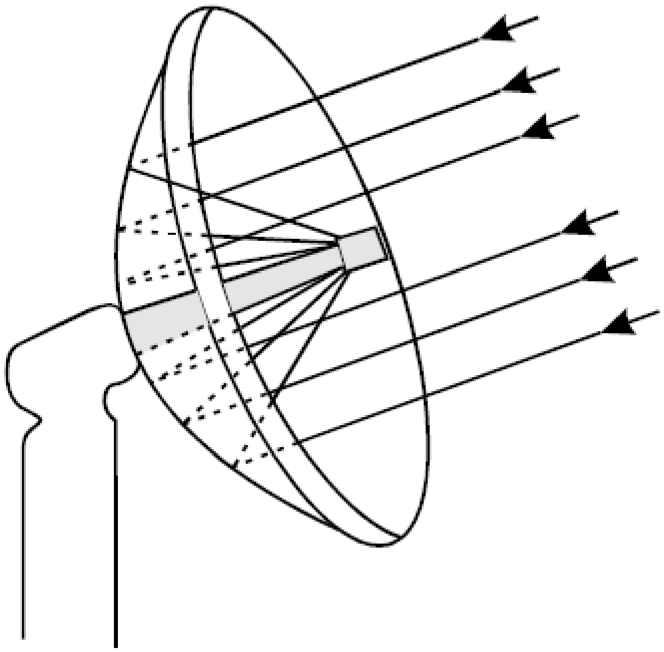


Secção de um farol

b) Se um espelho parabólico é apontado para o sol, os raios de luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Aplica-se o mesmo princípio em telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor.

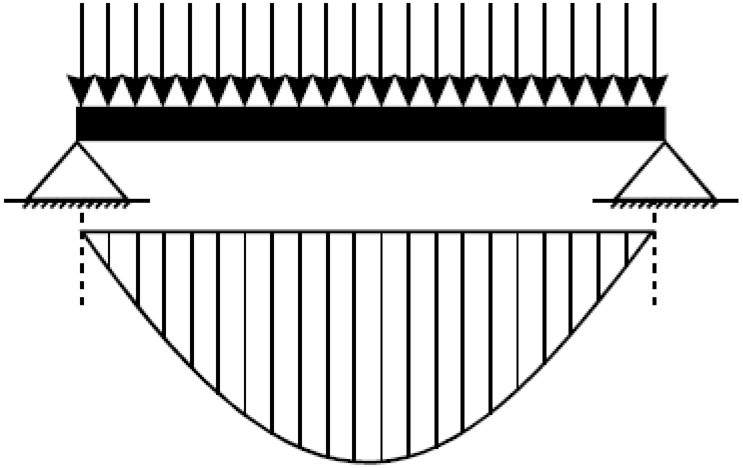


(espelho parabólico)

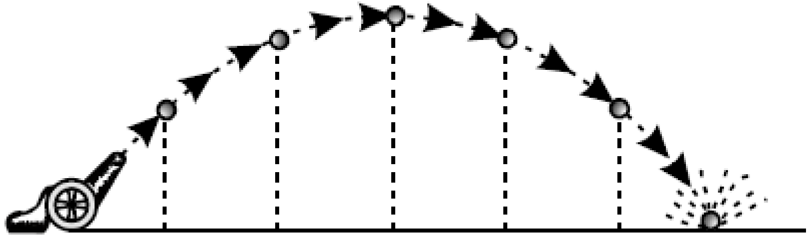


(antena parabólica)

c) Em Resistência dos Materiais, o diagrama do Momento Fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme é uma parábola.

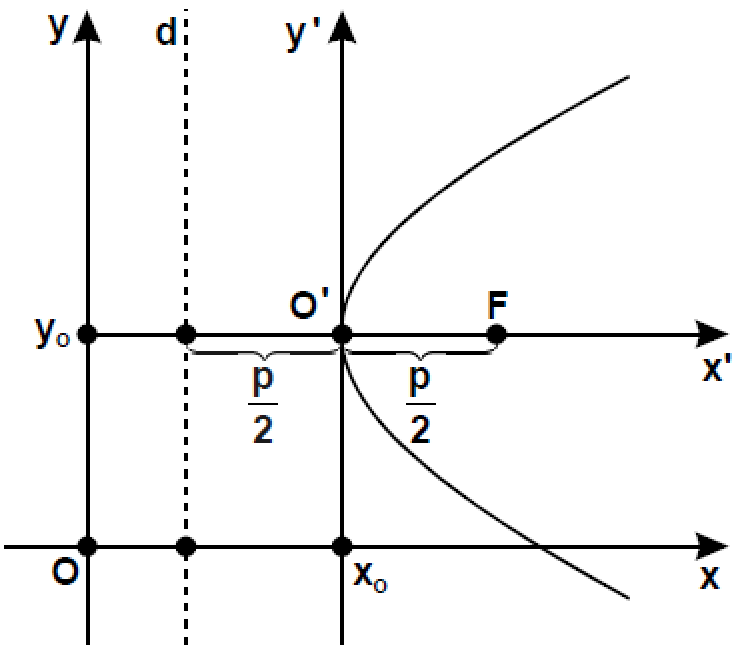


d)Em balística, quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, a trajetória é uma parábola.



11.1.1.5 Equações da parábola $O'=(x_0,y_0)$

11.1.1.5.1 Eixo de simetria é paralelo ao eixo dos x



Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema x'O'y', cuja origem O' coincide com o vértice $V=(x_0,y_0)$.

Face o exposto, a equação da parábola

Referida ao novo sistema é:

$$y'^2 = 2px' \qquad (1)$$

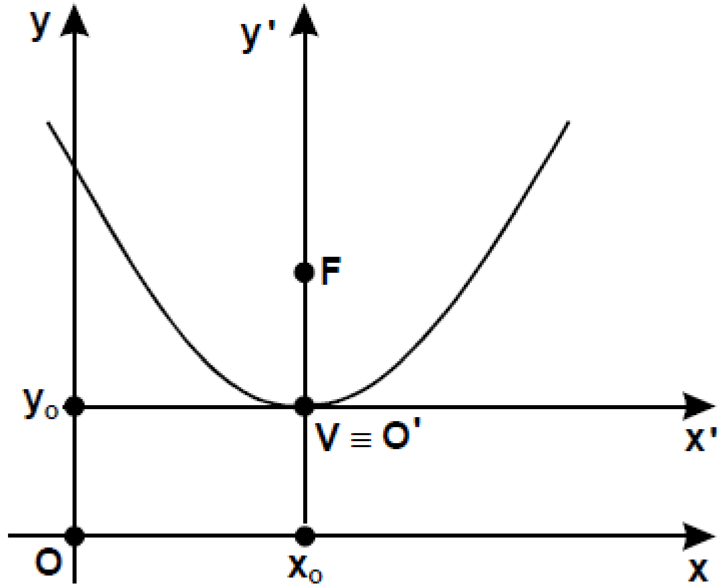
Contudo, pelas fórmulas de translação:

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ ⇨ forma padrão da equação

11.1.1.5.2 EIXO DE SIMETRIA É PARALELO AO EIXO DOS Y



Analogamente, a parábola de cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y tem a forma:

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

11.1.1.5.3 Equação da parábola na forma explícita

Sabemos que a equação de uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ e eixo paralelo ao eixo dos y tem a forma padrão:

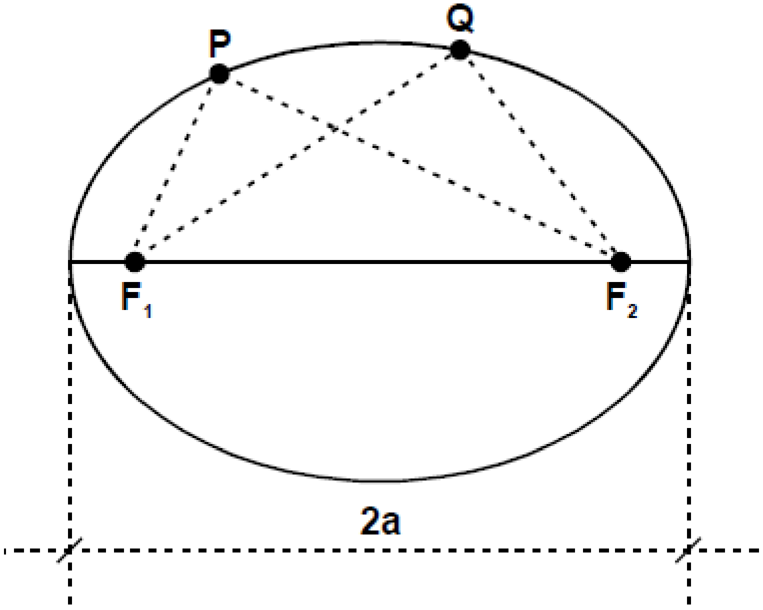
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Conhecendo x_0, y_0, p e explicitando y nessa equação teremos uma equação apresentada sob a forma:

$y = ax^2 + bx + c$ ⇨ forma explítica da equação da parábola

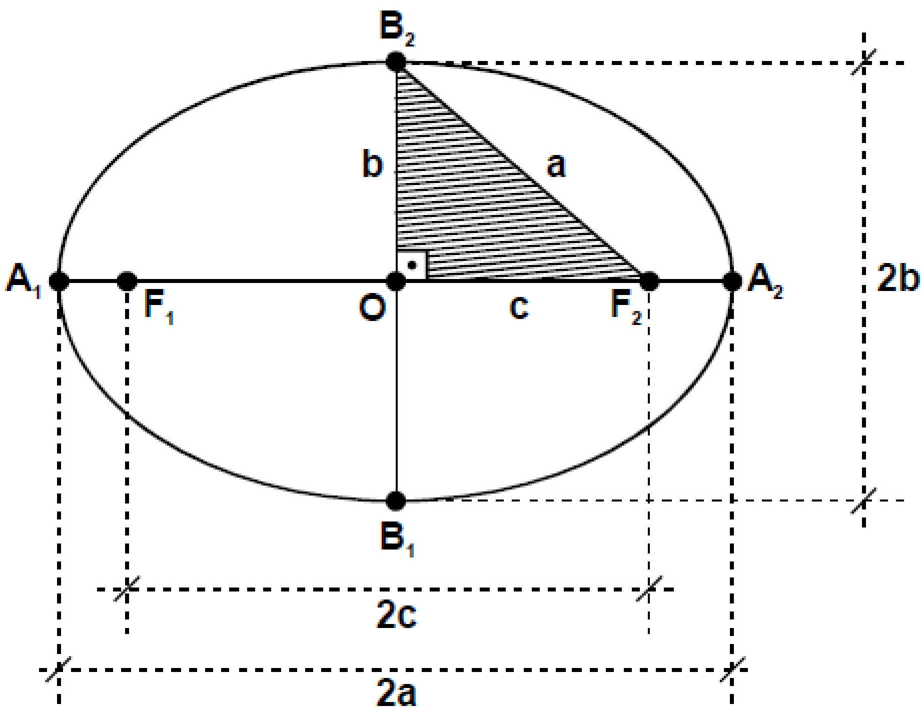
11.1.2 Elipse

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F1 e F2 (focos) do mesmo plano é uma constante (2a), onde $2a > d(F_1, F_2)$.



$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \text{ e}$$
$$d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$$

11.1.2.1 Elementos da elipse



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2, B_1, B_2: vértices da elipse.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo menor: é segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na figura, obtemos a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \qquad (3)$$

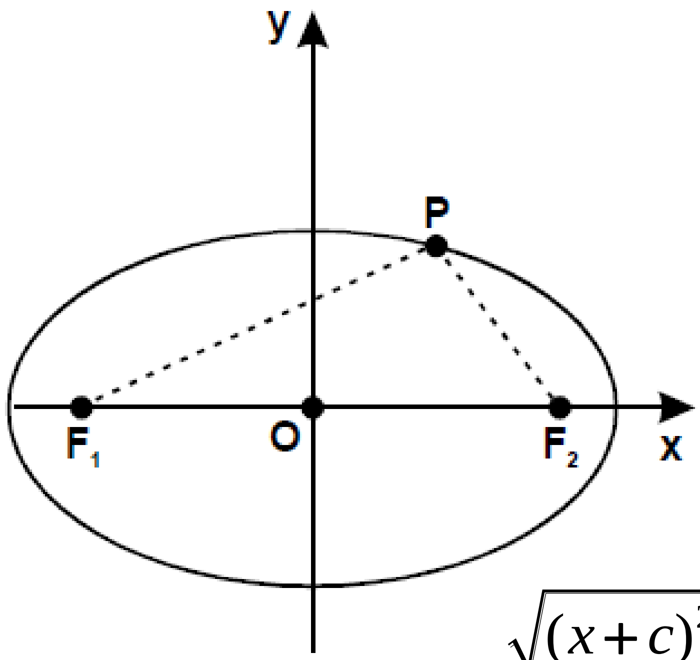
Excentricidade : é o número dado por:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

como c<a, $0 < \varepsilon < 1$

11.1.2.2Equações canônicas da elipse

11.1.2.2.1 O eixo maior coincide com o eixo x



Sejam:

P(x,y) um ponto genérico da elipse.

$F_1(-c,0)$

$F_2(c,0)$

Por definição:

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=(2a)^2-2\times 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+(\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2})-(\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2})$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\cancel{4}a^2-\cancel{4}cx$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-cx\right)^2$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2cxa^2+c^2x^2$$

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2$$

$$a^2x^2 \cancel{-2cxa^2} + a^2c^2 + a^2y^2 \cancel{+2cxa^2} - c^2x^2 = a^4$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

De (3):

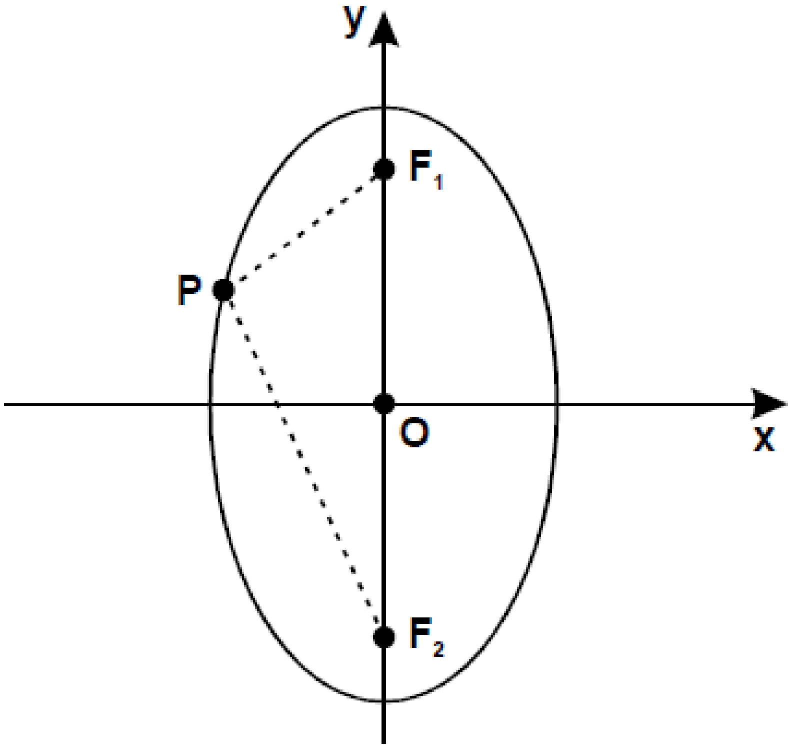
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da elipse de centro na origem e focos sobre o **eixo x**.

11.1.2.2.2 O eixo maior coincide com o eixo y



Na figura tem-se:

$F_1(0,c)$

$F_2(0,-c)$

De forma análoga demonstra-se que para um ponto P(x,y) pertencente à elipse tem-se a equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da elipse de centro na origem e focos sobre o **eixo y**.

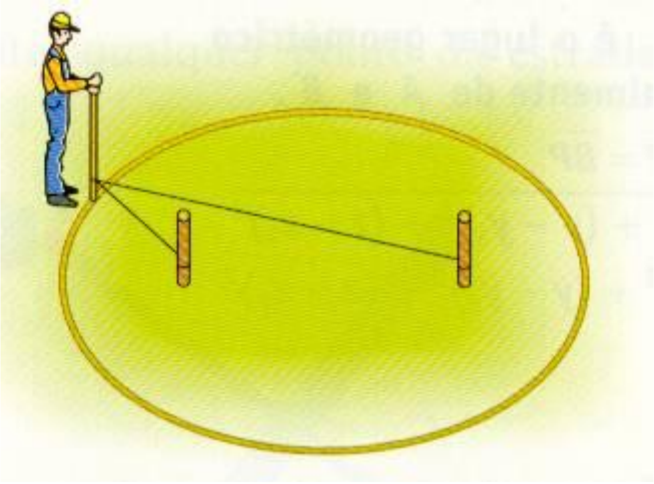
Aqui cabe um destaque: na equação canônica a é a medida do semieixo maior e a^2 representa o maior dos denominadores. Se o número a^2 de denominador de:

x^2 ⇨ focos estão sobre o eixo x;

y^2 ⇨ focos estão sobre o eixo y;

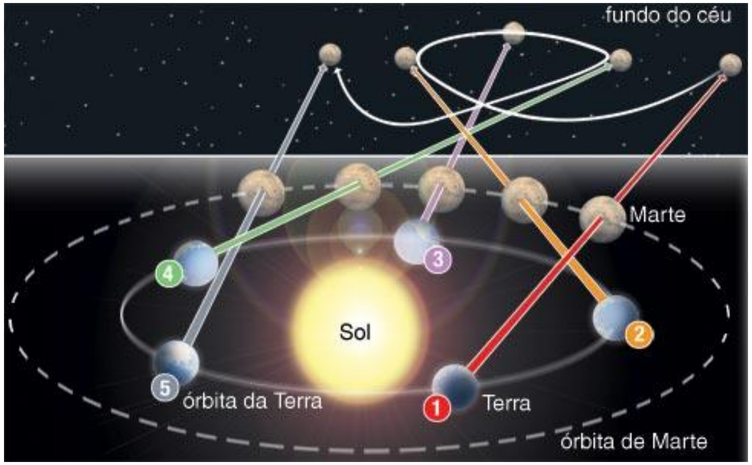
11.1.2.3 Construção de uma elipse

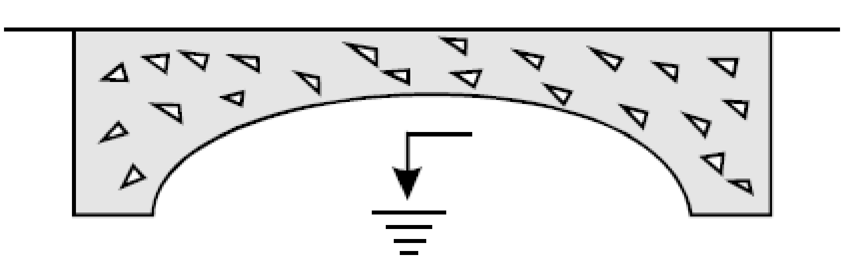
Segundo o Método do Carpinteiro ou do Jardineiro (para dar forma aos canteiros), sobre uma tábua crava-se dois pregos e fixa-se os extremos de um barbante de comprimento 2a, nos dois pregos (focos). Estira-se o barbante com o lápis e se move até uma volta completa, sempre com o barbante esticado.



11.1.2.4 Aplicações práticas da elipse

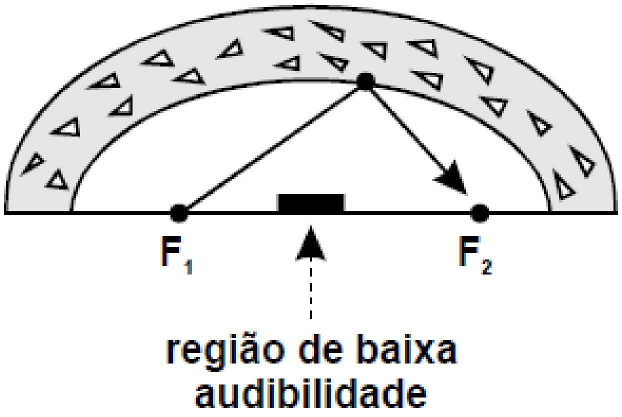
a) A trajetória dos planetas ao redor do Sol não é circular e sim elíptica. No caso da Terra, os semieixos são a=153.493.000km e b=153.454.000km.





b) Arcos em forma de semielipse são muito empregado nas construções de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos).

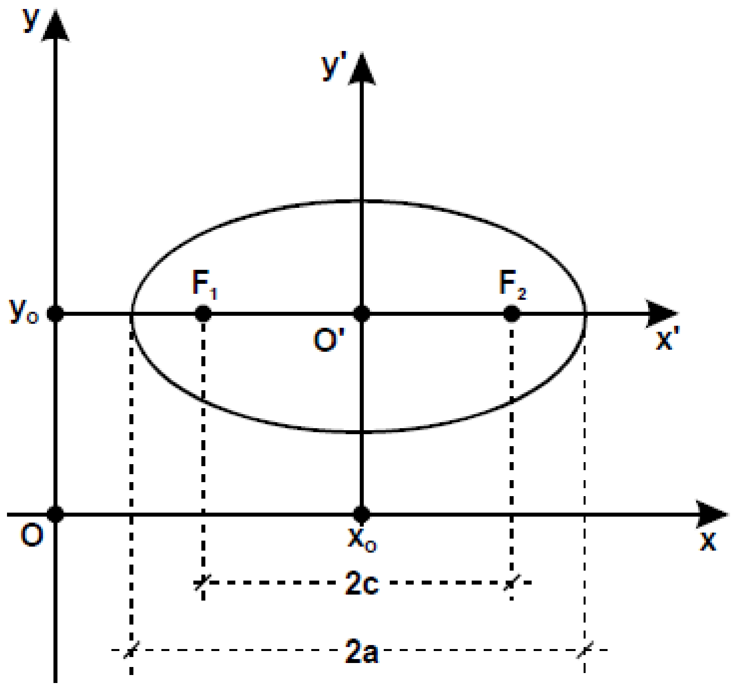
c)O monumento arquitetônico mais portentoso da Roma Antiga foi o Coliseu. A planta baixa possuía a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188m e o menor 156m.



d)Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serão praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.

11.1.2.5 Equações da elipse cujo centro é $O'=(x_0,y_0)$

11.1.2.5.1 Eixo maior é paralelo ao eixo x



Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema x'O'y', cuja origem O' coincide com o centro da elipse.

A equação da elipse referida ao novo sistema é:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

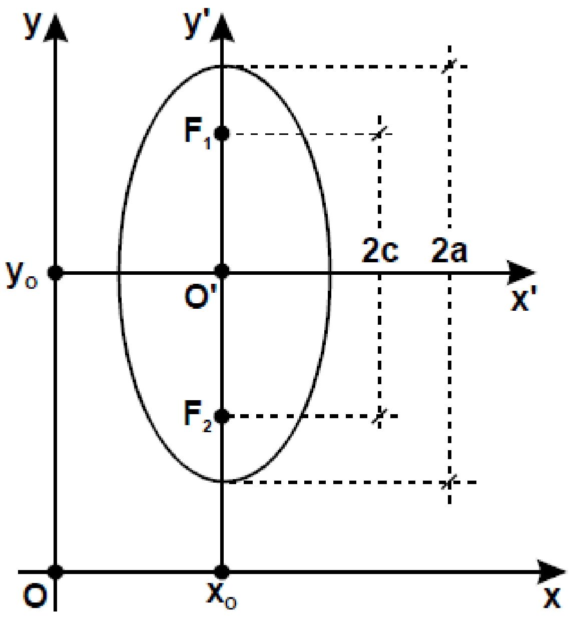
Levando (2) e (4):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é O'(x_0,y_0) e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo x.

11.1.2.5.2 EIXO MAIOR É PARALELO AO EIXO DOS Y

Adotando um raciocínio similar ao caso anterior, se terá a equação da elipse:

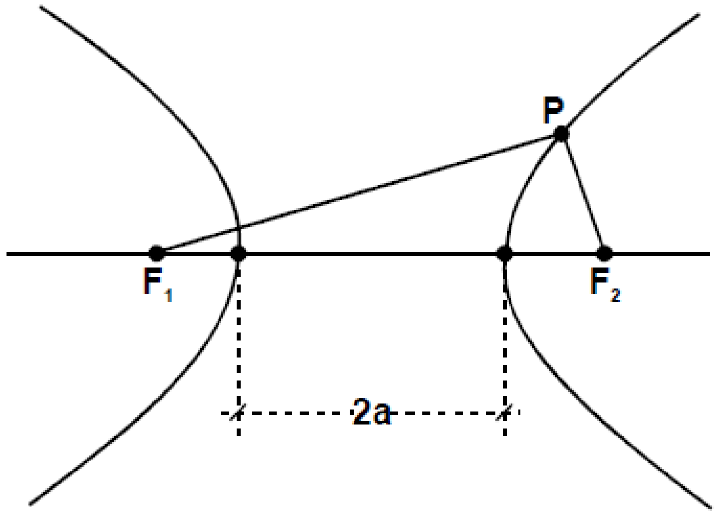


$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é $O'(x_0,y_0)$ e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo y.

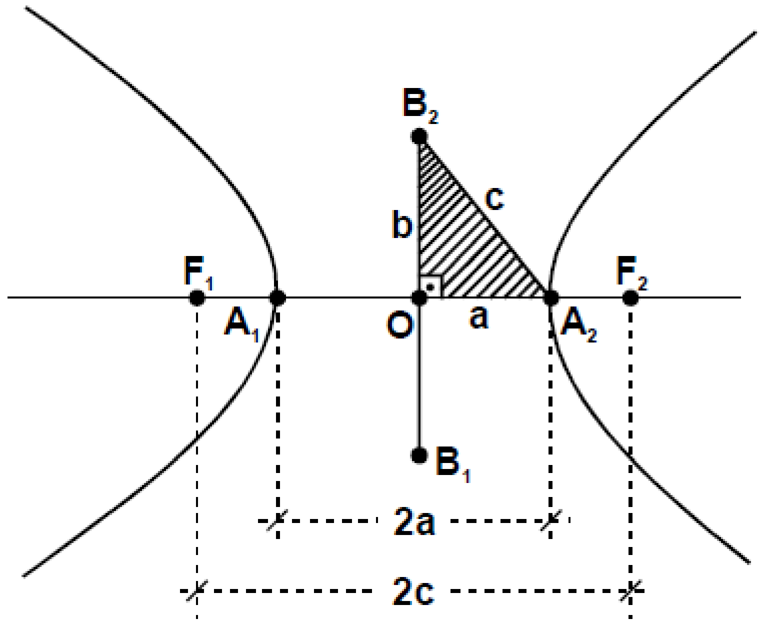
11.1.3 Hipérbole

É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o valor de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos), do mesmo plano, é uma constante (2a), onde $2a<d(F_1, F_2)$. A hipérbole é uma curva com dois ramos e o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que adotemos a diferença entre a maior e a menor distância.



$$\left| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right| = 2a$$

11.1.3.1 Elementos da hipérbole



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2: vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Do triângulo retângulo A_2OB_2 hachurado na figura, obtemos a relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidade : é o número dado por:

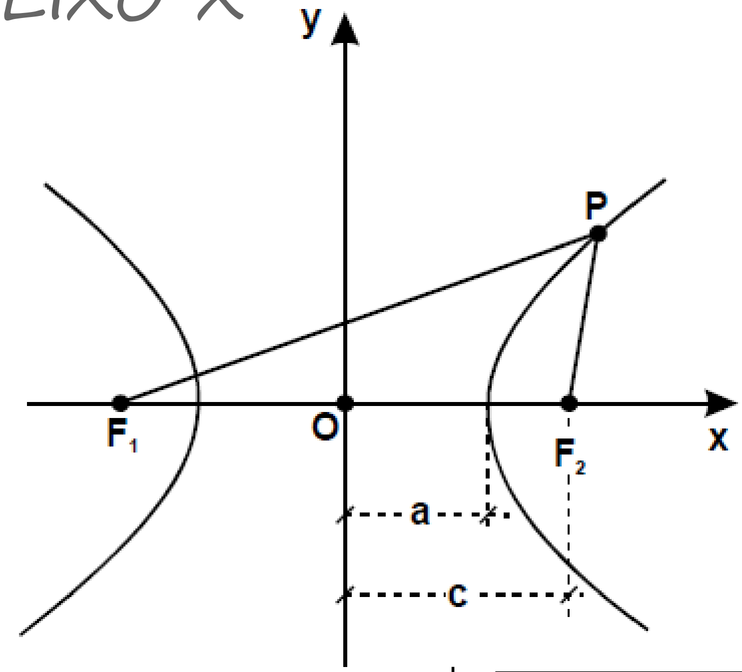
$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

como c e a são positivos e c>a, $\varepsilon > 1$

Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole, quanto maior a excentricidade, maior a abertura.

11.1.3.2 Equações canônicas da elipse

11.1.3.2.1 O eixo real coincide com o eixo x



Sejam:

P(x,y) um ponto genérico da hipérbole.

$F_1(-c,0)$

$F_2(c,0)$

Por definição:

$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$

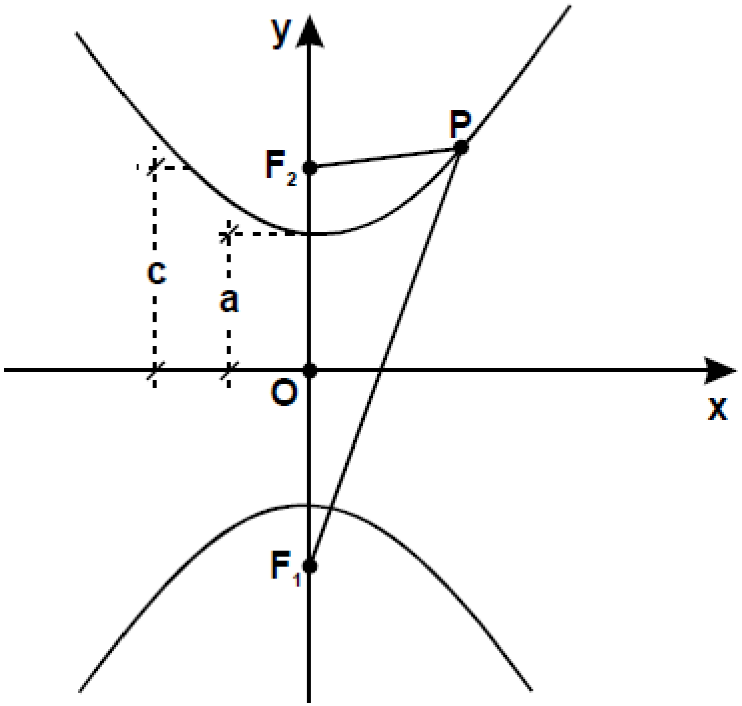
$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right|=2a$$

Agora, empregando as mesmas operações para deduzir a equação da elipse, chegamos à equação:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da hipérbole de centro na origem e eixo real coincidente com o **eixo x**.

11.1.3.2.2 O EIXO REAL COINCIDE COM O EIXO Y



O posicionamento da hipérbole no sistema cartesiano fornece:

$F_1(0,-c)$

$F_2(0,c)$

De forma análoga demonstra-se que para um ponto P(x,y) pertencente à elipse tem-se a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

equação canônica (reduzida ou padrão) da hipérbole de centro na origem e eixo real coincidente com o **eixo y**.

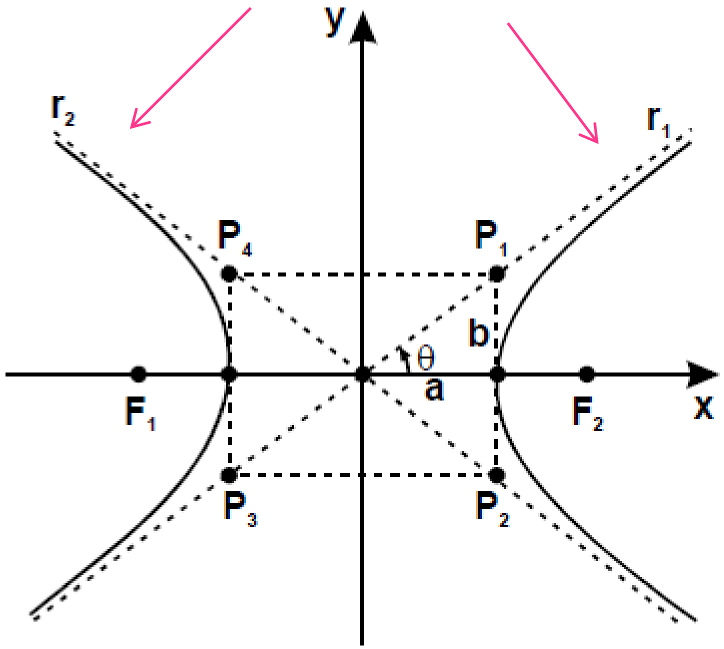
Vale enfatizar que na elipse sempre a>b. Na hipérbole, no entanto, pode-se ter a>b, a=b ou a<b.

Numa hipérbole o eixo real, bem como o eixo focal, coincide com o eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo (se a equação estiver na forma canônica).

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{24}=1 \Rightarrow$$ eixo focal coincide com o eixo x;

$$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{8}=1 \Rightarrow$$ eixo focal coincide com o eixo y;

11.1.3.3 Assíntotas da hipérbole



As assíntotas são excelentes guias para se traçar o gráfico da hipérbole: o esboço adequado de uma hipérbole pode ser feito traçando-se inicialmente o retângulo e as retas que contêm as diagonais (assíntotas). O ramo de cada hipérbole tem vértice tangente ao lado do retângulo e "abre-se" a curva tendendo para as assíntotas.

11.1.3.3.1 Cálculo das equações das assíntotas

Como as duas assíntotas acima figuradas passam pela origem, são retas do tipo:

$$y = \pm mx$$

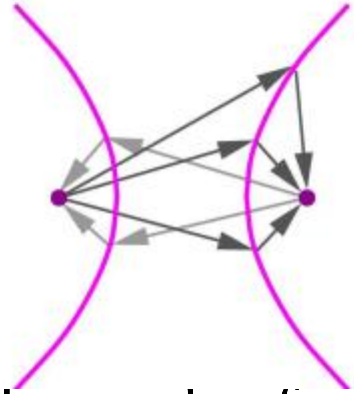
mas:

$$m = tg\boldsymbol{\theta} = \frac{b}{a}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

11.1.3.4 Aplicações práticas da hipérbole

a) A hipérbole também tem uma propriedade reflexiva interessante, semelhante à da elipse: se uma fonte de luz ou som está em um dos focos, então as ondas de luz ou sonoras incidirão no outro ramo da hipérbole, refletindo no seu foco.



Raios que saem de um dos focos e incidem no outro ramo da hipérbole convergem no outro foco.

b) O estrondo de um avião supersônico é um cone que segue o avião. A intersecção deste cone com a superfície do solo é uma hipérbole. Pessoas situadas ao longo da hipérbole ouvem o barulho ao mesmo tempo.

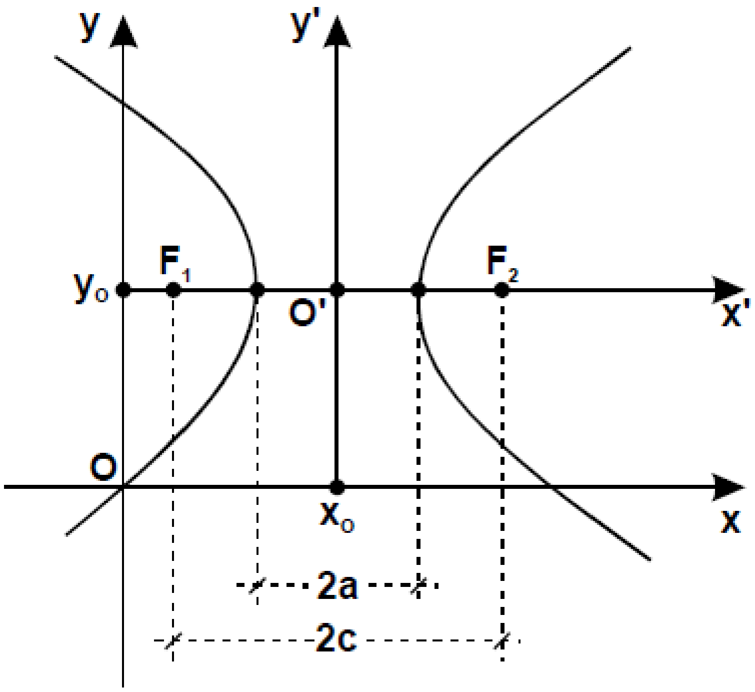
c)O sistema de navegação LORAN (Long Range Navegation – Navegação de longo curso) utiliza as propriedades da hipérbole, o radar e os sinais de pares de estações de rádio para localizar a posição de um navio. As ondas concêntricas dos sinais das estações se interceptam em hipérboles.

d)O sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F1 e F2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t1 e t2 segundos, respectivamente. A diferença entre t1 e t2 determina 2a e assim obtêm a característica da hipérbole na qual está P.
e)Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: O sistema RADUX (de baixíssima frequência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

f)O planetário St. Louis é um exemplo de construção em forma de hiperbolóide.

11.1.3.5 Equações da hipérbole cujo centro é $O'=(x_0,y_0)$

11.1.3.5.1 Eixo real é paralelo ao eixo x



A equação da hipérbole referida ao novo sistema x'O'y' é:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Como há translação de eixos:

$$x'=x-x_0$$

$$y'=y-y_0$$

A equação fica:

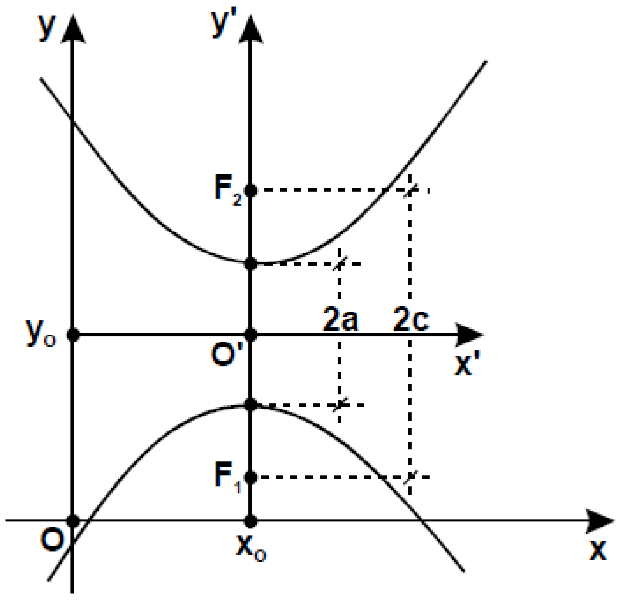
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é O'(x_0,y_0) e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo x.

11.1.3.5.2 EIXO REAL É PARALELO AO EIXO DOS Y

Adotando um raciocínio similar ao caso anterior, se terá a equação da hipérbole:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$



que representa a equação canônica da hipérbole cujo centro é O’(x_0,y_0) e cujo eixo real é paralelo ao eixo y.

11.2. Transformações de coordenadas no $\mathbb{R}^2$

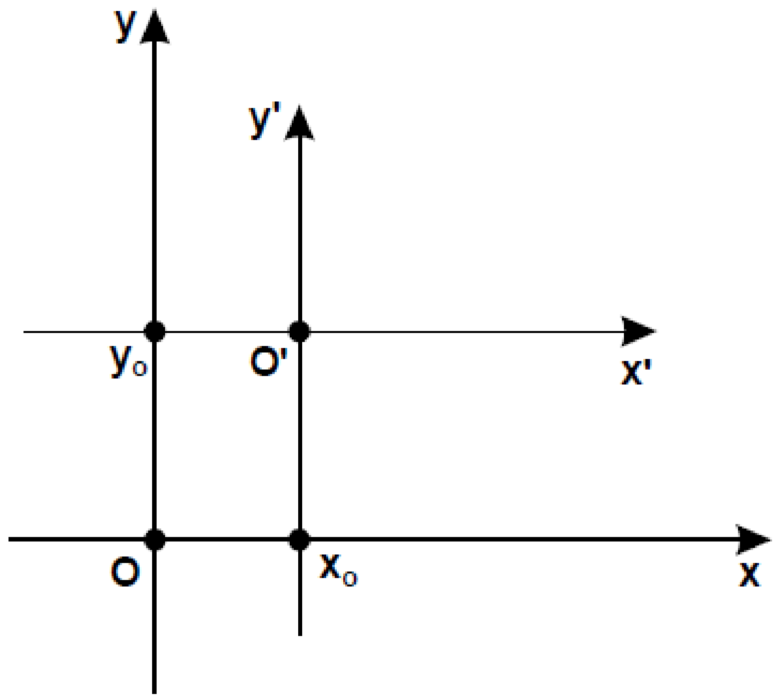
Uma vez conhecidas as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um certo sistema de referência, trataremos neste item das novas coordenadas do ponto ou da nova equação da curva em relação a um novo sistema de referência.

$$f(x, y) \rightarrow F(x', y')$$

$$xOy \rightarrow x'O'y'$$

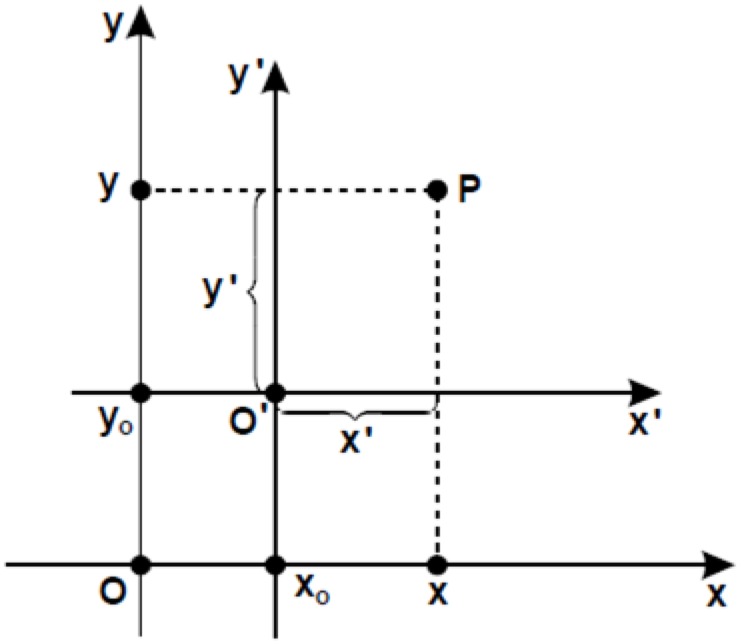
Este novo sistema é obtido através de uma translação de eixos. Essa transformações de coordenadas não afeta a forma da curva ou do gráfico, e sim há alteração na equação da curva.

11.2.1 Translação dos eixos



No plano cartesiano xOy considere um ponto $O' = (x_o, y_o)$. Introduza um **novo** sistema x'O'y' tal que O' seja a nova origem e o eixo O'x' tenha a mesma direção e sentido de Ox e O'y' tenha a mesma direção e sentido de Oy.

Dizemos que o **novo** sistema x'O'y' foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema xOy. Em ambos os sistemas se conservam as unidades demedida.



Um ponto P do plano tem coordenadas:

* x e y em relação ao sistema xOy.

* x' e y' em relação ao sistema x'O'y'.

Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \end{aligned}}$$

11.2.2 Exemplo

A principal finalidade de transformação de coordenadas é modificar a forma das equações. Por exemplo, seja a parábola de equação $x'^2 = 4y'$ referida ao sistema x'Oy'.

Se tivermos $x_0 = 3$ e $y_0 = 2$, isto é, $O'(3,2)$, e sabendo que:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

a equação desta parábola em relação ao sistema xOy é:

$$(x-3)^2 = 4(y-2)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4y - 8$$

$$x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x'^2 = 4y'$$