Editora
UFPel

Textos Selecionados sobre
Lógica II

Kherian Gracher
(Organizador)

DISSERTATIO
FILOSOFIA

TEXTOS SELECIONADOS SOBRE LÓGICA II

SÉRIE INVESTIGAÇÃO FILOSÓFICA

TEXTOS SELECIONADOS SOBRE LÓGICA II

Kherian Gracher
(Organizador)

Pelotas, 2024.

Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Filosofia
Núcleo de Ensino e Pesquisa em Filosofia
Editora da Universidade Federal de Pelotas

NEPFil online
Rua Alberto Rosa, 154 – CEP 96010-770 – Pelotas/RS

Primeira publicação em 2024 por NEPFil online e Editora da UFPel.

Dados Internacionais de Catalogação

N123 Textos selecionados sobre Lógica II.
[recurso eletrônico] Organizador: Kherian Gracher – Pelotas: NEPFIL Online, 2024.

248p. - (Série Investigação Filosófica).

Modo de acesso: Internet
<wp.ufpel.edu.br/nepfil>
ISBN: 978-65-998643-3-9

1. Lógica. 2. Raciocínio I. Gracher, Kherian.

COD 100

NEPFIL online

Editora associada à CBL Câmara Brasileira do Livro

Série Investigação Filosófica

A Série Investigação Filosófica, uma iniciativa do ***Núcleo de Ensino e Pesquisa em Filosofia*** do Departamento de Filosofia da UFPel e do ***Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica*** do Departamento de Filosofia da UNIFAP, sob o selo editorial do NEPFil online e da Editora da Universidade Federal de Pelotas, tem por objetivo precípuo a publicação da tradução para a língua portuguesa de textos selecionados a partir de diversas plataformas internacionalmente reconhecidas, tal como a *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (https://plato.stanford.edu/), por exemplo. O objetivo geral da série é disponibilizar materiais bibliográficos relevantes tanto para a utilização enquanto material didático quanto para a própria investigação filosófica.

ORGANIZADOR DO VOLUME

Kherian Gracher (UFRJ)

TRADUTORES E REVISORES

Matheus Rui (UFSC)
Silvio Kavetski (UFSC)
Sofia Abelha Meirelles (Universidade de Viena)
Vitor M. Costa (UFSC)

CRÉDITOS DA IMAGEM DE CAPA. Disponível em:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C_Octaves_-_Reflexions_13.jpg?uselang=pt-br

Sumário

Sobre a série Investigação Filosófica

A *Série Investigação Filosófica* é uma série de livros de traduções de verbetes da Enciclopédia de Filosofia da Stanford (*Stanford Encyclopedia of Philosophy*), que intenciona servir tanto como material didático para os professores das diferentes subáreas e níveis da Filosofia quanto como material de estudo para a pesquisa e para concursos da área. Nós, professores, sabemos o quão difícil é encontrar bom material em português para indicarmos. E há uma certa deficiência na graduação brasileira de filosofia, principalmente em localizações menos favorecidas, com relação ao conhecimento de outras línguas, como o inglês e o francês. Tentamos, então, suprir essa deficiência, ao introduzirmos essas traduções ao público de língua portuguesa, sem nenhuma finalidade comercial e meramente pela glória da filosofia.

Essas traduções foram todas realizadas por filósofos ou por estudantes de filosofia supervisionados e revisadas por especialistas na área. Todas as traduções de verbetes da Stanford foram autorizadas pelo querido Prof. Dr. Edward Zalta, editor da Enciclopédia de Filosofia da Stanford; por isso o agradecemos imensamente. Sua disposição para ajudar brinda os países de língua portuguesa com um material filosófico de excelência, que será para sempre disponibilizado gratuitamente no site da Editora da Universidade Federal de Pelotas (Editora UFPel), dado o nosso maior princípio se fundar na ideia de conhecimento livre e a nossa maior intenção ser o desenvolvimento da filosofia em língua portuguesa e do seu ensino. Aproveitamos o ensejo para agradecer também ao editor da Editora UFPel, na figura do Prof. Dr. Juliano do Carmo, que apoiou nosso projeto desde o início. Agradecemos também a todos os organizadores, tradutores e revisores, que participam de nosso projeto. Sem sua dedicação voluntária, nosso trabalho não teria sido possível. Esperamos, com o início desta coleção, abrir as portas para o crescimento desse projeto de tradução e trabalharmos em conjunto pelo crescimento da filosofia em português.

Prof. Dr. Rodrigo Reis Lastra Cid
Prof. Dr. Juliano Santos do Carmo
Editores da Série Investigação Filosófica

Introdução

Lógica, Lógicas, Filosofia da Lógica e Lógicas Filosóficas

Historicamente, o estudo da Lógica referia-se, de maneira geral, ao estudo de um sistema de lógica em particular: a clássica. A lógica clássica, que inclui tanto a lógica proposicional quanto suas extensões, como a lógica de predicados, dominou o cenário filosófico e matemático por séculos – inicialmente em suas versões mais tradicionais, como a lógica silogistica aristotélica, até suas formalizações mais contemporâneas, desenvolvida por Frege. Contudo, ao longo do século XX, o campo foi ampliado com a introdução de diversos sistemas ditos "não-clássicos", como a lógica intuicionista, a lógica paraconsistente e outras. Esses desenvolvimentos tornaram clara a distinção entre a Lógica, como uma área de estudo, e as lógicas, como sistemas formais particulares, que podem ser consideravelmente diferentes.

A Lógica, como campo de investigação, permeia hoje uma vasta gama de interesses, que incluem matemática, filosofia e ciência da computação. Isso é evidenciado pela classificação de Lógica na *American Mathematical Society* (AMS), onde a área é categorizada de maneira abrangente e específica. Por exemplo, no sistema de classificação da AMS, a Lógica está listada sob a seção 03-XX, com subdivisões que incluem teoria dos conjuntos, teoria da prova, teoria da recursão e teoria dos modelos, ilustrando a amplitude do campo e seu entrelaçamento com questões matemáticas fundamentais. Ou seja, a Lógica é tratada como um campo central para a matemática, com inúmeras subáreas que exploram desde os fundamentos até aplicações mais específicas.[1]

Por outro lado, estudar sistemas lógicos, entendidos como sistemas formais particulares, pode ser visto, à primeira vista, como meramente estudar uma ferramenta matemática. No entanto, essa visão limitada é insuficiente para captar a verdadeira importância da Lógica para a filosofia. A partir daqui, podemos estabelecer a distinção entre a filosofia da lógica e a lógica filosófica.

A filosofia da lógica investiga a Lógica como um objeto de estudo filosófico, analisando

[1] A classificação completa pode ser vista em https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html

questões fundamentais sobre o que é a consequência lógica, a validade e como as inferências funcionam. Aqui, o foco recai sobre a natureza dos conectivos lógicos, as condições sob as quais uma proposição segue logicamente de outra, e se há ou não uma única lógica verdadeira. Trata-se de uma reflexão metódica e teórica sobre os fundamentos da lógica, em um esforço para compreender como os sistemas lógicos são estruturados e por que são válidos.

Por outro lado, a lógica filosófica utiliza sistemas lógicos como ferramentas para lidar com problemas filosóficos. Isto é, em vez de investigar a lógica em si, a lógica filosófica aplica diversos sistemas formais, como a lógica modal, a lógica epistêmica, a lógica temporal e a lógica deôntica, em questões filosóficas práticas. Esses sistemas expandem as possibilidades de investigação, permitindo aos filósofos lidar com problemas de epistemologia, ética, ontologia e outros campos. Um exemplo disso é o uso da lógica modal para estudar noções como necessidade e possibilidade, ou o emprego da lógica epistêmica para formalizar discussões sobre conhecimento e crença.

Embora a filosofia da lógica e a lógica filosófica abordem a lógica de maneiras distintas, ambas são complementares. A filosofia da lógica é essencial para o entendimento crítico e rigoroso da estrutura da inferência, enquanto a lógica filosófica permite que diferentes sistemas lógicos sejam usados como ferramentas para explorar temas filosóficos. Esse diálogo entre teorias abstratas e aplicações práticas é o que torna o campo da lógica tão dinâmico e relevante para a filosofia contemporânea.

A Formação Lógico-Filosófica Brasileira

No Brasil, a formação em lógica, especialmente em cursos de graduação em Filosofia, tende a concentrar-se majoritariamente na lógica clássica, tanto em sua forma proposicional quanto em sua versão de predicados. Embora esses sistemas sejam fundamentais, eles representam apenas uma parte do vasto universo de sistemas lógicos que são amplamente utilizados nos debates contemporâneos. A lógica epistêmica, por exemplo, que trata formalmente de conceitos como conhecimento e crença, é crucial para a análise de problemas filosóficos relacionados à epistemologia, teoria dos jogos e inteligência artificial. De forma semelhante, a lógica temporal nos auxilia quanto aos raciocínios sobre eventos ao longo do tempo, formalizando noções como mudança e persistência, oferecendo ferramentas importantes para o estudo de questões em metafísica e filosofia da ciência. Já a lógica deôntica, voltada para a normatividade, trata de obrigações, permissões e proibições, sendo amplamente usada em ética e filosofia do direito para modelar questões relacionadas a moralidade e legalidade.

A importância de aprender esses sistemas vai além de uma mera questão técnica. Eles fornecem as bases teóricas para muitas discussões filosóficas em nível internacional, permitindo que os estudantes dialoguem com desenvolvimentos mais recentes na filosofia, matemática e ciência da computação. Sem esse conhecimento, os estudantes brasileiros ficam restritos a uma formação lógica incompleta, o que limita seu engajamento com os debates mais avançados da disciplina.

Entretanto, um dos principais obstáculos para a disseminação desses sistemas no Brasil é a barreira linguística. Muitos dos textos fundamentais sobre esses sistemas lógicos estão disponíveis apenas em inglês, o que cria um problema significativo, dado que grande parte dos estudantes tem pouco contato com essa língua. Em um cenário ideal, a língua inglesa seria de fácil acesso para todos, tornando essas traduções desnecessárias. Contudo, a realidade é que há uma deficiência notável no conhecimento de línguas estrangeiras entre os estudantes, especialmente em regiões menos favorecidas. Essa barreira linguística não deveria ser um empecilho para o desenvolvimento filosófico. Os estudantes devem ter a oportunidade de acessar textos introdutórios de qualidade, independentemente de sua familiaridade com uma outra língua.

A seleção dos textos traduzidos neste livro visa justamente suprir essa necessidade, oferecendo aos leitores uma introdução sólida a sistemas de lógica filosófica. Ao proporcionar traduções acessíveis e de qualidade, pretendemos preencher essa lacuna no ensino de lógica, ampliando as ferramentas à disposição dos estudantes e permitindo uma formação mais completa e alinhada com os debates filosóficos contemporâneos. Essa série de livros é, portanto, uma resposta direta a essa necessidade de democratizar o acesso ao conhecimento filosófico de ponta em língua portuguesa.

Sobre os Textos

O primeiro texto da seleção, Pluralismo Lógico ("Logical Pluralism", Gillian Russell, tradução de Sofia Abelha Meirelles), trata de uma questão central na filosofia da lógica: a coexistência de diferentes concepções de consequência lógica. O pluralismo lógico desafia a visão monista, segundo a qual existe apenas uma lógica correta para todas as inferências válidas. Ao propor que diferentes lógicas podem ser igualmente legítimas, dependendo do contexto ou das normas que governam a inferência, o texto oferece uma perspectiva inovadora e essencial para que os leitores brasileiros compreendam a flexibilidade e a riqueza do campo da lógica. Isso se torna particularmente importante em um cenário onde, historicamente, a lógica clássica foi ensinada como o único sistema válido.

Saindo da discussão sobre filosofia da lógica, vamos para o tratamento de lógicas filosóficas. No segundo texto, Lógica Epistêmica ("Epistemic Logic", Rasmus Rendsvig e John Symons, tradução de Mateus Rui), apresentamos uma formalização do raciocínio sobre conhecimento e crença, oferecendo um modelo lógico para tratar dessas noções centrais da epistemologia. Em um mundo onde o conhecimento é distribuído entre agentes, a lógica epistêmica oferece ferramentas para modelar o que diferentes indivíduos sabem ou acreditam ser verdade, além de possibilitar o estudo de questões como o conhecimento comum e a introspecção. Esse sistema lógico é de grande relevância tanto para a filosofia quanto para áreas aplicadas como a teoria dos jogos e a inteligência artificial, permitindo aos estudantes compreenderem as bases do raciocínio epistêmico formal.

O terceiro texto, Lógica Temporal ("Temporal Logic", Valentin Goranko e Antje Rumberg, tradução de Vítor M. Costa), aborda as modalidades temporais, permitindo o raciocínio formal sobre eventos que ocorrem ao longo do tempo. A lógica temporal é fundamental para discussões em metafísica, onde questões sobre a natureza do tempo, a mudança e a persistência ocupam um lugar de destaque. Além disso, suas aplicações em filosofia da ciência, especialmente na análise de processos dinâmicos, mostram que este sistema lógico oferece uma poderosa ferramenta para filosofar sobre a mudança e a evolução dos estados de coisas ao longo do tempo.

O quarto e último texto, Lógica Deôntica ("Deontic Logic", Paul McNamara, tradução de Silvio Kavetski), explora o raciocínio normativo, fornecendo uma formalização lógica para noções como obrigação, permissão e proibição. Esse sistema é especialmente útil para aqueles que estudam filosofia moral e filosofia do direito, pois permite modelar e analisar dilemas normativos de maneira rigorosa. A lógica deôntica, portanto, torna-se uma ferramenta indispensável para qualquer estudante que deseje investigar a estrutura das normas e os conflitos éticos de maneira formal.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que contribuíram para a realização deste projeto. Em primeiro lugar, agradeço aos tradutores, Vítor M. Costa, Sofia Abelha Meirelles, Silvio Kavetski e Mateus Rui, que dedicaram seu tempo e esforço para garantir a qualidade das traduções. Além disso, agradeço profundamente aos revisores, Raoni A. Wohnrath, Ederson Safra Melo e Jaaziel de Carvalho Costa, que trabalharam minuciosamente para garantir a precisão e clareza dos textos.

Gostaria de expressar meu agradecimento ao Juliano Santos do Carmo, editor-chefe do NEPFIL/UFPEL, pelo apoio essencial na editoração e diagramação desta série. Sem sua dedicação, este trabalho não teria sido possível.

Também sou grato ao Rodrigo Reis Lastra Cid, representante do grupo Investigação Filosófica, que não apenas lidera este projeto de tradução, mas também é responsável por um trabalho acadêmico mais amplo, incluindo a produção de cursos, periódicos acadêmicos e o grupo de pesquisa Investigação Filosófica.

Por fim, nossos mais sinceros agradecimentos a Edward Zalta, representante da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pela autorização generosa para publicar essas traduções. Sua disposição em permitir que esses textos fundamentais sejam acessíveis a um público de língua portuguesa é uma contribuição inestimável para a disseminação do conhecimento filosófico em nossa região.

Kherian Gracher
Organizador

(I) Pluralismo Lógico[1]

Título Original: Logical Pluralism
Autora: Gillian Russell
Tradução: Sofia Abelha Meirelles
Revisão: Ederson Safra Melo

Pluralismo lógico é a concepção de que existe mais de uma lógica correta. Lógicas são teorias da validade: elas nos dizem, para argumentos diferentes, se um dado argumento tem ou não uma forma válida. Lógicas diferentes discordam sobre quais argumentos possuem forma válida.[2] Por exemplo, lógicas como a Clássica e a lógica forte de Kleene nos dizem que *ex falso quodlibet*, a forma do argumento abaixo, é válida:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \neg A \end{array}}{B}$$

No entanto lógicas Relevantes e outras lógicas Paraconsistentes alegam que essa forma de argumento não é válida. É natural pensar que elas não podem estar todas certas. Se ex falso quodlibet é válida, então lógicas Relevantes e Paraconsistentes não são teorias da va-

[1]RUSSELL, Gillian, "Logical Pluralism", In: ZALTA, E. N. (ed.). Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer Edition. Stanford, CA: The Metaphysics Research Lab, 2021. Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/logical-pluralism. Acesso em: 21 de mar. 2022.
A seguir está a tradução da entrada sobre Pluralismo Lógico de Gillian Russell na Stanford Encyclopedia of Philosophy. A tradução segue a versão da entrada nos arquivos da SEP em https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/logical-pluralism. Esta versão traduzida pode diferir da versão atual da entrada, que pode ter sido atualizada desde o momento desta tradução. A versão atual está localizada em https://plato.stanford.edu/entries/logical-pluralism. Gostaríamos de agradecer aos editores da Stanford Encyclopedia of Philosophy, principalmente o Prof. Dr. Edward Zalta, por concederem permissão para traduzir e publicar esta entrada.
[2]Mais cuidadosamente: seus adeptos as levam a discordar; se essa discordância é genuína ou não é outra questão controversa.

lidade corretas ou, poderíamos dizer, não são lógicas corretas. Alternativamente, se ex falso quodlibet *não* é válida, então a lógica clássica e a lógica forte de Kleene não são corretas. O pluralismo lógico assume várias formas, mas as mais controversas e filosoficamente interessantes alegam que mais de uma lógica pode ser correta, isto é: lógicas L_1 e L_2 podem discordar sobre quais argumentos são válidos, e ambas podem estar acertando as coisas.

Muito do trabalho atual sobre o assunto foi desencadeado por uma série de artigos de JC Beall e Greg Restall (Beall & Restall 2000, 2001; Restall 2002), que culminaram no livro (Beall & Restall 2006). Essa obra gerou uma literatura substancial, incluindo artigos argumentando contra o pluralismo e a favor do monismo lógico, visão de que só pode haver uma Única Lógica Verdadeira.[3] O interesse no debate contemporâneo também levou a um reexame de algumas visões mais antigas, especialmente o pluralismo resultante da famosa tolerância de Carnap por diferentes sistema de referência linguístico e o trabalho do lógico escocês/francês Hugh McColl (1837–1909), que alguns afirmaram ter sido um precursor do pluralismo lógico (Rahman & Redmond 2008). O recente ressurgimento do tema também resultou na proposta de diversas variedades adicionais de pluralismo lógico, algumas das quais são consideradas na seção final abaixo.

1. Pluralismo Lógico Baseado em Casos

Como podem duas lógicas estarem ambas corretas quando discordam sobre quais argumentos são válidos? Uma maneira é se houver mais de uma relação de consequência lógica (e então mais de uma interpretação de 'válido'), assim, uma das lógicas captura validade em um sentido, enquanto sua rival captura validade em outro. Pluralistas geralmente elaboram sobre isso ao sustentar que expressões da linguagem natural como 'se segue de' são inconstantes, vagas ou ambíguas, e podem ser determinadas, tornadas mais precisas ou desambiguadas, por mais de uma maneira (Shapiro 2014, 1-2). A versão mais conhecida dessa perspectiva, por exemplo, é apresentada como a conjunção de duas teses principais (Beall & Restall 2006). Primeiro, a Tese Generalizada de Tarski:

[3] A palavra 'verdadeira' no termo especificado em 'Única Lógica Verdadeira' é mais naturalmente entendida por analogia com a expressão em frases como 'rei verdadeiro', 'amor verdadeiro' ou 'vocação verdadeira'; mais importante ainda, não se pretende restringir-se a objetos que são potenciais portadores das propriedades semânticas familiares de verdade e de falsidade, e significa algo como 'genuíno' ou 'legítimo'.

Tese Generalizada de Tarski (TGT):
Um argumento é válido$_x$ se e somente se em todo caso$_x$ em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

Segundo, a tese de que a expressão 'caso$_x$' na (TGT) pode ser tornada mais precisa em pelo menos dois modos igualmente aceitáveis, resultando em diferentes extensões para 'válidos'. Por exemplo, por 'caso' podemos entender uma interpretação de primeira ordem do tipo que Tarski usa para definir consequência clássica de primeira ordem (Tarski 1983) ou, alternativamente, significar uma situação possível. Outras alternativas incluem interpretações inconsistentes ou completas, do tipo usado em teorias de modelos para lógicas intuicionistas e paraconsistentes. Diferentes escolhas para interpretação de 'caso' irão resultar em diferentes precisões da análise (TGT) de consequência lógica, o que por sua vez pode resultar em diferentes relações de consequência lógica (Beall & Restall 2006, 29–31). Chame essa perspectiva de 'Pluralismo Lógico baseado em casos'.

Pluralistas por casos não precisam defender que todo modo concebível de tornar precisa a TGT define uma relação de consequência lógica. Tipicamente, eles pensam que apenas relações com certas propriedades — e.g. necessidade, normatividade e formalidade — são admissíveis (Beall & Restall 2006, 26–35). Portanto, ter sua extensão dada por um modo de tornar a TGT precisa é apenas uma condição necessária de ser uma relação de consequência lógica genuína.

1.1 O Argumento das Aparências

Um argumento para o pluralismo por casos é o argumento das aparências (Beall & Restall 2006, 30–31). De acordo com esse argumento, o pluralismo é simplesmente diretamente plausível — parece verdadeiro — e portanto deve ser credível na ausência de razões para não acreditar.

Essa abordagem pode parecer surpreendente, dada a presunção do monismo lógico nos escritos da maioria dos lógicos do passado — presumivelmente o pluralismo não parecia correto para eles. Mas talvez uma vez que se considere a TGT explicitamente, aceite a sub-determinação de 'caso' e considere algumas das maneiras pelas quais pode ser mais preciso obter lógicas diferentes, parece claro que haverá múltiplas alternativas de torná-lo mais específico, sem nenhuma destacada como mais correta que outras pelo uso presente. O mais difícil sobre pluralismo lógico, pode-se pensar, foi ver como este poderia ser uma visão coerente, mas uma vez feito o trabalho de desenvolver e apresentar a perspectiva por casos, a posição resultante pode parecer bastante razoável. Será que uma leitora imparcial se sentiria tentada a endossá-lo?

Um problema com esse argumento é que a plausibilidade de uma perspectiva tende a variar com a capacidade do espectador de pensar em alternativas razoáveis; se uma visão A parece a única maneira razoável de uma certa coisa ter acontecido, então podemos dar de ombros e aceitá-la como nossa melhor hipótese de trabalho. Mas se conseguirmos conceber diversas formas de como as coisas podem ser plausíveis, podemos racionalmente nos abster de julgamento até que haja mais evidência.

Mais especificamente, enquanto o pluralismo por caso não é patentemente implausível, ele se apoia num quadro linguístico com duas características distintas: primeiro, que o significado de 'caso' é indeterminado, e segundo, dado que é impreciso, a descoberta de mais de uma precisão razoável deve nos tornar pluralistas. Mas nenhum desses recursos é inevitável. A filosofia da linguagem contemporânea descreve modelos nos quais a correção da aplicação de alguma expressão comum da linguagem — como 'água', 'ipê'[4] ou 'estrela' — pode ativar a presença ou ausência de um recurso que os falantes comuns não precisam distinguir, como ter uma certa constituição ou composição. Por que 'se segue de' não deve ser semelhante? Ou seja, embora nenhuma *análise* a priori de 'se segue de' (ou 'válido') descubra a única precisão correta da (TGT), ainda assim pode existir uma explicação — talvez fazendo uso de técnicas matemáticas sofisticadas — que capte exatamente a extensão de 'se segue de'. Explicações rivais teriam então o mesmo status que explicações rivais de estrelas ou água. Embora a análise da palavra 'estrela' não nos diga que as estrelas não são buracos no céu noturno ou deuses montando suas carruagens nos céus, essas concepções ainda estão erradas. Da mesma forma, embora a *análise* da expressão 'se segue de' possa não nos dizer se as concepções intuicionistas estão erradas, elas podem estar erradas mesmo assim. Em tais circunstâncias, podemos afirmar que o significado de 'se segue de' não está realmente subespecificado.

Em segundo lugar, mesmo que o significado da expressão *seja* subespecificado, não é necessário que *alguma* precisão esteja correta e, portanto, o pluralismo não é uma consequência inevitável da subespecificidade. Considere uma palavra reconhecidamente não especificada como 'monte' e alguém que se apresente como pluralista sobre a propriedade monte. Ele sustenta que é possível especificar o significado de 'monte' de maneiras diferen-

[4] N.T.: *olms* no texto original, árvores nativas da Europa

tes dentro de certos parâmetros e chegar a definições conflitantes, mas igualmente corretas, de 'coisa'. Por exemplo, os 'montistas' clássicos podem alegar que um monte é qualquer pilha de itens com mais de 10 unidades, 'montistas' divergentes protestam que um monte é qualquer pilha de itens com mais de 13 unidades e o pluralista sobre montes sustenta que ambos estão corretos. Mas existem muitas alternativas ao pluralismo aqui. Por exemplo, pode-se pensar que qualquer um que interprete a palavra em português 'monte' como exigindo uma pilha de n itens para qualquer n específico está errado, já que estão tentando importar mais especificidade para o significado da palavra do que realmente pode ser encontrado lá. Ou alguém pode ser cético em relação aos montes, com o argumento de que a palavra é muito vaga — ela não especifica um significado genuíno — ou pode-se afirmar que a expressão é sensível ao contexto: em alguns contextos, ela invoca a propriedade clássica, em outros a divergente, mas argumentam que isso não torna alguém pluralista sobre montes, assim como reconhecer que 'eu' escolhe pessoas diferentes em contextos diferentes não torna alguém pluralista sobre a ideia de si mesmo.

A mera possibilidade dessas alternativas, por si só, não argumenta contra essa visão, mas de fato enfraquece o argumento das aparências, pois a disponibilidade dessas alternativas torna claro que a intrigante razoabilidade do pluralismo não é única.

1.2 O Argumento da Virtude

Um argumento diferente para o pluralismo lógico invoca as virtudes práticas e teóricas combinadas da visão:

> Uma virtude é que a pluralidade da relação de consequências vem com pouco ou nenhum custo. Outra é que o pluralismo oferece uma interpretação mais caridosa de muitos debates importantes (mas difíceis) na lógica filosófica do que o que está disponível; argumentaremos que o pluralismo faz mais justiça à mistura de *insight* e perplexidade encontrada em muitos dos debates em lógica no século passado. (Beall & Restall 2006, 31)

Os pluralistas também enfatizaram que sua visão encoraja a inovação na lógica (Carnap 1937, mais detalhes adiante) e permite estudar mais teorias matemáticas, como as que seriam tornadas triviais pela lógica clássica (Shapiro 2014, cap. 3).

Tais alegações podem ser bastante difíceis de avaliar. É necessário traçar algumas distinções importantes entre razões teóricas e práticas para endossar o pluralismo, e mesmo que isso tenha sido feito, pode ser difícil decidir se a visão, em geral, realmente possui uma virtude — pode depender de afirmações empíricas substanciais para as quais as evidências ainda precisam ser reunidas — se possui ou não um peso maior das virtudes do que as teorias rivais (o monismo lógico não é uma teoria mais simples, e a simplicidade também é uma virtude teórica?) e, finalmente, se esse é um bom motivo para acreditar nessa visão.

Por exemplo, uma virtude reivindicada pelo pluralismo lógico é a caridade, mas nem todas as instâncias de caridade são teoricamente virtuosas; ninguém deve pensar que é mais provável que a física determinística seja correta, porque permite uma visão mais caridosa dos malfeitores, ou de Einstein. A caridade pode ser extraviada. Mas um lugar em que a caridade é levada a sério como uma virtude teórica está na avaliação de teorias de significado e tradução — embora mesmo aqui possa ser extraviada, já que não é uma virtude se uma teoria interpreta crianças como proferindo afirmações verdadeiras sobre a mecânica quântica (Davidson 1984). O pluralismo lógico não é em si uma tese sobre tradução ou interpretação, mas uma tese sobre lógicas e quantas existem. No entanto, a versão descrita acima baseia-se em algumas afirmações substanciais sobre o significado de 'válido' e 'se segue de' e pode-se argumentar que é apropriado invocar a caridade ao julgar entre essa teoria e as rivais por esse motivo: estamos decidindo entre teorias que interpretam 'válido' e 'se segue de' diferentemente. Talvez uma dessas interpretações pareça tornar nossos informantes (tanto usuários comuns da linguagem como especialistas que escreveram sobre lógica) responsáveis por menos alegações falsas.

Mas um oponente pode responder que interpretar falantes comuns como proferindo verdades a respeito da lógica pode parecer bastante semelhante a atribuir crenças verdadeiras sobre mecânica quântica a crianças. Como as experiências das tarefas de seleção de Wason demonstraram na psicologia, mesmo os falantes instruídos deixarão de agir como se o argumento da forma modus tollens estivesse correto em certas circunstâncias (Wason 1966, 1968; Cosmides 1989). Embora a interpretação mais caridosa de seu comportamento possa ser que eles não querem dizer com 'se segue de' o que os pesquisadores queriam dizer com ele, de longe a compreensão mais natural do que está acontecendo aqui é que os sujeitos cometem erros. Interpretá-los como significando algo diferente ignora o que esses experimentos revelam sobre o raciocínio humano e falha em explicar por que os sujeitos julgam mais tarde que suas respostas anteriores estavam erradas.

A pluralista lógica pode concordar com isso, mas distinguir entre ser caridosa com falantes comuns e ser caridosa com lógicos especializados. Isto é, identificar os lógicos especialistas que devemos interpretar caridosamente, incluindo aqueles que propuseram sistemas aparentemente incompatíveis. Lógicos relevantes escreveram 'silogismo disjuntivo não é válido'. Lógicos clássicos escreveram 'silogismo disjuntivo é válido'. Lógicos intuicionistas dizem que 'a eliminação da dupla negação não é válida'. Os lógicos clássicos responderam: 'a eliminação da dupla negação é válida'. Se o monismo lógico estiver correto, pelo menos duas ou mais dessas partes escreveram falsidades. O pluralismo lógico nos permitiria dizer que mais de uma, talvez muitos mais de uma, escreveram verdades.

Mas o pluralismo lógico também é *des*caridoso de maneiras que o monismo lógico não é, pois sustenta que os participantes monistas nos debates sobre qual lógica é correta têm discutido com base em uma confusão. O desfecho em relação ao argumento da caridade, e da virtude em geral, é que ainda há muito a ser feito antes de ficar claro quais virtudes são desejáveis e até que ponto o pluralismo lógico as possui em maior grau do que seus rivais.

1.3 A Objeção da Generalidade

A interpretação de 'todos' na TGT

Uma objeção ao pluralismo lógico baseado em casos consiste em permitir que 'caso' seja um termo subespecificado e admita várias interpretações, mas rejeita o próximo passo em que essas interpretações correspondem a diferentes relações de consequência lógica. Podemos fazer isso insistindo no maior domínio possível para o quantificador 'todos' no contexto da TGT. Há uma tradição na lógica que sustenta que, para que um argumento seja *logicamente* válido, a conclusão deve ser verdadeira em (sem restrições) em *todos* os casos em que as premissas são verdadeiras. Então, quando 'todo' é usado para definir consequência lógica, poderíamos argumentar, deve ser entendido da maneira mais ampla possível: se houver algum caso — em qualquer lugar, de qualquer tipo — em que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa, o argumento será inválido e, se não, o argumento será válido. A Única Lógica Verdadeira, então, será a que descreve a relação de preservação da verdade em *todos* os casos — onde 'todos' é interpretado da maneira mais ampla possível (Beall & Restall 2006, 92; Priest 2006, 202).

Suponha que adotemos a interpretação mais ampla de 'todos'. Uma questão é se teremos alguma relação útil de consequência lógica. Lógicas que são alcançadas ao quantificar sobre casos extras tendem a ser mais fracas — ou seja, classificam menos argumentos como válidos — pois quanto mais casos incluirmos, maiores serão nossas chances de incluir um em que as premissas de um argumento específico sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Dialetistas incluiriam casos em que tanto uma sentença como sua negação são verdadeiras, e isso significa que podemos ter casos em que P e $\neg P$ são verdadeiros, mas Q é falso, tornando $P \vee Q$ e $\neg P$ verdadeiros, mesmo que Q não seja e, portanto, fornecendo um contraexemplo ao argumento do silogismo disjuntivo. Se *isso* é aceitável, pode-se pensar, por que não permitir casos em que $A \wedge B$ é verdadeiro, mas B não é? Ou pior. Talvez se interpretarmos 'todos os casos' de maneira ampla o suficiente, descobriremos que não restam argumentos válidos e, portanto, o resultado não será um monismo lógico, mas uma forma de niilismo lógico, ou algo próximo disso:

> ... não vemos limite para interromper o processo de generalização e ampliação das interpretações de casos. Pelo que sabemos, a única inferência deixada na interseção de todas as lógicas (irrestritas) deve ser a inferência de identidade: de A inferir A. Essa identidade ser o único argumento realmente válido é implausível e, acreditamos, uma conclusão desmotivada. (Beall & Restall 2006, 92)[5]

Priest discorda e sugere que o que impedirá a queda por esta ladeira escorregadia é o fato de que certas relações-chave de consequências valem em virtude dos significados dos conectivos:

> Eu acho que é simplesmente falso que todos os princípios de inferência falhem em alguma situação. Por exemplo, qualquer situação em que uma conjunção valha, os conjuntos valem, simplesmente em virtude do significado de $\wedge$. (Priest 2006, 202–203)

Mas é relativamente comum que lógicos afirmem que os princípios lógicos que eles

[5]Beall e Restall pensam esse ponto como uma redução na suposição de que a lógica é absolutamente geral; eles não sustentam isso como um argumento para o niilismo lógico. Ainda assim, alguns autores levaram a perspectiva do niilismo lógico mais a sério, acrescentando uma opção adicional ao campo que inclui o pluralismo lógico e o monismo lógico (Mortensen 1989; Cotnoir 2018; Russell a publicar).

endossam são válidos em virtude dos significados dos conectivos envolvidos. O lógico intuicionista nega que $A \vee \neg A$ seja verdadeiro em virtude dos significados de $\vee$ e $\neg$, embora outros lógicos digam que sim, e é difícil julgar tais disputas independentemente de uma teoria mais substancial dos significados dos conectivos. Essa é outra área em que a disputa sobre o pluralismo lógico se depara com uma disputa mais antiga na filosofia da lógica, e que é ostensivamente uma questão sobre significado. As duas questões-chave que sobram para o sucesso dessa objeção monista são $i)$ quais formas de argumento, se houver alguma, garantem preservar a verdade (talvez em virtude do significado) em qualquer caso, e $ii)$ se existem tais formas de argumento, existem formas suficientes para constituir uma lógica não-trivial?

A Resposta da Polissemia

Há mais de um modelo plausível para a subespecificação de 'caso' na TGT. A versão do pluralismo que estamos considerando permite que diferentes *tipos* de coisas sejam considerados como 'casos'. Às vezes, um caso pode ser uma estrutura matemática, outras um mundo possível (talvez incompleto ou inconsistente) ou o mundo real ou partes dele[6]. Diante disso, a subespecificação de 'caso' na TGT pode ser menos semelhante à indeterminação que resulta da variação no domínio da quantificação e mais semelhante à variação que resulta da polissemia. Considere:

(1) Todo banco precisa de funcionários familiarizados com matemática.

Essa frase tem duas leituras porque a palavra 'banco' — mesmo quando falamos de dinheiro — tem mais de um significado. Pode significar uma instituição financeira (como o HSBC) ou o prédio em que essa instituição oferece seus serviços (como o banco a cinco minutos do campus.) Às vezes contexto adicional pode excluir uma das leituras, por exemplo:

(2) Todo banco precisa de funcionários familiarizados com matemática em todas suas agências.

em que fica claro que se entende banco como instituição financeira, e

[6] Essa variação já estava presente nas concepções contemporâneas de consequência lógica, e Etchemendy 1999 fornece uma excelente discussão que introduz a distinção entre concepções de consequências representacionais e interpretacionais. Veja também Sher 1996.

(3) Todo banco precisa de funcionários familiarizados com matemática e amplo estacionamento para clientes.

em que fica claro que se entende banco como prédio.

Quando estávamos assumindo que a subespecificação na TGT resultou da subespecificação sobre o domínio de quantificação para 'todos', houve uma tentação natural de pensar que obteríamos a resposta mais estrita, cuidadosa e correta ao lidar com um domínio completamente irrestrito. No caso da polissemia, no entanto, o que pode variar não é (apenas) o tamanho do domínio de quantificação, mas também que tipo de objeto é esse que estamos fazendo afirmações. O resultado é que podemos permitir que o domínio de quantificação seja do tamanho que desejamos, e nenhum objeto do tipo errado pode contar como um contraexemplo da afirmação geral, precisamente porque é do tipo errado. Para ilustrar com 'banco': se estamos falando de banco como instituição financeira, nenhum banco como prédio pode servir como um contra-exemplo para (1), por mais irrestrito que seja o domínio da quantificação $-$ já que a sentença não está fazendo afirmações sobre tais coisas. E, inversamente, se estamos falando de banco como prédio, nenhum banco como instituição financeira da internet pode ser um contra-exemplo da sentença (3).

Então, suponha que 'caso' na TGT é polissêmico. Talvez 'caso' às vezes signifique mundo possível, mas também pode ser usado para significar modelo de primeira ordem. Se o lógico clássico quer dizer modelo de primeira ordem por 'caso', não é legítimo reclamar que ele não levou em consideração mundo possíveis incompletos e, portanto, não considerou *todos* casos. Na desambiguação de 'caso' em caso-como-modelo-de-primeira-ordem, o lógico clássico considerou *todos* casos, uma vez que mundos possíveis não casos nesse sentido.

Escolhendo um melhor caso?

Vamos continuar assumindo que 'caso' é polissêmico. Assim como havia espaço para alguém argumentar que apenas uma única interpretação de 'todos' era apropriada na TGT, também uma monista poderia argumentar aqui que existe apenas uma desambiguação apropriada de 'caso' na TGT e, portanto, que existe apenas uma relação de consequência lógica.

Nós podemos desenvolver esse raciocínio da seguinte maneira. A tarefa do lógico é capturar a relação de consequência nas sentenças da linguagem natural, mas geralmente simplifica as coisas prestar atenção apenas em expressões particulares nessas sentenças, como conjunção, negação e disjunção, por exemplo, ou essas expressões mais o quantificador universal e identidade. Qualquer que seja o conjunto de símbolos que selecionamos como nossas chamadas *constantes lógicas*, os significados de todas as outras expressões nas sentenças — as expressões não lógicas — são determinados pelas interpretações (ou, como as chamamos na TGT, 'casos') e, como estamos quantificando sob todas essas interpretações, na verdade estamos simplesmente ignorando os significados de todas as expressões não lógicas. Agora considere o que poderíamos dizer sobre esse argumento:

$$\frac{\text{a é vermelho}}{\text{a é colorido}}$$

Normalmente traduziríamos isso na linguagem da lógica de predicados de primeira ordem como algo assim:

$$\frac{Va}{Ca}$$

Esse argumento formal não é válido, mas alguém poderia dizer que o argumento original da linguagem natural *é* válido. A lógica de primeira ordem que falha ao tratar palavras como 'vermelho' e 'colorido' como constantes lógicas, pode-se pensar, fracassa em capturar consequência lógica.

Priest considera essa visão e, embora reconheça que não é a única visão que alguém possa ter, ele sustenta que é a correta.

> O movimento padrão [para resistir a essa linha de pensamento] é alegar que a inferência é, de fato, inválida, mas que *parece* ser válida porque a confundimos com um entusiasmo (entimema) válido com a premissa suprimida 'Todas as coisas vermelhas são coloridas' tomada por garantida. (Priest 2006, 201)

Mas suponha que sustentemos, como Priest, que o argumento é válido. Generalizando, podemos pensar que, se você estiver interessado apenas na verdade sobre consequência lógica, então *nunca* será legítimo ignorar o significado de alguma expressão em um argumento. Se a simplicidade e a conservatividade não são motivo de preocupação, não se deve apelar às interpretações à la Tarski para definir a validade — já que o objetivo de tais interpretações é permitir que os significados de certas expressões variem. Melhor do que qualquer 'interpretação' seria um mundo possível completo (talvez possamos discutir sobre quais coisas estão incluídas em 'todos os mundos possíveis', mas deve haver também uma resposta correta para essa pergunta). Por isso muitas das possíveis desambiguações de 'caso' nos fornecem diferentes teorias de validade *falsas*. Elas podem ser úteis porque são simples e se aproximam da concepção verdadeira, mas como as lógicas que capturam não são corretas, essa é uma visão sobre a qual nenhum pluralismo ameaça.

1.4 Objeção da normatividade

Uma objeção diferente ao pluralismo lógico parte da premissa de que a lógica é normativa, de modo que isso significa que as lógicas têm consequências sobre como devemos raciocinar, ou seja, sobre o que devemos acreditar e como devemos atualizar nossas crenças quando aprendemos novas coisas. Muitos escritores pensam que a lógica é normativa, às vezes porque pensam que a lógica *é* apenas a ciência do bom raciocínio:

> Na Lógica não queremos saber como é que pensa o entendimento e como tem procedido até agora ao pensar, mas sim como devia proceder ao pensar. (Kant 1800, p. 4)
>
> a lógica é um assunto normativo: deve fornecer uma concepção do raciocínio correto. (Priest, 1979, p. 297)

Às vezes, porém, filósofos assumiram a posição de que se a lógica é ou não sobre raciocínio, suas alegações sobre consequência lógica têm consequências normativas para o raciocínio:

> As regras para afirmar, pensar, julgar, inferir, seguem as leis da verdade. E, assim, pode-se muito bem falar também de leis do pensamento. (Frege 1918, pp. 289–90)[7]
>
> ... consequência lógica é normativa. Em um sentido importante, se um argumento é válido, você de alguma forma erra se aceita as premissas, mas rejeita conclusão. (Beall & Restall 2006, p. 16)

[7] Aqui Frege está dizendo que as leis do pensamento seguem as leis da verdade (isto é, lógica) e ele imediatamente recusa que a própria lógica é o estudo das leis do pensamento.

Existe uma tensão aparente entre essa suposta normatividade da lógica e a tese do pluralismo lógico. Suponha, por exemplo, que se uma forma de argumento for válida, siga alguma conclusão normativa a respeito do que devemos acreditar. (Talvez seja que devamos acreditar na conclusão de uma instância da forma do argumento se acreditarmos nas premissas, embora muito trabalho sobre a normatividade da lógica sugira que seria necessário algo substancialmente mais complicado.) Agora, suponha que o pluralismo lógico está correto. Em particular, a lógica 1, que diz que o silogismo disjuntivo é válido, e a lógica 2, que diz que o silogismo disjuntivo não é válido, estão ambas corretas. Devemos acreditar no que a lógica 1 nos diz para acreditar? É difícil ver como poderíamos escapar dessa obrigação, dado que a lógica 1 nos diz que as premissas implicam a conclusão e a lógica 1 está correta. No entanto, se a consequência normativa para crença de fato se segue, talvez a lógica 2 esteja falhando em algum aspecto — ela falha em capturar todas as obrigações que se seguem de nossa lógica. Como S. Read coloca:

> `[S]` uponha que existem efetivamente duas concepções igualmente boas de validade dedutiva, K_1 e K_2, que β se segue de α de acordo com K_1, mas não de acordo com K_2, e sabemos que α é verdadeiro... Se segue por K_1 que β é verdadeiro, mas não por K_2. Devemos ou não devemos concluir que β é verdadeiro? A resposta parece clara: K_1 supera K_2... K_1 responde a uma pergunta crucial que K_2 não responde. `[Esta]` questão é a questão central da lógica. (Read 2006, 194–195)

Versões dessa objeção podem ser encontradas em Priest 2006, Read 2006, Keefe 2014 (p. 1385) e Steinberger 2018, e há réplicas em Caret 2016, Russell 2017 e Blake-Turner & Russell a publicar.

1.5 A Objeção da Mudança de Significado

Uma pergunta final para os pluralistas é se eles estão certos ao considerar que lógicos rivais estão discutindo sobre os mesmos princípios lógicos. O lógico clássico aceita uma verdade lógica escrita como '$A \vee \neg A$', já uma adepta da Lógica Forte de Kleene rejeita como verdade lógica um princípio que ela escreve da mesma maneira. Mas só se segue que eles aceitam lógicas diferentes se os símbolos expressarem o mesmo princípio em ambos os casos e, em particular, se '$\vee$' e '$\neg$' significam o mesmo em ambos casos.

Em debate, monistas muitas vezes estavam dispostos a conceder essa suposição aos pluralistas, porque eles assumiram que sua lógica preferida está certa e a lógica rival *errada*, não que eles e seus rivais estivessem conversando entre si. Ainda assim, Quine (1986, 81) sugeriu que em uma disputa entre lógicos rivais 'nenhuma das partes sabe do que está falando', uma vez que eles deixam de falar em *negação* assim que suas propriedades lógicas centrais são seriamente questionadas (no exemplo de Quine, os lógicos discutem se as frases da forma $A \wedge A$ podem ser verdadeiras.)

O pluralista precisa, portanto, de uma maneira de excluir a possibilidade de que cada uma de suas lógicas preferidas esteja correta, mas esse pluralismo em si ainda é falso, porque essas lógicas não discordam. Talvez cada lógica possa até fazer parte de uma única lógica maior contendo, por exemplo, negação intuicionista e negação paraconsistente, bem como negação clássica e negação forte de Kleene, etc. Ocasiões onde pluralistas adotaram essa questão incluem Beall e Restall 2001 (§3) e Hjortland 2013.

2. Pluralismo Lógico via Pluralismo Linguístico

O debate contemporâneo sobre o pluralismo lógico baseado em casos levou a um renascimento do interesse em uma forma mais antiga de pluralismo defendida pelo famoso positivista lógico Rudolf Carnap (1937, §17 e 1958; ver também Restall 2002; Cook 2010; Field 2009; Kouri Kissel a publicar; Varzi 2002; Eklund 2012).

2.1 O princípio da tolerância

Na seção 17 de *A Sintaxe Lógica da Linguagem (The Logical Syntax of Language)*, Carnap escreve:

> Na lógica não há moral. Todo mundo tem a liberdade de construir sua própria lógica, ou seja, sua própria linguagem, como desejar. Tudo o que é necessário é que, se quiser discutir [sobre a lógica], deve anunciar claramente seus métodos e fornecer regras sintáticas em vez de argumentos filosóficos. (Carnap 1937, §17)

Dois tipos de tolerância são expressos nesta passagem. O mais famoso é a tolerância de Carnap para diferentes linguagens, e é motivado tanto pelo pensamento de que disputas verbais não são realmente disputas teóricas sobre o domínio que estamos descrevendo, mas, na melhor das hipóteses, disputas práticas sobre as maneiras mais úteis e eficientes de usar palavras, dado nossos objetivos, e pela ideia de que essas questões práticas são melhor deixadas para aqueles que trabalham na área relevante. Como Carnap escreveu mais tarde,

> Vamos conceder aos que trabalham em quaisquer áreas especiais de investigação a liberdade de usar qualquer forma de expressão que lhes pareça útil. O trabalho na área, mais cedo ou mais tarde, levará à eliminação das formas que não têm função útil. *Sejamos cautelosos ao fazer afirmações e críticos ao examiná-las, mas tolerantes ao permitir formas linguísticas*. (Carnap, 1958, 221)

O segundo tipo de tolerância é uma tolerância para diferentes *lógicas*, algo que é naturalmente interpretado como uma espécie de pluralismo lógico. A frase ‘todos têm liberdade para construir sua própria lógica’ sugere que ninguém cometeria um erro ao fazê-lo, e parece claro a partir da frase ‘ou seja, sua própria língua’ que segue imediatamente depois que Carnap considera os dois tipos de tolerância extremamente próximos, talvez até que ele ache que tolerância linguística e tolerância lógica sejam a mesma coisa.

Pode não ser óbvio para um leitor moderno por que esse é o caso. Por que não podemos ser tolerantes com linguagens alternativas, que parecem apenas sensatas, sem comprometer-nos a tolerar lógicas alternativas? Além disso, os lógicos que discordam sobre qual lógica sentencial está correta (por exemplo, clássica ou intuicionista) parecem capazes de usar a mesma linguagem (contendo $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, etc), mesmo supondo que uma lógica é correta para essa linguagem, e outra lógica errada. Se essa posição é coerente, um lado deve ter cometido um erro afinal, o que implica que não havia realmente ‘liberdade para construir sua própria lógica’.

Essa visão parece pelo menos uma possibilidade aberta, embora seja difícil determinar se dois lógicos rivais estão realmente defendendo lógicas diferentes para a mesma linguagem. Não será suficiente que eles usem os mesmos símbolos, pois cada um pode usar símbolos com significados diferentes; neste caso, estarão usando linguagens diferentes. Mas o que mais, além de usar as mesmas expressões, é necessário?

Essa é uma pergunta para a qual existem muitas respostas rivais, mesmo para as constantes lógicas mais básicas. Talvez as expressões devam denotar a mesma função de verdade, ou ter a mesma intensão, ou compartilhar um modo de apresentação, um personagem ou um papel conceitual. Porém, *The Logical Syntax of Language* foi publicado (em alemão) em 1934, antes das inovações de Grice, Gentzen, Montague, Kaplan, Lewis, Putnam ou Kripke (e, além disso, antes de *'On the Concept of Logical Consequence'* de Tarski (Schurz, 1998; Tarski 1983)) e em um ambiente em que o *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein teve uma influência poderosa. Carnap tem ideias bem definidas e explícitas sobre tanto significado como lógica, e elas ajudam a explicar por que ele acha que a tolerância linguística leva diretamente à tolerância lógica. No prefácio, ele escreve:

> Até agora, na construção de uma linguagem, o procedimento costumava ser, primeiro a atribuir um significado aos símbolos lógico-matemáticos fundamentais e depois considerar quais sentenças e inferências são consideradas logicamente corretas de acordo com esse significado. Como a atribuição do significado é expressa em palavras e, consequentemente, é inexata, nenhuma conclusão a que se chegue dessa maneira pode muito bem ser diferente de inexata e ambígua. A conexão só ficará clara quando abordada na direção oposta: deixe que quaisquer postulados e regras de inferência sejam escolhidos arbitrariamente; então essa escolha, qualquer que seja, determinará qual significado deve ser atribuído aos símbolos lógicos fundamentais. (Carnap 1937, xv).

De acordo com Carnap, o caminho certo para especificar uma linguagem é escolher algumas expressões e, em seguida, fornecer as regras de inferência para elas. É essa especificação que dá às expressões seus significados e, portanto, primeiro, não há a questão de suas regras estarem erradas para as expressões — todo mundo tem a liberdade de construir sua própria lógica, de escolher as regras que gosta — e segundo, ser tolerante com a escolha da linguagem já é ser tolerante com a escolha da lógica — pois as linguagens assim concebidas vêm com lógicas diferentes já 'embutidas'.

Uma das razões de Carnap para aceitar o pluralismo lógico é que ele via isso como espaço para inovação na lógica. No prefácio de *A Sintaxe Lógica da Linguagem*, ele escreve:

> Até o momento, houve apenas um pequeno desvio, em alguns pontos aqui e ali, da forma de linguagem desenvolvida por Russell, que já se tornou clássica. Por exemplo, certas formas sentenciais (como sentenças existenciais ilimitadas) e regras de inferência (como a Lei do Terceiro Excluído), foram eliminadas por certos autores. Por outro lado, um número de extensões foram propostas, e muitos cálculos interessantes, multi-valorados análogos ao cálculo bivalorado de sentenças evoluíram e resultaram finalmente em uma lógica de probabilidade. Da mesma forma, as chamadas sentenças intensionais foram introduzidas e, com o auxílio delas, foi desenvolvida uma lógica de modalidade. O fato de não terem sido feitas tentativas de se aventurar ainda mais longe das formas clássicas talvez se deva à opinião amplamente difundida de que tais desvios devem ser justificados — isto é, a nova forma de linguagem deve ser provada como 'correta' e constituir uma tradução fiel da 'verdadeira lógica'.
>
> Eliminar esse ponto de vista, juntamente com os pseudoproblemas e as controvérsias cansativas que surgem como resultado disso, é uma das principais tarefas deste livro. (Carnap 1937)

Esta passagem destaca várias características do pluralismo lógico de Carnap e da filosofia da lógica de maneira mais geral. Parece claro que ele pretendia que seu pluralismo lógico fosse 'horizontal' — isto é, permitir lógicas diferentes no mesmo nível, como lógicas sentenciais clássicas e intuicionistas — e também 'vertical' — permitindo lógicas para novos tipos de expressão, como lógicas intensionais e lógicas de segunda ordem (a terminologia é de Eklund 2012). Além disso, a passagem expressa uma abordagem 'lógica em primeiro lugar' e rejeita uma abordagem 'filosofia em primeiro lugar', sugerindo que, em vez de tentar descobrir qual é a melhor lógica a priori dos primeiros princípios (a abordagem 'filosofia em primeiro lugar'), devemos deixar que os lógicos desenvolvam as linguagens como quiserem e, depois, fazer nossos julgamentos com base no resultado final.

O contraste mais óbvio aqui é com W.V.O. Quine, que criticou a lógica de segunda ordem como teoria dos conjuntos disfarçada[8] e rejeitou lógicas temporais e modais por razões

[8] N.T.: *set-theory in sheep's clothing* no texto original

filosóficas (Quine 1986 (Capítulo 5), 1953, 1966; Burgess 1997, 2012). Tal impasse é bastante intrigante, dada a rejeição por Quine de tais abordagens 'Filosofia em primeiro lugar' na epistemologia em geral.

2.2 Questões para o Pluralismo de Carnap

Vários escritores contemporâneos ficaram felizes em apoiar a abordagem de Carnap ao pluralismo e Restall argumenta que ela é menos radical do que a versão dele e de JC Beall baseada em casos (Varzi 2002, 199; Restall 2002). No entanto, existem várias questões que alguém que queria defender a posição de Carnap hoje precisaria abordar. Uma primeira preocupação com a visão é que, enquanto trabalhamos nas várias linguagens que inventamos, podemos estar perdendo as regras 'corretas' — as que estavam lá fora, na verdade, antes de inventarmos qualquer coisa. Nas palavras de Paul Boghossian,

> Devemos realmente supor que, antes de estipularmos um significado para a sentença 'A neve é branca ou não é' não era o caso de a neve ser branca ou não? Não é esmagadoramente óbvio que essa afirmação era verdadeira antes de tal ato de significado, e que teria sido verdadeira mesmo se ninguém tivesse pensado sobre isso ou escolhido que fosse expressa por uma de nossas sentenças? (Boghossian 1996)

Talvez Carnap não levasse essa objeção a sério, pois, como o Wittgenstein do *Tractatus* (por exemplo, §4.26, 4.641-4.465), ele não acredita que verdades e regras lógicas estejam 'lá fora', esperando para serem descobertas:

> As chamadas sentenças 'reais' constituem o núcleo da ciência; as sentenças lógico-matemáticas são analíticas, sem conteúdo real, e são meramente auxiliares formais. (Carnap 1937, xiv)

No entanto, essa visão 'convencionalista' de verdade lógica (e junto com ela, a verdade analítica) foi contestada por, por exemplo, Quine, Sober, Yablo e Boghossian, e não goza mais da popularidade que possuía no tempo de Carnap (Quine 1936; Yablo 1992; Boghossian 1996; Sober 2000). Isso também destaca até que ponto é estranho chamar Carnap de pluralista lógico, pois, de certa forma, sua opinião não é que exista mais de uma lógica correta, mas que não há nada sobre o qual a lógica seja correta (Cook 2010, 498) Talvez fosse mais esclarecedor chamar Carnap de construtivista lógico.

Outra questão é se a concepção de significado de Carnap está correta. Atualmente, existem muitas abordagens alternativas para significado e um animado debate sobre elas. Field escreve:

> Em algumas leituras de 'diferença de significado', qualquer grande diferença na teoria gera uma diferença de significado. Nessas leituras, os conectivos realmente diferem em significado entre os defensores das diferentes lógicas para-todos-fins[9], assim como 'elétron' difere em significado entre a teoria de Thomson e a de Rutherford; mas a teoria de Rutherford discorda da de Thomson, apesar dessa diferença de significado, e não está claro por que não devemos dizer a mesma coisa sobre lógicas para-todos-fins alternativas. (Field 2009)

Field conclui que 'a noção de diferença de significado é inútil no contexto' e que a visão de Carnap dos significados dos contextos lógicos é, portanto, difícil de defender.

Mas os proponentes de visões alternativas específicas sobre os significados das constantes lógicas podem, em vez disso, sustentar que elas podem fazer um bom sentido da diferença de significado nesses contextos, e que Carnap simplesmente endossou a teoria errada do significado e, como resultado, tirou conclusões erradas para lógica. Uma questão específica que eles podem apontar está associada ao artigo de Prior, de 1960, *'The Runabout Inference Ticket'*, no qual ele fornece regras para um novo conectivo, *tonk*, que rapidamente leva à trivialidade, sugerindo que ele não estava 'totalmente livre para construir sua própria lógica' introduzindo regras para suas expressões. Outra questão é o fato de que é possível gerar lógicas diferentes, não variando as regras que governam qualquer expressão em particular, mas variando as regras estruturais mais gerais da lógica, que governam coisas como se alguém pode ou não permitir várias conclusões e se, ou não, uma premissa pode ser usada mais de uma vez em uma prova (Restall 2000; Paoli 2003). Isso sugere que, mesmo se os significados das expressões lógicas sejam governados pelas regras que infor-

[9] N.T.: *all-purpose logics* no texto original

mam como elas podem ser usadas nas provas (como Carnap sugere), duas lógicas podem concordar com essas regras, embora discordem sobre a relação de consequência lógica. Portanto, mesmo se você tiver escolhido com êxito uma linguagem, parece que ainda não determinou uma lógica.

3. Outros tipos de Pluralismo Lógico

Várias outras variedades de pluralismo lógico foram propostas desde os primeiros trabalhos de Beall e Restall, e cinco são descritas nesta seção. Uma maneira útil de classificar essas diferentes visões — incluindo o pluralismo baseado em casos de Beall e Restall — é como cada uma delas tomando consequência lógica a ser *relativa* a um aspecto diferente — por exemplo precisões de 'caso' (para Beall e Restall), conjuntos de constantes lógicas (para Varzi), tipos de portadores da verdade (para Russell), objetivos (para a abordagem menos radical de Cook) e normas epistêmicas (para Field).[10]

Ocasionalmente, objeta-se que uma ou mais dessas visões não constituam um pluralismo lógico 'real', com o argumento de que apenas relativiza consequência a algum novo parâmetro e (a objeção continua) isso tornaria a visão uma forma de relativismo, ao invés de uma forma de pluralismo.[11] Mas vale lembrar que não apenas algumas, mas a *maioria* das opiniões discutidas de maneira padronizada sob o título do pluralismo lógico — incluindo as versões baseadas em casos mais centrais — podem ser entendidas como relativizando consequência lógica a alguma coisa distinta. Elas são descritas como pluralismos lógicos de qualquer maneira, presumivelmente porque são visões nas quais se pode razoavelmente afirmar que mais de uma lógica está correta. A literatura é, portanto, mais fácil de se seguir se não se assume que as palavras 'pluralismo' e 'relativismo' marcam uma distinção importante ou amplamente aceita (Shapiro 2014, p. 1).

[10] A única visão que não se encaixa tão facilmente nessa forma é o mais radical dos pluralismos de Cook, caracterizados abaixo.

[11] Como observa Keefe, Beall e Restall estavam empenhados em distinguir sua visão do relativismo, escrevendo "não tratamos consequência lógica para ser relativa a linguagens, comunidades de investigação, contextos ou qualquer outra coisa" (Keefe 2014, p. 1377).

3.1 Pluralismo em relação ao conjunto de Constantes Lógicas

Achille Varzi aponta que uma maneira de gerar relações concorrentes de consequência lógica é variar o conjunto de expressões que tratamos como constantes lógicas. Se considerarmos $=$ como uma constante lógica, então o seguinte argumento será válido

$$\frac{\begin{array}{c} Fa \\ a = b \end{array}}{Fb}$$

Mas se o conjunto de constantes lógicas não incluir $=$, então não será válido, já que nossos modelos incluirão agora aquelas constantes lógicas que atribuem relações não reflexivas a $=$, e isso pode gerar contra-exemplos.

O símbolo $=$ deve ser tratado como uma constante lógica? O próprio Tarski endossou a visão de que *qualquer* expressão na linguagem pode ser considerada lógica:

> A divisão de todos os termos da linguagem discutida em lógica e extra-lógica... certamente não é muito arbitrária. Se, por exemplo, incluíssemos entre os sinais extra-lógicos o sinal de implicação ou o quantificador universal, nossa definição do conceito de consequência levaria a resultados que obviamente contradizem o uso comum. Por outro lado, não me são conhecidas bases objetivas que nos permitam traçar uma fronteira nítida entre os dois grupos de termos. Parece-me possível incluir, entre os termos lógicos, alguns que são geralmente considerados pelos lógicos como extra-lógicos, sem ter consequências que contrastam fortemente com o uso comum... No caso extremo, poderíamos considerar todos os termos da linguagem como lógicos. (Tarski 1983, 418-419)

Varzi está inclinado a apoiar o liberalismo de Tarski com relação à escolha de constantes lógicas:

> A alegação relevante é que todos (ou quaisquer) termos da linguagem podem, em princípio, ser considerados 'lógicos' — e eu concordo com isso. (Varzi 2002, 200)

O resultado é que, na perspectiva dele, há mais de uma relação correta de consequência lógica, uma vez que essa relação é relativa à escolha de constantes lógicas e há mais de um conjunto igualmente correto delas, resultando em lógicas diferentes e igualmente corretas.

A visão de Tarksi/Varzi é controversa. Varzi a defende em seu artigo de 2002 e há uma discussão útil em MacFarlane 2009.

3.2 Pluralismo sobre os objetos de Consequência Lógica

Outra variedade de pluralismo lógico resulta se considerarmos que pode haver diferentes lógicas corretas para diferentes tipos de portadores da verdade, como argumentado em (Russell 2008). Suponha que a consequência lógica seja realmente uma questão de preservação da verdade sobre os casos. Então, poderíamos falar coerentemente de relações de preservação da verdade em (conjuntos de) sentenças, em (conjuntos de) proposições ou em (conjuntos de) caracteres (como em Kaplan 1989) e, finalmente, em qualquer portador da verdade. Isso não seria muito empolgante se todas essas lógicas acabassem determinando uma única relação de consequência 'paralela', de modo que, por exemplo, uma sentença S_1 tivesse uma sentença S_2 como uma consequência lógica se e somente se a proposição que ela expressasse, P_1, tivesse a proposição expressa por S_2 (P_2) como uma consequência lógica. Russell usa vários exemplos envolvendo nomes, rigidez, referência direta e indexicais para argumentar que esse nem sempre é o caso. Num desses, supondo que a sentença $a = b$ contenha dois nomes diferentes e de referência direta, $a = b$ e $a = a$ expressem a mesma proposição. Dada a suposição mínima de que a relação de consequência lógica é reflexiva, isso significa que a proposição expressa por $a = b$ é uma consequência lógica da proposição expressa por $a = a$, mesmo que a sentença $a = b$ não seja uma consequência lógica da sentença $a = a$. Portanto, a relação de consequência lógica nas sentenças é curiosamente diferente daquela da relação de consequência lógica nas proposições, e há pelo menos duas relações diferentes e corretas de consequência lógica.

3.3 Pluralismo sobre Modelagem

Shapiro e Cook sugeriram que o trabalho de uma lógica formal é modelar uma linguagem natural (Shapiro 2006; Cook 2010; Shapiro 2014). Como os modelos são estruturas simplificadas destinadas a exibir algumas, mas não todas, as características do fenômeno que está sendo modelado, pode haver vários modelos rivais da mesma linguagem, cada um capturando aspectos diferentes dessa linguagem e, como Shapiro escreve:

> ...em geral, com modelos matemáticos, normalmente não há como 'acertar exatamente'. Para um determinado objetivo, pode haver modelos ruins — modelos claramente incorretos — e pode haver bons modelos, mas é improvável que se possa falar de um e apenas um modelo correto. (Shapiro 2006)

Parece que isso pode apoiar uma espécie de *niilismo lógico* — uma visão sobre a qual não há lógica correta (e, de fato, Cotnoir (2019) explora essa visão) —, mas Cook prefere pensar que isso oferece dois tipos diferentes de pluralismo. O primeiro tipo, menos polêmico, sustenta que a lógica correta é relativa ao objetivo de alguém. Se alguém deseja estudar a vaguidade, a lógica correta pode ser aquela que permite valores de verdade intermediários, enquanto que se você quer estudar a identidade, talvez lógica de primeira ordem com identidade seja preferível. Assim como o modelo correto é relativo ao seu objetivo, também o é a lógica correta.

Mas Cook questiona se a visão dele e de Shapiro de lógica-como-modelagem também poderia apoiar um pluralismo mais radical, já que parece possível que, mesmo com relação a um objetivo específico, possa haver duas lógicas rivais, cada uma claramente melhor do que todas as demais para o mesmo propósito, mas nenhuma das duas sendo uma melhor que a outra. Nessas circunstâncias, Cook acha que podemos dizer que ambas estão corretas e, portanto, que há mais de uma lógica correta. Contudo, também se poderia sustentar que, nessas circunstâncias, existem duas lógicas igualmente boas, das quais nenhuma conta como correta.

3.4 Pluralismo sobre Normatividade Epistêmica

Hartry Field propõe outro tipo de pluralismo lógico (Field 2009). A visão se apoia na tese de que a lógica é normativa (ver §1.4) juntamente com um pluralismo sobre normatividade epistêmica. Field sustenta que existem muitas normas epistêmicas possíveis e que podemos pensar em agentes endossando uma, ou — mais provavelmente — normas diferentes em momentos diferentes, e tendo opiniões sobre quão boas são as diferentes normas epistêmicas possíveis. Usamos essas normas epistêmicas para avaliar a si mesmas e a outras normas (pense em usar a indução numérica para avaliar tanto indução como contra-indução).

Algumas normas se dão bem com suas próprias lentes, caso em que não sentimos tensão. Alguns se saem mal, mesmo com suas próprias lentes; nesse caso, sentimos pressão para mudá-las. Na opinião de Field, não faz sentido considerar alguma dessas normas correta ou incorreta, mas ele acha que faz sentido chamá-las de melhores ou piores, desde que reconheçamos que essas avaliações são relativas aos nossos objetivos epistêmicos. Ainda assim, embora isso torne as normas criticáveis e avaliáveis, isso não significa que haverá uma norma exclusivamente melhor. "Por exemplo, pode haver uma sequência de normas cada vez melhores para alcançar os objetivos; além disso, pode haver laços e/ou incomparabilidades 'arbitrariamente distantes" (355). Portanto, temos um pluralismo normativo epistêmico.

Da mesma forma, podemos usar nossas normas epistêmicas — incluindo lógicas dedutivas — para avaliar o desempenho de várias lógicas dedutivas na consecução de objetivos epistêmicos que temos, por exemplo, resolvendo paradoxos semânticos. E, novamente, "não é óbvio que precise haver uma lógica excepcionalmente melhor para um determinado objetivo, muito menos que deveríamos pensar em uma lógica como 'exclusivamente correta' em algum sentido de objetivo independente" (356). O resultado, então, é uma espécie de pluralismo lógico: as lógicas são melhores ou piores em relação a objetivos diferentes, mas *mesmo em relação a um objetivo específico*, pode ser que nenhuma lógica seja a melhor.

3.5 Pluralismo por Restrição

Por fim, Hjortland explora outro tipo de pluralismo lógico defendendo lógicas sub-clássicas do argumento abdutivo de Williamson de que a lógica clássica é a Única Lógica Verdadeira (Hjortland 2017, 652-657; Williamson 2017). Considere a alegação de que o uso ubíquo da *lógica clássica* (em vez de outras lógicas mais fracas) na matemática é um ponto forte a seu favor; se tivéssemos que desistir da lógica clássica, estaríamos preocupados em perder muitas teorias matemáticas elegantes, simples e virtuosas, e preservar teorias virtuosas (e abandonar teorias *ad hoc* e de outro modo viciosas) é tudo o que a abordagem abdutiva na lógica diz respeito.

No entanto, o passo da importância da lógica clássica na matemática para a verdade da lógica clássica é muito rápido. Uma coisa é dizer que a lógica clássica, incluindo, por exemplo, instâncias dos princípios de Eliminação da Dupla Negação (EDN) e do ex falso quodlibet (EFQ), são amplamente utilizadas em matemática. Mas a matemática não exige princípios com toda a força e generalidade da lógica clássica (EDN) e (EFQ) — ela usa apenas algumas das *instâncias* desses princípios, as instâncias que empregam linguagem matemática. Quando dizemos que (EDN) e (EFQ) são *logicamente* válidos, estamos dizendo que são válidos independentemente das expressões que substituímos pelas expressões não lógicas neles — incluindo predicados vagos extra-matemáticos como 'monte' ou 'vermelho' e predicados metalinguísticos notoriamente problemáticos como 'verdadeiro' e 'heterológico'.

> As provas matemáticas contêm uma abundância de instâncias de princípios clássicos: aplicações de reductio ad absurdum clássico, prova condicional, silogismo disjuntivo, lei da absorção, etc. A ênfase, no entanto, deve ser o fato de que essas são instâncias de princípios clássicos. As provas matemáticas não se apoiam em nenhum desses princípios como generalizações irrestritas da forma que Williamson defende. Elas dependem, no máximo, dos princípios que se limitam ao discurso matemático, o que não implica que os princípios do raciocínio se sustentem universalmente. Em outras palavras, a prática matemática é consistente com essas etapas de raciocínio sendo instâncias de princípios matemáticos do raciocínio, não generalizáveis para todos os outros discursos. A fortiori, eles podem muito bem ser princípios de raciocínio admissíveis para a matemática, mas não para teorizar sobre a verdade. (Hjortland 2017, pp. 652–3)

Isso deixa espaço para um tipo de pluralismo que sustenta que alguns dos princípios lógicos mais fortes só são corretos quando restritos a tipos específicos de expressão linguística (como as que aparecem na linguagem da Aritmética de Peano); se não os restringirmos dessa forma, haverá contra-exemplos. Outros princípios lógicos (talvez a eliminação da conjunção esteja nesta lista) não precisam ser restritos a linguagem da Aritmética de Peano. Isto nos deixa com um senso claro de que temos diferentes lógicas corretas, dependendo da linguagem que estamos assumindo.

Referências Bibliográficas

Patrick Allo. Logical pluralism and semantic information. *Journal of Philosophical Logic*, 36 (6):659–694, 2007.

JC Beall and Greg Restall. Defending logical pluralism. *Logical Consequences. Kluwer Academic Publishers, to appear*, 2001.

Jeffrey C Beall and Greg Restall. Logical pluralism. *Australasian journal of philosophy*, 78 (4):475–493, 2000.

Jeffrey C Beall, JC Beall, and Greg Restall. *Logical pluralism*. Oxford University Press on Demand, 2006.

Christopher Blake-Turner and Gillian Russell. Logical pluralism without the normativity. *Synthese*, pages 1–19, 2018.

Paul Artin Boghossian. Analyticity reconsidered. *Noûs*, 30(3):360–391, 1996.

John P Burgess. Quinus ab omni naevo vindicatus. *Canadian Journal of Philosophy*, 27 (sup1):25–65, 1997.

John P Burgess. *Philosophical logic*. Princeton University Press, 2009.

Colin R Caret. The collapse of logical pluralism has been greatly exaggerated. *Erkenntnis*, 82(4):739–760, 2017.

Rudolf Carnap. *The logical syntax of language*. Open Court Publishing, 1937.

Rudolf Carnap. Empiricism, semantics, and ontology. *Revue internationale de philosophie*, pages 20–40, 1958.

Roy T Cook. Let a thousand flowers bloom: A tour of logical pluralism. *Philosophy Compass*, 5(6):492–504, 2010.

Leda Cosmides. The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? studies with the wason selection task. *Cognition*, 31(3):187–276, 1989.

Aaron J Cotnoir. Logical nihilism. In *Pluralisms in truth and logic*, pages 301–329. Springer, 2018.

Donald Davidson. Radical interpretation. *Dialectica*, 27(3-4):313–328, 1973.

Matti Eklund. The multitude view on logic. In *New waves in philosophical logic*, pages 217–240. Springer, 2012.

John Etchemendy. The concept of logical consequence. 1994.

Hartry Field. Pluralism in logic. *The Review of Symbolic Logic*, 2(2):342–359, 2009.

Gottlob Frege. The thought: A logical inquiry. *Mind*, 65(259):289–311, 1956.

GC Goddu. What exactly is logical pluralism. *Australasian Journal of Philosophy*, 80(2): 218–230, 2002.

Susan Haack. *Deviant logic, fuzzy logic: beyond the formalism*. University of Chicago Press, 1996.

Ole Thomassen Hjortland. Logical pluralism, meaning-variance, and verbaldisputes. *Australasian Journal of Philosophy*, 91(2):355–373, 2013.

Ole Thomassen Hjortland. Anti-exceptionalism about logic. *Philosophical Studies*, 174(3): 631–658, 2017.

Immanuel Kant. *Introduction to logic*. Open Road Media, 2015.

David Kaplan. Demonstratives. an essay on the semantics, logic, metaphysics, and epistemology of demonstratives and other indexicals (1977). *Unpublished manuscript, University of California, Los Angeles*.

Rosanna Keefe. What logical pluralism cannot be. *Synthese*, 191(7):1375–1390, 2014.

Teresa Kouri Kissel and Stewart Shapiro. Logical pluralism and normativity. *Inquiry*, 63(3-4): 389–410, 2020.

Michaelp Lynch. Alethic pluralism, logical consequence and the universality of reason. *Midwest Studies in Philosophy*, 32(1):122–140, 2008.

John MacFarlane. Logical constants. 2005.

Chris Mortensen. Anything is possible. *Erkenntnis*, 30(3):319–337, 1989.

Francesco Paoli. Quine and slater on paraconsistency and deviance. *Journal of Philosophical Logic*, 32(5):531–548, 2003.

Graham Priest. *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge University Press, 2008a.

Graham Priest. Logical pluralism hollandaise. *The Australasian Journal of Logic*, 6, 2008b.

Graham Priest et al. *Doubt Truth to be a Liar*. Oxford University Press, 2006.

Willard V Quine. Truth by convention. 1936.

Willard V Quine. Three grades of modal involvment. In *Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy*, volume 14, pages 65–81, 1953.

Willard V Quine. *Philosophy of logic*. Harvard University Press, 1986.

Willard Van Orman Quine. *Reference and modality*. Oxford University Press, 1971.

Shahid Rahman and Juan Redmond. Hugh maccoll and the birth of logical pluralism., 2008.

Stephen Read. Monism: The one true logic. In *A logical approach to philosophy*, pages 193–209. Springer, 2006.

Greg Restall. Carnap's tolerance, meaning, and logical pluralism. *The Journal of Philosophy*, 99(8):426–443, 2002a.

Greg Restall. *An introduction to substructural logics*. Routledge, 2002b.

Gillian Russell. One true logic? *Journal of philosophical logic*, 37(6):593–611, 2008.

Gillian Russell. Logical nihilism: Could there be no logic? 2018.

Gillian Russell. Logic isn't normative. *Inquiry*, 63(3-4):371–388, 2020.

Gerhard Schurz. Tarski and carnap on logical truth—or: what is genuine logic? In *Alfred Tarski and the Vienna Circle*, pages 77–94. Springer, 1999.

Stewart Shapiro. *Vagueness in context*. Oxford University Press on Demand, 2006.

Stewart Shapiro. *Varieties of logic*. OUP Oxford, 2014.

Gila Y Sher. Did tarski commit "tarski's fallacy"? *The Journal of Symbolic Logic*, 61(2): 653–686, 1996.

Elliott Sober. Quine: Elliott sober: Quine's two dogmas. In *Aristotelian Society Supplementary Volume*, volume 74, pages 237–280. Wiley Online Library, 2000.

Erik Stei. Rivalry, normativity, and the collapse of logical pluralism. *Inquiry*, 63(3-4):411–432, 2020.

Florian Steinberger. *Logical pluralism and logical normativity*. Ann Arbor, MI: Michigan Publishing, University of Michigan Library, 2019.

Alfred Tarski. On the concept of logical consequence. *Logic, semantics, metamathematics*, pages 409–420, 1936.

Johan van Benthem. Logical dynamics meets logical pluralism? *The Australasian Journal of Logic*, 6, 2008.

Achille C Varzi. On logical relativity. *Philosophical Issues*, 12:197–219, 2002.

Peter C Wason. Reasoning about a rule. *Quarterly journal of experimental psychology*, 20 (3):273–281, 1968.

Zach Weber. A guide to logical pluralism for non-logicians. *The Royal Institute of Philosophy*, 2017. doi: 10.1017/S1477175617000239. URL https://www.cambridge.org/core/journals/think/article/guide-to-logical-pluralism-for-nonlogicians/EDFDFA1C9EB65DB71848DABD6B12D877.

Timothy Williamson. Semantic paradoxes and abductive methodology. *Reflections on the Liar*, pages 325–346, 2017.

Nicole Wyatt. What are beall and restall pluralists about? thanks to the attendees at the western canadian philosophical association meetings of 2001 for a helpful discussion of this paper, and also to two anonymous referees for the ajp for their useful comments. *Australasian Journal of Philosophy*, 82(3):409–420, 2004.

Stephen Yablo. Necessity, essence, and individuation: A defense of conventionalism. *The Philosophical Review*, 101(4):878–881, 1992.

(II) Lógica Epistêmica[1]

Título Original: Epistemic Logic
Autores: Rasmus Rendsvig e John Symons
Tradução: Mateus Rui
Revisão: Jaaziel de Carvalho Costa

Lógica Epistêmica é um subcampo da epistemologia preocupado com as abordagens lógicas para conhecimento, crença, e noções relacionadas. Embora qualquer lógica com uma interpretação epistêmica possa se chamar uma *lógica epistêmica*, o tipo mais difundido de lógicas epistêmicas em uso atualmente são as lógicas modais. Conhecimento e crenças são representados por meio dos operadores modais *K* e *B*, geralmente com um subscrito indicando o agente que sustenta a atitude. Fórmulas $K_a\varphi$ e $B_a\varphi$ são lidas como "o agente *a* sabe que fi" e "o agente *a* acredita que fi", respectivamente. A lógica epistêmica permite a exploração formal de implicações de princípios epistêmicos. Por exemplo, a fórmula $K_a\varphi \rightarrow \varphi$ diz que o que é conhecido é verdadeiro, enquanto $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$ diz que aquilo que é conhecido é conhecido por ser conhecido. As semânticas da lógica epistêmica são tipicamente oferecidas em termos de mundos possíveis *via* modelos de Kripke, de modo que a fórmula $K_a\varphi$ é lida como afirmando que φ é verdadeira em todos os mundos em que o agente *a* considera epistemicamente possível, relativamente a sua informação atual. Os

[1]RENDSVIG, Rasmus; SYMONS, John. "Epistemic Logic", In: ZALTA, E. N. (ed.). Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer Edition. Stanford, CA: The Metaphysics Research Lab, 2019. Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-epistemic/. Acesso em: 21 de mar. 2022. A seguir está a tradução da entrada sobre Lógica Epistêmica de Rasmus Rendsvig e John Symons na Stanford Encyclopedia of Philosophy. A tradução segue a versão da entrada nos arquivos da SEP em https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-epistemic/. Esta versão traduzida pode diferir da versão atual da entrada, que pode ter sido atualizada desde o momento desta tradução. A versão atual está localizada em https://plato.stanford.edu/entries/logic-epistemic/. Gostaríamos de agradecer aos editores da Stanford Encyclopedia of Philosophy, principalmente o Prof. Dr. Edward Zalta, por concederem permissão para traduzir e publicar esta entrada.

problemas centrais que têm preocupado os lógicos epistêmicos incluem por exemplo, determinar quais princípios epistêmicos são mais apropriados para caracterizar conhecimento e crença, as relações lógicas entre diferentes concepções de conhecimento e crença, e as características epistêmicas de grupos de agentes. Para além da filosofia propriamente, a lógica epistêmica desenvolve-se nas ciências da computação, economia e campos relacionados.

1. Introdução

Os textos aristotélicos estabelecem a base para discussões da lógica do conhecimento e crença, particularmente *De Sophisiticis Elenchis*, assim como em *Prior* e *Posterior Analytics*. Enquanto Aristóteles se dedicou aos quatro modos aléticos — possibilidade, necessidade, impossibilidade, e contingência — Buridan, Pseudo Scotus, Ockham e Ralph Strode ajudaram a estender os *insights* de Aristóteles para temas e problemas epistêmicos (Boh 1993; Knuuttila 1993). Durante esse período, Pseudo-Scot e Guilherme de Ockham complementaram os estudos de Aristóteles de atos mentais da cognição e volição (ver Boh, 1993, p. 130)). Os estudos de Ivan Boh, sobre a história das investigações nos séculos quatorze e quinze sobre lógica epistêmica, proporcionam uma excelente cobertura do tópico, principalmente sua obra *Epistemic Logic in the Later Middle Ages* (1993).

De acordo com Boh, o filósofo inglês Ralph Strode formulou um sistema amplamente geral das regras epistêmicas proposicionais em seu influente livro de 1387, *Consequences* (Boh 1993, p. 135). A apresentação de Strode foi desenvolvida sobre os trabalhos lógicos de Ockham e Burley. Problemas de lógica epistêmica também foram discutidos entre os anos de 1330 e 1360 pelos conhecidos Calculadores de Oxford, mais proeminentemente por William Heytesbury e Richard Kilvington. No século quinze, Paulo de Veneza e outros filósofos italianos também se engajaram em sofisticadas reflexões sobre a relação entre conhecimento, verdade e ontologia.

Discussões de lógica epistêmica do período medieval compartilham conjuntos similares de suposições fundacionais com as discussões contemporâneas. De modo mais importante, filósofos medievais exploraram a conexão entre conhecimento e veracidade: se sei que *p*, então *p* é verdadeira. Além disso, muitas das discussões medievais iniciam com uma suposição similar as observações de G.E. Moore, de que um agente epistêmico não pode coerentemente asserir "*p*, mas eu não acredito (sei) que *p*". Sentenças com essa forma são geralmente referidas como *sentenças mooreanas*.

Tratamentos modernos da lógica do conhecimento e crença cresceram a partir do trabalho de filósofos e lógicos escritos entre os anos de 1948 e a década de 1950. Rudolf Carnap, Jerzy Łoś, Arthur Prior, Nicholas Rescher, G.H. von Wright, entre outros reconheceram que nosso discurso sobre conhecimento e crença admite um tratamento axiomático-dedutivo. Entre os muitos artigos importantes que surgiram na década de 1950, o trabalho pioneiro de von Wright (1951) é amplamente reconhecido como tendo iniciado o estudo formal da lógica epistêmica tal como conhecemos hoje. Os *insights* de von Wright foram estendidos por Jaakko Hintikka em seu livro *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions* (1962). Hintikka proporcionou um modo de interpretar conceitos epistêmicos em termos de uma semântica de mundos possíveis, e sua obra tem sido utilizada como texto fundacional para o estudo de lógica epistêmica desde então.

Nas décadas de 1980 e 1990, lógicos epistêmicos se preocuparam com as propriedades lógicas de sistemas que contenham grupos de conhecedores, e posteriormente com as características epistêmicas dos chamados contextos “multimodais”. Desde a década de 1990, o trabalho em lógica epistêmica dinâmica [2] tem estendido o trabalho em lógica epistêmica tradicional ao modelar o processo dinâmico de aquisição de conhecimento e revisão de crença. Nas últimas duas décadas, a lógica epistêmica tem se comprometido com um amplo conjunto de abordagens formais para o estudo interdisciplinar de conhecimento e crença.

O interesse em lógica epistêmica se estendeu para além dos filósofos. As décadas recentes têm visto uma grande troca interdisciplinar na lógica epistêmica com economistas e cientistas da computação, desenvolvendo ativamente o campo em conjunto com lógicos e filósofos. Em 1995, dois importantes livros sinalizaram a fértil interação entre a ciência da computação e a lógica epistêmica: Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995) e Meyer e van der Hoek (1995). O trabalho feito por cientistas da computação tornou-se cada vez mais central para a lógica epistêmica nos anos seguintes.

Entre os filósofos, existe uma crescente atenção na interação entre essas abordagens formais e os problemas epistemológicos tradicionais (ver, por exemplo van Benthem (2006); Hendricks & Symons (2006); Stalnaker (2006); Holliday (2018)).

Existem diversos livros introdutórios de lógica epistêmica, por exemplo van Benthem (2011); Ditmarsch, Hoek e Kooi (2007); Ditmarsch et al. (2015); Gochet e Gribomont (2006); Meyer (2001) e Lenzen (1980) proporcionam uma visão geral dos desenvolvimentos recentes.

[2] N.T.: https://plato.stanford.edu/entries/dynamic-epistemic/

2. A Abordagem Modal para Conhecimento

Até bem recentemente, a lógica epistêmica concentrava-se quase que exclusivamente no conhecimento proposicional. No caso de conhecimento proposicional, um agente, ou grupo de agentes, sustenta a atitude proposicional de saber direcionada a uma proposição. Por exemplo, quando alguém diz: "Zoe sabe que há uma galinha no quintal", ele está afirmando que Zoe é a agente que sustenta a atitude proposicional *saber* direcionada à proposição expressa pela sentença do português "há uma galinha no quintal". Agora imagine que Zoe não sabe se há uma galinha no quintal. Por exemplo, pode ser o caso que ela não tenha acesso a informação sobre se há ou não uma galinha no quintal. Nesse caso, sua falta de informação significa que ela irá considerar dois cenários como possíveis, um em que há uma galinha no quintal, e outro em que não há.

Talvez ela possua alguma decisão prática que envolva não somente galinhas, mas também a presença de cães bravos no quintal. Ela pode querer alimentar as galinhas, mas irá fazer isso somente se não houver nenhum cachorro no quintal. Se ela não souber se existe ou não um cachorro no quintal, o número de cenários que ela deve considerar em sua deliberação cresce para quatro. Obviamente, alguém precisa considerar alternativas epistêmicas quando não possui informação completa sobre as situações que são relevantes para sua decisão. Como veremos abaixo, a semântica de mundos possíveis tem proporcionado um arcabouço útil para o entendimento sobre a maneira na qual os agentes podem raciocinar sobre alternativas epistêmicas.

Enquanto lógicos epistêmicos concentraram-se tradicionalmente em *saber que*, podemos encontrar uma gama de outros usos de conhecimento na linguagem natural. Como apontou Wang (2015), as expressões *saber como*, *saber o que*, *saber por que* são muito comuns, aparecendo, na linguagem falada e escrita, tão frequentemente quanto (algumas vezes mais frequente) o *saber que*. Recentemente, lógicas epistêmicas não-padrão para tais expressões têm sido desenvolvidas, apesar de construções para *saber quem* já estarem presentes em *Knowledge and Belief* (1962) de Hintikka (ver também Boër & Lycan (1986); e Rendsvig (2012)). Assim, para além do conhecimento proposicional, a lógica epistêmica também sugere modos de sistematizar a lógica de perguntas e respostas (Brendan sabe por que o cachorro latiu). Ela também proporciona *insights* sobre a relação entre múltiplos modos de identificação (Zoe sabe que esse homem é o presidente). Aqui, pode-se dizer que a agente sabe um fato relacionando múltiplos modos de identificação na medida em que ela identifica corretamente o presidente, aquele que ela pode reconhecer de matérias nos jornais como o homem que ela vê parado em sua frente, quem ela identifica como um objeto em seu campo visual (Hintikka & Symons 2003). A lógica epistêmica também pode proporcionar *insights* sobre questões do “saber-como” processual (Brendan sabe como trocar um fusível). Por exemplo, saber como fazer φ pode ser entendido como sendo equivalente à afirmação de que existe um modo tal que um agente sabe que este é o modo de assegurar que φ (ver Wang (2015), (2018)). O trabalho relativo à justificação do conhecimento tem sido feito a partir das combinações de *lógica da justificação* com lógica epistêmica (ver, por exemplo Artemov & Nogina (2005); Renne (2008)). Existem trabalhos em andamento sobre esse e outros tópicos, e novos desenvolvimentos estão surgindo constantemente.

2.1 A Linguagem Formal da Lógica Epistêmica

O trabalho recente em lógica epistêmica repousa-se sobre uma concepção modal do conhecimento. Para ser claro sobre o papel da modalidade na lógica epistêmica será útil introduzir elementos básicos do formalismo moderno. Por razões de simplicidade, começaremos com o caso de conhecimento e crença para um único agente, adiando as considerações de múltiplos agentes para a seção 3.

Um protótipo de linguagem para lógica epistêmica é dado primeiramente fixando o conjunto de *variáveis proposicionais* $p_1, p_2, \ldots$. Em aplicações da lógica epistêmica, variáveis proposicionais recebem interpretações específicas: por exemplo, p_1 poderia representar a proposição “há uma galinha no quintal” e p_2 a proposição “há um cachorro no quintal”, etc. As variáveis proposicionais representam proposições que são representadas sem um detalhamento mais fino na linguagem formal. Desse modo, elas são geralmente referidas como *proposições atômicas*, ou simplesmente *átomos*. Denotaremos *Átomo* o conjunto de proposições atômicas.

Além das proposições atômicas, a lógica epistêmica suplementa a linguagem da lógica proposicional com o operador modal K_a para conhecimento, e B_a para crença.

$K_a\varphi$ lê-se “O agente *a* sabe que φ”

e similarmente

$B_a\varphi$ lê-se “O agente *a* acredita que φ”

Em muitas publicações recentes em lógica epistêmica, o conjunto completo de fórmulas da linguagem é dado utilizando o assim chamado *Formalismo de Backus-Naur*. Esta é simplesmente uma notação técnica derivada da ciência da computação que proporciona uma definição recursiva de fórmulas julgadas gramaticalmente "corretas", isto é, o conjunto de *fórmulas bem formadas*:

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid B_a\varphi, \text{ para } p \in \acute{A}tomo$$

Deve-se notar que a letra grega φ representa a categoria sintática da fórmula. Assim, essa definição diz: um átomo p é uma fórmula; $\neg\varphi$ é uma fórmula, se φ é uma fórmula (leia $\neg$ como 'não é o caso que'); $(\varphi \wedge \varphi)$ é uma fórmula sempre que qualquer duas fórmulas são conectadas pelo símbolo $\wedge$ (leia $\wedge$ como 'e'); e $K_a\varphi$ e $B_a\varphi$ são fórmulas sempre que φ for uma fórmula (as leituras foram indicadas acima). Note que em uma especificação recursiva não$-BNF$ da linguagem, a variável grega φ seria usada como uma *metavariável* variando sobre outras fórmulas, e normalmente alguém afirmaria a cláusula para conjunções como: $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula sempre que φ e ψ são fórmulas. Mas a *BNF* nos permite usar apenas φ para conseguir o mesmo efeito.

Chamaremos essa linguagem básica, que inclui ambos operadores de Conhecimento e Crença, de $\mathcal{L}_{KB}$. Como na lógica proposicional, conectivos adicionais são definidos a partir de $\neg$ e $\wedge$: a notação típica é '$\vee$' para 'ou', '$\rightarrow$' para 'se ..., então...' e '$\leftrightarrow$' para '... se, e somente se,...'. Tipicamente, $\top$ (*top*) e $\bot$ (*bottom*) também são usados para denotar proposições sempre verdadeiras e proposições sempre falsas, respectivamente.

Como veremos abaixo, $K_a\varphi$ é lido como afirmando que φ é o caso em todos os mundos acessíveis para *a*. Nesse sentido, *K* pode ser tomado como se comportando de modo semelhante ao operador 'box', $\Box$, geralmente utilizado para denotar necessidade. Ao avaliar $K_a\varphi$ em um mundo possível *w*, alguém está de fato avaliando uma *quantificação universal* sobre todos os mundos acessíveis de *w*. O quantificador universal $\forall$ na lógica de primeira ordem, possui um quantificador existencial $\exists$ como seu *dual*: isso significa que os quantificadores são mutuamente definíveis ao tomar $\forall$ como primitivo e definir $\exists x\varphi$ como abreviação de $\neg\forall x\neg\varphi$, ou ao tomar $\exists$ como primitivo e definir $\forall x\varphi$ como $\neg\exists x\neg\varphi$. No caso de K_a, nota-se que a fórmula $\neg K_a\neg\varphi$ forma uma *quantificação existencial*: ela diz que *existe* um mundo acessível que satisfaz φ. Na literatura, o operador dual para K_a é geralmente introduzido. A notação típica para $\neg K_a\neg$ inclui $\langle K_a \rangle$ e $\hat{K}_a$. Essa notação imita a forma diamante $\Diamond$, que é o operador dual padrão para o box $\Box$, o que por sua vez é a notação padrão para o operador modal de quantificação universal (ver o verbete sobre lógica modal)[3]).

Linguagens mais expressivas na lógica epistêmica envolvem a adição de operadores para várias noções de conhecimento de grupos (ver seção 3). Por exemplo, como discutiremos abaixo, o operador de *conhecimento comum* e os chamados operadores dinâmicos são acréscimos importantes na linguagem da lógica epistêmica. Operadores dinâmicos podem indicar, por exemplo, o *pronunciamento público sincero* de que φ: [φ!]. A fórmula $[\varphi!]\psi$ é lida como "se φ é um pronunciamento sincero para todos, então, após o pronunciamento, é o caso que ψ". A questão sobre quais tipos de poderes expressivos são adicionados com o acréscimo de operadores é um tópico de pesquisa que vem sendo ativamente investigado na lógica epistêmica dinâmica[4]. Deste modo, adicionar [φ!] por si mesmo a $\mathcal{L}_{KB}$, por exemplo, *não* adiciona poder expressivo. Contudo, isso ocorre em uma linguagem que também inclui conhecimento comum.

2.2 Atitudes de Ordem Superior

Por exemplo, note que K_aK_ap é uma fórmula em uma linguagem que já introduzimos anteriormente. Ela afirma que o agente a sabe que o agente a sabe que p é o caso. Fórmulas desse tipo, com operadores epistêmicos *aninhados*, expressam uma atitude de *ordem superior*: uma atitude sobre a atitude de algum agente.

Atitudes de ordem superior é tema recorrente na lógica epistêmica. As famosas sentenças de Moore, por exemplo $B_a(p \wedge B_a\neg p)$, expressam uma atitude de ordem superior. Assim fazem muitos dos princípios epistêmicos discutidos na literatura abaixo. Considere o seguinte proeminente princípio epistêmico envolvendo conhecimento de ordem superior: $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$. É razoável exigir que o conhecimento satisfaça esse esquema, isto é, que se alguém sabe que φ, então ele sabe que sabe que φ? Em parte, podemos hesitar antes de aceitar esse princípio em virtude da atitude de ordem superior envolvida. Essa é uma questão ainda em discussão na lógica epistêmica e na epistemologia.

[3]N.T.: https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

[4]N.T.: https://plato.stanford.edu/entries/dynamic-epistemic/

2.3 O Princípio de Partição e a Semântica Modal

As semânticas da linguagem formal introduzidas acima são geralmente apresentadas em termos dos chamados mundos possíveis. Na lógica epistêmica, mundos possíveis são interpretados como alternativas epistêmicas. Hintikka(1962) foi o primeiro a articular explicitamente tal abordagem. Temos outra característica central de sua abordagem para a epistemologia que continua auxiliando novos desenvolvimentos hoje, que pode ser descrita, resumidamente[5], da seguinte maneira:

> **Princípio de Partição:** Qualquer atitude proposicional particiona o conjunto de mundos possíveis entre aqueles que estão em acordo com a atitude e aqueles que não estão.

O princípio de partição pode ser utilizado para proporcionar uma semântica para o operador de conhecimento. Informalmente,

> $K_a\varphi$ é verdadeira no mundo w se, e somente se, φ é verdadeira em todo mundo w' compatível com o que a sabe em w.

Aqui, o agente a sabe que φ somente no caso em que o agente possui informação que elimine toda possibilidade de erro e todo caso em que $\neg\varphi$.

[5]Em 1969, Hintikka escreveu:

> Minha suposição básica (ligeiramente simplificada) é de que a atribuição de qualquer atitude proposicional à pessoa em questão envolve a divisão de todos os mundos possíveis (mais precisamente, todos os mundos nos quais podemos distinguir a parte da linguagem que usamos ao fazer a atribuição) em duas classes: os mundos possíveis que estão de acordo com a atitude em questão, e aqueles mundos que são incompatíveis com ela (p. 25). (Tradução nossa)

Uma visão similar foi defendida através de sua autoria, repercutida em 2007:

> Em uma perspectiva puramente lógica, o conceito de conhecimento envolve uma dicotomia do espaço de todos cenários possíveis entre aqueles que são compatíveis com o que eu sei, e aqueles que são incompatíveis com meu conhecimento. Essa observação é tudo que precisamos para a maioria da lógica epistêmica (p. 15). (Tradução nossa)

2.4 Modelos de Kripke e a Interpretação da Indistinguibilidade do Conhecimento

Desde a década de 1960, os *modelos de Kripke*, definidos abaixo, serviram como base para a maioria das semânticas amplamente utilizadas, em todas variedades de lógica modal. O uso dos modelos de Kripke na representação de conceitos epistêmicos envolve tomar uma posição filosófica no que diz respeito a tais conceitos. Uma interpretação bem compartilhada, principalmente em teorias econômicas e da ciência da computação, entende conhecimento em termos de indistinguibilidade informacional entre mundos possíveis. O que iremos tratar aqui como a *interpretação da indistinguibilidade* remete, pelo menos, a Lehmann (1984).

Como a interpretação da indistinguibilidade é sobre conhecimento, mas não sobre crença, trabalharemos com uma linguagem sem operador de crença. Assim, seja a linguagem $\mathcal{L}_K$ dada por meio do formalismo de Backus-Naur

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \text{ para } p \in \textit{Átomo}.$$

Como veremos, a interpretação da indistinguibilidade envolve exigências muito rigorosas para algo ser qualificado como conhecimento. Nós a introduziremos aqui por razões pedagógicas, apresentando os detalhes formais da interpretação para introduzir e explicar posteriormente posições relativamente menos extremas.

Considere novamente o caso de Zoe, a galinha e o cachorro. O exemplo envolve duas proposições, as quais iremos identificar com átomos formais:

> p é lida como “há uma galinha no quintal”

e

> q é lida como “há um cachorro no quintal”.

Vale a pena enfatizar que, para os propósitos de nossa formalização nesse cenário, essas são as *únicas* proposições que nos interessa. Iremos restringir nossa atenção ao *Átomo* = $\{p, q\}$. Em apresentações recentes de lógica epistêmica, e em muito da lógica epistêmica padrão atual, *todos* os átomos de interesse são incluídos desde o início. Obviamente, esse é um cenário idealizado. É importante notar o que essa abordagem deixa de fora. Considerações que não são capturadas dessa forma inclui o surgimento de novos átomos; a ideia de que outras proposições atômicas podem ser introduzidas em algum estado futuro, por exemplo, via algum processo de aprendizagem, ou a questão da consciência das proposições do agente; o cenário no qual o agente pode estar temporariamente *inconsciente* de algum átomo devido a um fator psicológico ou outro fator (ver seção 4 sobre a assim chamada *consciência lógica*). Por enquanto, o ponto central é que a lógica epistêmica padrão começa com a suposição de que o conjunto *Átomo* esgota o espaço de proposições para o agente.

Com dois átomos, existem quatro diferentes maneiras consistentes para o mundo ser. Podemos retratá-los por caixas:

$$w_1 : \boxed{p, q} \qquad w_2 : \boxed{p, \neg q} \qquad w_3 : \boxed{\neg p, q} \qquad w_4 : \boxed{\neg p, \neg q}$$

As quatro caixas podem ser formalmente representadas pelo conjunto $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, tipicamente chamado de conjunto de **mundos possíveis**. Cada mundo é ainda rotulado com os átomos verdadeiros naquele mundo. Eles são rotulados por meio da função *V*, a **valoração**. A valoração especifica quais átomos são verdadeiros em cada mundo da seguinte maneira: dado um átomo *p*, $V(p)$ é o subconjunto de mundos em que *p* é verdadeira [6]. Que w_1 seja rotulado com p e q, significa que $w_1 \in V(p)$ e $w_1 \in V(q)$. Na ilustração, $V(p) = \{w_1, w_2\}$ e $V(q) = \{w_1, w_3\}$.

Para fins de apresentação, vamos assumir que realmente há uma galinha no quintal, mas não um cachorro. Então w_2 representará o **mundo atual** do modelo. Nas ilustrações, o mundo atual geralmente é destacado:

$$w_1 : \boxed{p, q} \qquad w_2 : \boxed{\boxed{p, \neg q}} \qquad w_3 : \boxed{\neg p, q} \qquad w_4 : \boxed{\neg p, \neg q}$$

[6]Na literatura, a valoração é algumas vezes definida ao contrário, ou seja, definida não como atribuindo a cada átomo um conjunto de mundos, mas atribuindo a cada mundo um conjunto de átomos. No exemplo, olharíamos para $V(w_1)$ como a valoração do mundo, ao invés de $V(p)$ como a valoração do átomo. $V(w_1)$ seria $\{p, q\}$. Ambas as abordagens são equivalentes. A segunda alternativa utilizada, por exemplo no verbete sobre lógica modal, é deixar a valoração como sendo uma função a partir do conjunto de pares de mundos e átomos $W \times$ *Átomo* para o conjunto de valores de verdade, *verdadeiro* e *falso*, $\{T, F\}$. Então $V(w_1, p) = T$ enquanto $V(w_2, q) = F$. Novamente, essa abordagem é equivalente a utilizada aqui.

Agora vamos assumir que a galinha esteja sempre cacarejando, mas o cachorro nunca late, e que, embora Zoe tenha uma audição apurada, ela não consegue ver o quintal. Então existem alguns mundos possíveis que Zoe não é capaz de *distinguir*: possíveis modos como as coisas podem ser, dos quais ela não pode distinguir. Por exemplo, estando em um mundo com somente a galinha $(p, \neg q)$, Zoe não pode dizer se ela está em um mundo com ambos, galinha e cachorro (p, q): sua situação é tal que Zoe está consciente de dois modos como as coisas poderiam ser, mas sua informação não lhe permite eliminar nenhuma delas.

Para ilustrar que um mundo possível não pode ser distinguido de outro, uma seta é tipicamente desenhada do primeiro para o segundo:

Aqui, as setas representam *relações binárias* sobre mundos possíveis. Geralmente, na lógica modal isso é referido como **relação de acessibilidade**. Sob a interpretação da indistinguibilidade da lógica epistêmica, isso é algumas vezes chamado de **relação de indistinguibilidade**. Formalmente, denotamos a relação R_a com o subscrito mostrando a relação pertencente ao agente a. A relação é um subconjunto do conjunto de *pares ordenados* de mundos possíveis, $\{(w, w') : w, w' \in W\}$. Um mundo w "aponta" para outro w' se $(w, w') \in R_a$. Nesse caso, w' é dito como sendo *acessível* (*indistinguível*) a partir de w. Na literatura, isso é geralmente escrito como wR_aw', ou R_aww'. A notação '$w' \in R_a(w)$' é também comum: o conjunto $R_a(w)$ é então o conjunto de mundos acessíveis a partir de w, isto é,

$$R_a(w) := \{w' \in W : (w, w') \in R_a\}$$

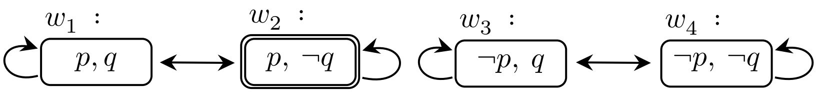
.

Uma nota final: o conjunto $\{(w, w') : w, w' \in W\}$ é geralmente escrito $W \times W$, o *produto cartesiano* de W com ele mesmo.

Para R_a representar fielmente a relação de indistinguibilidade, quais mundos devem se relacionar? Por exemplo, se Zoe está imersa em w_1, ela poderia dizer que não está em w_2? Não: a relação de indistinguibilidade é *simétrica* se a pessoa não é capaz de afirmar a a partir de b, e nem pode afirmar b a partir de a. Uma relação simétrica é tipicamente desenhada omitindo a ponta da seta, ou colocando ela em ambas as direções:

Quais dos mundos restantes são indistinguíveis? Dado que a galinha está sempre cacarejando, Zoe tem a informação que lhe permite distinguir w_1 e w_2, de w_3 e w_4, e *vice versa*, ou seja, simetria. Desse modo, sem seta entre eles. Os mundos w_3 e w_4 são indistinguíveis. Isso nos gera a seguinte representação:

Uma vez que nenhuma informação permitirá que Zoe distingua algo de si mesma, qualquer mundo possível está assim relacionado a si mesmo. A relação de indistinguibilidade é *reflexiva*:



A interpretação padrão do exemplo de Zoe, em termos de mundos possíveis, agora está completa. Antes de nos direcionar para a apresentação geral da interpretação da indistinguibilidade, vamos olhar para o que Zoe sabe.

Recordemos a semântica modal informal do operador de conhecimento visto acima:

> $K_a\varphi$ é verdadeira em um mundo w se, e somente se, φ é verdadeira em todo mundo w' compatível com a informação que a possui em w.

Para conduzir uma definição formal, tome '$w \vDash \varphi$' como significando que φ é verdadeira no mundo w. Assim, podemos definir a verdade de $K_a\varphi$ em w por

> $w \vDash K_a\varphi$ sse $w' \vDash \varphi$ para todo w' tal que wR_aw'.

Essa definição afirma que a sabe φ em um mundo w se, e somente se, φ é o caso em todos os mundos w' em que a não pode distinguir de w.

Assim, onde isso leva Zoe? Primeiramente, a definição nos permite avaliar seu conhecimento em cada um dos mundos, mas vendo que w_2 é o mundo atual, esse é o mundo que nos interessa. Aqui estão alguns exemplos do que podemos dizer do conhecimento de Zoe em w_2:

1. $w_2 \vDash K_a p$. Zoe sabe que a galinha está no quintal, pois todos os mundos indistinguíveis de w_2, que seriam w_1 e w_2, tornam p verdadeira.

2. $w_2 \vDash \neg K_a q$. Zoe não sabe que o cachorro está no jardim, pois um dos mundos indistinguíveis, o próprio w_2, torna q falsa.

3. $w_2 \vDash K_a K_a p$. Zoe sabe que ela sabe que p, pois *a*) $w_2 \vDash K_a p$ (cf. 1.) e *b*) $w_1 \vDash K_a p$.

4. $w_2 \vDash K_a \neg K_a q$. Zoe sabe que ela não sabe que q, pois *a*) $w_2 \vDash \neg K_a q$ (cf. 2.) e *b*) $w_1 \vDash \neg K_a q$.

Poderíamos dizer muito mais sobre o conhecimento de Zoe: toda fórmula da linguagem epistêmica sem operadores de crença pode ser avaliada no modelo. E assim, representar toda informação de ordem superior de Zoe sobre seu próprio conhecimento, dos quais os pontos 3. e 4. são os primeiros exemplos.

Um último ingrediente é exigido antes de apresentar a interpretação da indistinguibilidade em sua forma completa. No exemplo anterior, vimos que a relação de indistinguibilidade era ambos: *simétrica* e *reflexiva*. Formalmente, tais propriedades podem ser definidas da seguinte maneira:

> **Definição:** Uma relação binária $R \subseteq W \times W$ é
> a. ***reflexiva*** sse para todo $w \in W$, wRw
> b. ***simétrica*** sse para todo $w, w' \in W$, se wRw', então $w'Rw$.

O ingrediente perdido é, então, a propriedade relacional de *transitividade*. ‘Menor que’ é um exemplo de propriedade transitiva: seja x menor do que y, e seja y menor do que z, então, x deve ser menor do que z. Assim, dados w_1, w_2 e w_3, se a relação R se mantém entre w_1 e w_2, e entre w_2 e w_3, então a seta entre w_1 e w_3 é consequência da exigência de que a relação seja transitiva:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] w_1 \arrow[r, "\textit{assume}"'] \arrow[rr, bend left, "\textit{implica}"] & w_2 \arrow[r, "\textit{assume}"'] & w_3 \end{tikzcd}$$

Formalmente, a transitividade é definida do seguinte modo:

> **Definição:** A relação binária $R \subseteq W \times W$ é ***transitiva*** sse para todo w, w', $w'' \in W$, se wRw' e $w'Rw''$, então wRw''.

Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva, é chamada de ***relação de equivalência***.

Com todos os componentes no lugar, vamos agora definir o modelo de Kripke:

> **Definição:** Um ***modelo de Kripke*** para $\mathcal{L}_K$ é uma tupla $M = (W, R, V)$ onde
>
> - W é um conjunto não vazio de mundos possíveis,
> - R é uma relação binária sobre W, e
> - V: *Àtomo*$\longrightarrow \mathcal{P}(W)$ é uma valoração

Na definição, '$\mathcal{P}(W)$' denota o conjunto potência de W: consiste em todos subconjunto de W. Assim, $V(p)$, a valoração do átomo p no modelo M, é algum subconjunto de mundos possíveis: aqueles onde p é verdadeiro. Nessa definição geral, R pode ser qualquer relação sobre W.

Para especificar qual mundo é o atual, um último parâmetro é acrescentado ao modelo. Quando o mundo atual é especificado, o modelo de Kripke é comumente chamado *destacado*:

> **Definição:** Um ***modelo de Kripke destacado*** [*pointed Kripke model*] para $\mathcal{L}_K$ é um par (M, w) onde
>
> - $M = (W, R, V)$ é um modelo de Kripke, e
> - $w \in W$

Finalmente podemos definir formalmente a semântica que foi vagamente exposta acima. Isso é feito ao definir a relação entre modelos de Kripke destacados e as fórmulas da linguagem formal. A relação é denotada por '$\vDash$', e é geralmente chamada de ***relação de satisfação***.

A definição se segue da seguinte maneira:

> **Definição:** Seja $M = (W, R_a, V)$ um modelo de Kripke para $\mathcal{L}_K$, e seja (M, w) um modelo de Kripke destacado. Então, para todo $p \in \acute{A}tomo$, e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_K$
>
> | | |
> |---|---|
> | $(M, w) \vDash p$ | sse $w \in V(p)$ |
> | $(M, w) \vDash \neg\varphi$ | sse não $(M, w) \vDash \varphi$ |
> | $(M, w) \vDash (\varphi \wedge \psi)$ | sse $(M, w) \vDash \varphi$ e $(M, w) \vDash \psi$ |
> | $(M, w) \vDash K_a\varphi$ | sse $(M, w') \vDash \varphi$ para todo $w' \in W$ tal que wR_aw' |
>
> A fórmula φ é ***satisfeita*** no modelo destacado (M, w) sse $(M, w) \vDash \varphi$.

Na íntegra, a interpretação da indistinguibilidade sustenta que para K_a capturar conhecimento, a relação R_a deve ser uma relação de equivalência. Um modelo de Kripke destacado no qual isso é satisfeito é geralmente referido como um ***estado epistêmico***. Em estados epistêmicos, a relação é denotada por um til com subscrito: $\sim_a$.

Dado os modelos de Kripke destacados e a interpretação da indistinguibilidade, temos uma especificação semântica de um conceito de conhecimento. Com essa abordagem, podemos construir modelos de situações envolvendo conhecimento, tal como fizemos com o exemplo de Zoe e suas galinhas. Podemos usar esses modelos para determinar o que o agente sabe e o que ele não sabe. Também temos fundamentos formais em mãos para começar a formular questões sobre como o conhecimento, ou incerteza, do agente se desenvolve quando ele recebe *novas informações*, tópico estudado em lógica epistêmica dinâmica[7].

Também podemos fazer perguntas mais gerais sobre o conceito de conhecimento modelado utilizando os modelos de Kripke destacados com relações de indistinguibilidade: ao invés de olhar para o modelo particular no momento e perguntar quais fórmulas o modelo torna verdadeira, podemos perguntar com quais princípios gerais todos esses modelos concordam.

[7] https://plato.stanford.edu/entries/dynamic-epistemic/

2.5 Princípios Epistemológicos na Lógica Epistêmica

Decidir sobre a representação formal correta do conhecimento envolve refletir cuidadosamente sobre os princípios epistemológicos com os quais alguém se compromete. Um exemplo incontroverso de tal princípio, que a maioria dos filósofos aceitaria, é o de veridicalidade:

Se uma proposição é conhecida, então ela é verdadeira

$$K_a\varphi \to \varphi$$

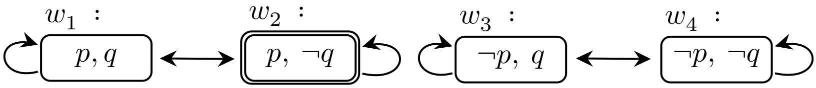
Em um contexto formal, esse princípio pode ser entendido como dizendo que se φ é conhecida, então ela deve sempre ser satisfeita em algum modelo. Se acontecesse de alguém escolher modelos que falsifiquem o princípio de veridicalidade, então a maioria dos filósofos simplesmente condenaria tais modelos como inaceitáveis.

Retornando aos modelos de Kripke destacados, podemos agora perguntar com quais princípios tais modelos estão comprometidos. Para começar a responder tal questão, precisamos compreender a característica mais geral de nosso formalismo. A estratégia na lógica modal em geral (ver Blackburn, de Rijke, & Venema 2001) é abstrair qualquer característica *contingente* de um dado modelo. Características contingentes incluiriam, por exemplo o número específico de mundos em consideração, a valoração específica dos átomos, e a escolha de um mundo atual. Nesse caso, as únicas características que não são contingentes são aquelas exigidas pela definição geral de modelo de Kripke destacado.

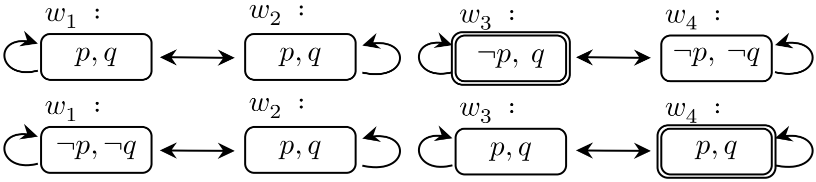
Para abstrair adequadamente, tome um modelo de Kripke destacado $(M, w) = (W, R, V, w)$. Para determinar se a relação desse modelo é uma relação de equivalência, precisamos somente considerar os mundos e a relação. O par destes elementos constituem o nível fundamental do modelo, e é chamado de *estrutura* do modelo:

> **Definição:** Seja $(M, w) = (W, R, V, w)$ um modelo de Kripke destacado. Então o par (W, R) é chamado de ***estrutura*** de (M, w). Qualquer modelo (M', w') que compartilha a estrutura (W, R) é dito como ***construído sobre*** (W, R).

Considere novamente o estado epistêmico para Zoe apresentado acima:



Muitos outros modelos podem ser construídos sobre a mesma estrutura. Estes são dois exemplos:



Com a noção de estrutura, podemos definir a noção interessante de validade. Este é o segundo termo definido a seguir:

> **Definição:** A fórmula φ é dita como ***válida na estrutura*** $F = (W, R)$ sse todo modelo de Kripke destacado construído sobre F satisfaz φ, isto é, sse para todo $(M, w) = (F, V, w) = (W, R, V, w), (M, w) \vDash \varphi$. A fórmula φ é ***válida sobre a classe de estruturas*** F (escrito F $\vDash \varphi$) sse φ é válida em toda estrutura F em F.

O conjunto de fórmulas válidas sobre a classe de estruturas F é chamado de ***lógica*** de F. Denotemos essa lógica, isto é, o conjunto $\{\varphi \in \mathcal{L}_K$: F $\vDash \varphi\}$ por Λ_{F}. Essa é uma abordagem *semântica* para definir lógicas, sendo cada uma apenas um conjunto de fórmulas. Alguém também pode definir lógicas da *prova-teórica* [*proof-theoretically*] ao definir uma lógica como um conjunto de fórmulas passíveis de prova em algum sistema. Com lógicas sendo simplesmente conjunto de fórmulas, resultados de *correção* e *completude* podem ser expressos utilizando inclusão de conjuntos. Para exemplificar, seja A um conjunto de axiomas, e escrevemos A $\vdash \varphi$ quando φ pode ser provada a partir de A utilizando algum conjunto de regras de dedução. Seja a lógica resultante do conjunto de teoremas denotada por Λ_{A}. Este é o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_K$ passível de prova a partir de A, ou seja, o conjunto $\{\varphi \in \mathcal{L}_K$: A $\vdash \varphi\}$. A lógica Λ_{A} é correta relativa à F sse $\Lambda_{\mathsf{A}} \subseteq \Lambda_{\mathsf{F}}$, e completa relativo à F sse $\Lambda_{\mathsf{F}} \subseteq \Lambda_{\mathsf{A}}$ [8].

[8] Esse parágrafo se refere à completude *fraca*. Sobre a diferença entre *completude fraca* e *forte*, e para resultados metateóricos gerais para lógica modal, ver por exemplo Blackburn, de Rijke e Venema (2001)

Retornando à interpretação da indistinguibilidade do conhecimento, podemos então tentar encontrar os princípios epistemológicos com os quais a interpretação está comprometida. Existe uma resposta trivial de pouco interesse direto: seja EQ a classe de estruturas com relações de equivalência. Então a lógica da interpretação da indistinguibilidade é o conjunto de fórmulas $\mathcal{L}_K$, as quais são válidas sobre EQ, isto é, o conjunto $\Lambda_{\mathsf{EQ}} := \{\varphi \in \mathcal{L}_K : \mathsf{EQ} \models \varphi\}$. Não muito informativo.

No entanto, tomar uma abordagem *axiomática* para especificar a lógica, conduz a uma apresentação em termos de princípios mais fáceis de entender. Começando com os mais simples, o princípio T afirma que o conhecimento é *factual*: se o agente sabe que φ, então φ deve ser verdadeira. O princípio mais incômodo K afirma que se o agente conhece uma implicação, então se ele conhece o antecedente ele também conhece o consequente. Ou seja, se incluirmos a regra de derivação *modus ponens* (de $\varphi \to \psi$ e φ, concluímos ψ) como regra em nossa lógica do conhecimento, K afirma que o conhecimento é *fechado sob implicação*. O princípio B afirma que se φ é verdadeiro, então o agente sabe que ele considera φ possível. Finalmente, 4 afirma que se o agente sabe que φ, então ele sabe que conhece φ. T, B e 4 estão na tabela abaixo (os nomes são históricos e sem muito significado):

K	$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$
T	$K_a\varphi \to \varphi$
B	$\varphi \to K_a\hat{K}_a\varphi$
4	$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$

No lugar de intuições epistêmicas, poderíamos discutir o conceito de conhecimento ao discutir esses e outros princípios. Devemos aceitar T como um princípio que o conhecimento obedece? E sobre os outros? Antes de continuar, vamos primeiramente deixar claro como os quatro princípios acima relacionam-se com a interpretação da indistinguibilidade. Para fazer isso, precisamos de uma noção de *lógica modal normal*. Na definição abaixo, assim como nos princípios acima, estamos tecnicamente utilizando *fórmulas esquemas*. Por exemplo, em $K_a\varphi \to \varphi$, o φ é a variável variando sobre as fórmulas em $\mathcal{L}_K$. Assim, falando estritamente, $K_a\varphi \to \varphi$ não é uma fórmula, mas um *esquema* para obter uma fórmula. Uma *instância modal* de $K_a\varphi \to \varphi$ é então uma fórmula obtida ao deixar φ ser uma fórmula concreta de $\mathcal{L}_K$. Por exemplo, $K_ap \to p$ e $K_a(p \wedge K_aq) \to (p \wedge K_aq)$ são ambas instâncias de T.

Definição: Seja $\Lambda \subseteq \mathcal{L}_K$ o conjunto de fórmulas modais. Então Λ é uma lógica modal normal sse Λ satisfaz tudo a seguir:

1. Λ contém todas instâncias modais das tautologias proposicionais clássicas.
2. Λ contém todas instâncias modais de K.
3. Λ é fechada sob *modus ponens*: Se $\varphi \in \Lambda$ e $\varphi \to \psi$, então $\psi \in \Lambda$.
4. Λ é fechada sob *generalização* (a.k.a. *necessitação*): Se $\varphi \in \Lambda$, então $K_a\varphi \in \Lambda$.

Existe uma única menor lógica modal normal (dado o conjunto *Átomo*) a qual contém exatamente o que é exigido pela definição, e *nada mais*. É geralmente chamada de ***lógica modal normal minimal*** e é denotada pelo **K** negrito (não confundir o com K sem negrito denotando o esquema).

A lógica **K** é simplesmente um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_K$, isto é, **K** $\subseteq \mathcal{L}_K$. Os pontos 1-4 oferecem uma perspectiva desse conjunto: eles proporcionam uma *axiomatização*. Geralmente, como abaixo, o esquema K é referido como um axioma, embora realmente as instanciações de K é que são axiomas.

Para **K**, podemos acrescentar princípios adicionais como axiomas (esquemas de axiomas) para obter lógicas mais fortes (lógicas que possuem teoremas adicionais: lógicas Λ para a qual **K** $\subseteq \Lambda$). De interesse imediato é a lógica **S5**:

Definição: A lógica **S5** é a menor lógica modal normal contendo todas instâncias modais de T, B, e 4.

Aqui, então, está a relação entre os quatro princípios acima e a interpretação da indistinguibilidade:

Teorema 1: A lógica **S5** é a lógica da classe de modelos de Kripke destacados construídos sobre estruturas com relações de equivalência. ou seja, **S5** $= \Lambda_{\mathsf{EQ}}$.

Então, o que esse teorema nos diz sobre os princípios de conhecimento? Em uma direção, ele nos diz que se alguém aceitar a interpretação da indistinguibilidade, então ela está implicitamente aceitando os princípios K, T, B e 4 como razoáveis para conhecimento. Na outra direção, ele nos diz que se alguém pensa que **S5** é a lógica apropriada do conhecimento, *e* pensa que modelos de Kripke destacados são modos corretos de representar semanticamente conhecimento, então ele deve aceitar uma relação de equivalência. Se alguém deve interpretar essa relação em termos de indistinguibilidade, no entanto, é uma questão para a qual a lógica não diz nada.

Ao discutir princípios para o conhecimento, pode ser que algum dos quatro acima sejam aceitáveis, enquanto outros não: alguém pode discordar sobre a aceitabilidade de B e 4, enquanto aceita K e T. Ao entender o relacionamento entre **S5** e as relações de equivalência, uma perspectiva mais fina é benéfica: o Teorema 1 pode ser fatiado em pedaços menores refletindo a contribuição dos princípios individuais K, T, 4 e B, para o requisito de equivalência, ou seja, que a relação deva ser ao mesmo tempo reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema 2: Seja $F = (W, R)$ uma estrutura. Então:

- Todas instâncias modais de K são válidas em *F*.
- Todas instâncias modais de T são válidas em *F* sse *R* é reflexivo.
- Todas instâncias modais de B são válidas em *F* sse *R* é simétrico.
- Todas instâncias modais de 4 são válidas em *F* sse *R* é transitivo.

Há inúmeros *insights* ganhos a partir do Teorema 2. Primeiro, se alguém quer usar *qualquer* tipo de modelo de Kripke para capturar conhecimento, então deve aceitar K. Deixando de lado alguns detalhes, alguém deve, de fato, aceitar a lógica completa **K** como sendo a lógica da classe de *todos* modelos de Kripke (ver, por exemplo Blackburn, de Rijke, & Venema 2001).

Em segundo lugar, o teorema mostra que existe um íntima relação entre princípios epistêmicos individuais e as propriedades sobre relação. Por sua vez, isso significa que alguém, de modo geral, pode abordar a "lógica" na lógica epistêmica de duas maneiras, a partir das intuições sobre relações de acessibilidade, ou a partir de intuições sobre princípios epistêmicos.

Muitos sistemas lógicos modais normais mais fracos do que **S5** têm sido sugeridos na literatura. Aqui, vamos especificar as lógicas por seus conjuntos de axiomas modais. Por exemplo, a lógica **K** é dada por {K}, enquanto a **S5** é dada por {K, T, B, 4}. Para estabelecer a nomenclatura, a seguinte tabela contém uma seleção de princípios encontrados na literatura (cf. Aucher 2014 e Blackburn, de Rijke, & Venema 2001), com as propriedades de estrutura que eles caracterizam na linha de baixo. As condições de estrutura não são todas diretas.

Na Tabela (II).1, o subscrito em R_a é omitido para facilitar a leitura, e também o domínio de quantificação *W* sobre os quais as variáveis dos mundos *x, y, z* variam.

K	$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$ Nenhum: *Não aplicável* .
D	$K_a\varphi \to \hat{K}_a\varphi$ Serial: $\forall x \exists y, xRy$.
T	$K_a\varphi \to \varphi$ Reflexivo: $\forall x, xRx$.
4	$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$ Transitivo: $\forall x, y, z$, se xRy e yRz, então xRz.
B	$\varphi \to K_a\hat{K}_a\varphi$ Simétrico: $\forall x, y$, se xRy, então yRx.
5	$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$ Euclidiano: $\forall x, y, z$, se xR_ay e xR_az, então yRz.
.2	$\hat{K}_aK_a\varphi \to K_a\hat{K}_a\varphi$ Confluente: $\forall x, y$, se xRy e xRy', então $\exists z, yRz$ e $y'Rz$.
.3	$(\hat{K}_a\varphi \wedge \hat{K}_a\psi) \to (\hat{K}_a(\varphi \wedge \hat{K}_a\psi) \vee \hat{K}_a(\varphi \wedge \psi) \vee \hat{K}_a(\psi \wedge \hat{K}_a\varphi))$ Sem ramificação para a direita: $\forall x, y, z$, se xRy e xRz, então yRz ou $y = z$ ou zRy.
.3.2	$(\hat{K}_a\varphi \wedge \hat{K}_aK_a\psi) \to K_a(\hat{K}_a\varphi \vee \psi)$ Semi-Euclidiano: $\forall x, y, z$, se xRy e xRz, então zRx ou yRz.
.4	$(\varphi \wedge \hat{K}_aK_a\varphi) \to K_a\varphi$ Desconhecido para os autores: *Não aplicável*.

Tabela (II).1: Princípios epistêmicos e suas condições de estrutura

Adicionar princípios epistêmicos como axiomas à lógica modal normal minimal básica **K** conduz a novas lógicas modais normais. Uma seleção é a Tabela (II).2.

K	{K}
T	{K, T}
D	{K, D}
KD4	{K, D, 4}
KD45	{K, D, 4, 5}
S4	{K, T, 4}
S4.2	{K, T, 4, .2}
S4.3	{K, T, 4, .3}
S4.4	{K, T, 4, .4}
S5	{K, T, 5}

Tabela (II).2: Nomes lógicos e axiomas

Diferentes especificações axiomáticas podem produzir a mesma lógica. Note, por exemplo que as especificações axiomáticas da tabela {K, T, 5} de **S5** não correspondem ao indicado na definição anterior do Teorema 1, {K, T, B, 4}. Note também que existe mais de uma axiomatização de **S5**: todos os axiomas {K, T, 5}, {K, T, B, 4} e { K, D, B, 4}, geram a lógica **S5** (cf., por exemplo Chellas 1980). Uma variação geralmente vista é {K, T, 4, 5}, entretanto, é redundante adicioná-la, uma vez que todas suas instâncias podem ser provadas a partir de K, T e 5. Mas como ambas, 4 e 5, capturam princípios epistêmicos importantes (ver Seção 2.6), 4 é geralmente incluída para o bem da transparência filosófica. Para ver mais sobre equivalências entre lógicas modais, ver, por exemplo o verbete sobre lógica modal [9], ou Chellas (1980) ou Blackburn, de Rijke, e Venema (2001).

Lógicas podem ser mais fortes ou mais fracas que outras, e conhecer as propriedades da estrutura de seus axiomas pode nos ajudar a entender essa relação. Por exemplo, como 4 é derivável de {K, T, 5}, todos os teoremas de **S4** são deriváveis em **S5**. Assim, **S5** é *pelo menos tão forte quanto* **S4**. De fato, **S5** é também *estritamente mais forte*: ele pode provar coisas que **S4** não pode.

[9] https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

Que S5 possa ser axiomatizado por ambos, {K, T, B, 4} e {K, T, 5}, pode ser visto através das propriedades de estrutura dos axiomas: toda relação euclidiana e reflexiva (T e 5) é uma relação de equivalência (T, B e 4). Isso também mostra a redundância de 4: se alguém assume a relação reflexiva e euclidiana, então ele não acrescenta nada novo ao assumir adicionalmente que ela é transitiva. Em geral, ter um entendimento da interação entre propriedades relacionais é de grande ajuda para ver relações entre lógicas modais. Por exemplo, notar que toda relação reflexiva é também serial significa que todas as fórmulas válidas sobre a classe de modelos seriais são também válidas sobre a classe de modelos reflexivos. Assim, todo teorema de **D** também é teorema de **T**. Logo, **T** é ao menos tão forte quanto **D** (isto é, **D** $\subseteq$ **T**). Que **T** é também estritamente mais forte (não é o caso que **T** $\subseteq$ **D**) pode ser mostrado ao encontrar um modelo serial, não-reflexivo, que não satisfaz algum teorema de **T** (por exemplo, $K_a p \to p$).

2.6 Princípios do Conhecimento e da Crença

Com o *background* formal da lógica epistêmica no lugar, é fácil variar ligeiramente a estrutura para acomodar o conceito de crença. Retornemos a linguagem $\mathcal{L}_{KB}$ de ambos, conhecimento e crença:

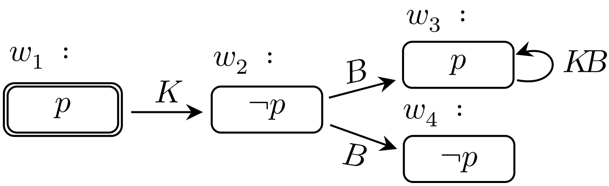
$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\psi \mid B_a\psi, \text{ para } p \in \textit{Àtomo}$$

Para interpretar as fórmulas de conhecimento e crença juntas em um modelo de Kripke destacado, tudo que é necessário é uma relação adicional entre mundos possíveis:

Definição: Um ***modelo de Kripke destacado*** para $\mathcal{L}_{KB}$ é uma tupla $(M, w) = (W, R_K, R_B, V, w)$ onde

- W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis,
- R_K e R_B são relações binárias sobre W,
- $V : \acute{A}tomo \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ é uma valoração, e
- $w \in W$

R_K é a relação para o operador de conhecimento e R_B a relação para o operador de crença. A definição não faz outras suposições sobre suas propriedades. Na figura abaixo, providenciamos uma ilustração onde as setas são rotuladas de acordo com a relação a qual correspondem. A curva reflexiva em w_3 é um rótulo indicando que ela pertence a ambas as relações, ou seja, $(w_3, w_3) \in R_K$ e $(w_3, w_3) \in R_B$.



A relação de satisfação é definida como anteriormente, mas com as mudanças óbvias para conhecimento e crença:

$(M, w) \vDash K_a\varphi$ sse $(M, w') \vDash \varphi$ para todo $w' \in W$ tal que wR_Kw'.
$(M, w) \vDash B_a\varphi$ sse $(M, w') \vDash \varphi$ para todo $w' \in W$ tal que wR_Bw'.

A interpretação da indistinguibilidade coloca requisitos muito fortes sobre a relação de acessibilidade para conhecimento. Esses foram agora despidos e assim possuem algum compromisso com os princípios T, B, D, 4 e 5. Tomando os modelos de Kripke como semântica básica, ainda estamos comprometidos com K, embora esse princípio não seja sem problemas, como veremos abaixo na discussão do problema da onisciência lógica.

Na Tabela 1, os princípios T, D, B, 4 e 5 têm sido mais extensivamente discutidos na literatura sobre lógica epistêmica — para ambos, princípios de conhecimento e princípios de crença. O princípio T para conhecimento

$$K_a\varphi \to \varphi$$

é amplamente aceito. Conhecimento é comumente tomado como sendo *verídico*: somente proposições verdadeiras podem ser conhecidas. Para, por exemplo Hintikka (1962) e Fagin et al. (1995), a falha de T para crença é a diferença definidora entre as duas noções.

Embora crença não seja comumente tomada como verídica, crenças são tipicamente tomadas como *consistentes*. Isto é, o agente é levado a *nunca* acreditar em uma contradição, ou seja, qualquer fórmula equivalente à $(p\wedge\neg p)$ ou resumidamente, $\perp$. O fato de que crença deveria ser consistente é então capturado pelo princípio

$$\neg B_a\perp.$$

O princípio $\neg B_a\bot$ é, nos modelos de Kripke, equivalente ao princípio D, $B_a\varphi \to \hat{B}_a\varphi$. Assim, a validade de $\neg B_a\bot$ requer estruturas seriais. Observe, por exemplo, sua falha em w_1 acima: como não há mundos acessíveis através de R_B, *todos* mundos acessíveis satisfazem $\bot$. Assim, w_1 satisfaz $B_a\bot$, violando consistência. Note também que $\neg B_a\bot$ pode ser reescrito como $\hat{B}_a\top$, o qual é verdadeiro em um mundo somente no caso em que algum mundo é acessível através de R_B. Sua validade assim garante serialidade.

Note que a veracidade de conhecimento garante sua consistência: qualquer estrutura reflexiva é automaticamente serial. Assim, aceitar $K_a\varphi \to \varphi$ implica aceitar $\neg K_a\bot$.

Dos princípios D, 4 e 5, os dois últimos têm recebido a maior atenção, ambos para conhecimento e crença. Eles são comumente interpretados como governando os *princípios de acesso* aos nossos próprios estados mentais. Os princípios 4

$$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$$
$$B_a\varphi \to B_aB_a\varphi$$

são geralmente referidos como *princípios de introspecção positiva*, ou como *princípio 'KK'* para o conhecimento. Ambos princípios são considerados aceitáveis, por exemplo, por Hintikka (1962), por motivos *diferentes* da introspecção. Ele argumenta com base em uma análise autoepistêmica do conhecimento, utilizando uma semântica de mundos possíveis não-Kripkeana chamada *sistemas modelo*. Hintikka sustenta que quando o agente se compromete com o conhecimento de φ o agente se compromete em sustentar a mesma atitude, não importa qual nova informação o agente irá encontrar no futuro. Isso implica, para Hintikaa, que em todas alternativas epistêmicas do agente, em todos conjuntos de modelos (descrições parciais de mundos possíveis) em que o agente sabe ao menos tanto quanto ele sabe agora, o agente continua sabendo que φ. Como $K_a\varphi$ se sustenta em todas alternativas epistêmicas do agente, Hintikka conclui que $K_aK_a\varphi$. Da mesma forma, Hintikka endossa 4 para crença, mas Lenzen levanta objeções (Lenzen 1978: cap. 4).

Williamson argumenta (Williamson 2000: cap. 5) contra a aceitabilidade geral do princípio em um conceito de conhecimento para observações ligeiramente imprecisas, o assim chamado *princípio da margem de erro* (ver, por exemplo Aucher 2014 para um breve resumo).

Os princípios 5

$$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$$
$$\neg B_a\varphi \to B_a\neg B_a\varphi$$

são geralmente referidos como *princípios da introspecção negativa*. Introspecção negativa é bastante controverso na medida em que ele representa demandas muito altas para conhecimento e crença. O esquema 5 pode ser visto como uma *suposição de mundo fechado* (Hendricks 2005): o agente possui uma visão completa de todos os mundos possíveis e sua própria informação. Se $\neg\psi$ é considerado possível ($\hat{K}_a\neg\psi$ ou seja, $\neg K_a\psi$), então o conhecimento do agente é considerado possível ($K_a\neg K_a\psi$). Tal suposição de mundo fechado é natural quando são construídos agentes hiper-racionais, por exemplo na ciência da computação ou teoria dos jogos, nas quais se assume que os agentes raciocinam tão duramente quanto for logicamente possível sobre suas próprias informações enquanto tomam decisões.

Argumentando contra 5, está Hintikka (1962) utilizando sua concepção de alternativas epistêmicas. Tendo aceitado T para conhecimento, 5 se mantém ou cai com a suposição da relação de acessibilidade simétrica. Contudo, argumenta Hintikka, a relação de acessibilidade não é simétrica: se o agente possui alguma quantidade de informação no conjunto modelo s_1, então o conjunto modelo s_2 — no qual o agente aprendeu algo mais — será uma alternativa epistêmica para s_1. Mas s_1 não será uma alternativa epistêmica para s_2, pois em s_1, o agente, por hipótese, não sabe tanto quanto ele sabe em s_2. Assim, a relação não é simétrica, e 5 não é um princípio do conhecimento, na concepção de Hintikka.

Dado a semântica não-padrão de Hintikka, é um pouco difícil definir se ele aceitaria uma lógica modal normal como a lógica do conhecimento e crença, mas se for o caso, então **S4** e **KD4** seriam os candidatos mais próximos (ver Hendricks & Rendsvig 2018 para esse ponto). Em contraste, para conhecimento, von Kutschera (1976) argumenta por **S4.4**, Lenzen (1978) sugere **S4.2**, van der Hoek (1993) argumenta por **S4.3**, e Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995), e muitos outros usam **S5** para conhecimento e **KD45** para crença.

Para além dos princípios governando conhecimento e princípios governando crença, alguém também pode considerar princípios governando a interação entre conhecimento e crença. Três princípios interessantes são

$$K_a\varphi \to B_a\varphi$$

KB1	$B_a\varphi$	$\to$
KB2	$K_aB_a\varphi$	
KB3	$B_a\varphi$	$\to$
	$B_aK_a\varphi$	

Os princípios KB1 e KB2 foram introduzidos por Hintikka, que aceita ambos. Hintikka

(1962) notou que Platão também está comprometido com KB1 no *Teeteto*. O primeiro princípio, KB1, captura a intuição de que conhecimento é uma noção mais forte do que crença. O segundo, como 4 e 5, captura a ideia de que o agente possui acesso privilegiado a suas próprias crenças. O terceiro, decorrente de Lenzen (1978), captura a noção de que crenças são sustentadas com algum tipo de convicção: se algo é acreditado, acredita-se ser conhecido.

Embora os princípios de interação KB1 e KB3 podem parecer inocentes por si só, eles podem conduzir a conclusões contraintuitivas quando combinados com lógicas específicas para conhecimento e crença. Primeiramente, Voorbraak (1993) mostrou que combinar 5 para conhecimento e D para crença com KB1 implica que

$$B_a K_a \varphi \to K_a \varphi$$

é teorema da lógica resultante. Assumindo que o conhecimento é verdadeiro, esse teorema implica que agentes não podem crer saber algo que venha a ser falso.

Se adicionalmente, KB3 é adicionado, as noções de conhecimento e crença *colapsam*. Isto é, pode ser provado que $B_a \varphi \to K_a \varphi$, que, em combinação com KB1 implica

$$B_a \varphi \leftrightarrow K_a \varphi$$

Assim, as duas noções colapsaram em uma. Isso foi apontado em 1986, por Kraus and Lehmann.

Se alguém não quer que conhecimento e crença colapsem, ele deve abrir mão de alguma coisa: ele não pode ter ambos 5 para conhecimento, D para crença, e KB1 e KB3 governando sua interação. Novamente, resultados sobre correspondência entre princípios e propriedades de relação podem auxiliar: em 1993, van der Hoek, baseado em uma análise semântica, mostrou que onde os quatro princípios são conjuntamente suficientes para colapsar, *nenhum subconjunto deles também colapsa*. Abandonar qualquer um dos princípios elimina o colapso. Enfraquecer KB1, valendo apenas para fórmulas não-modais, é também suficiente para evitar o colapso (cf. Halpern 1996).

Para ver mais sobre a interação de princípios epistêmicos, os princípios .2, .3, .3.2. e .4, e relações chamadas *crenças condicionais*, ver Aucher (2014). Para uma introdução a crenças condicionais e relações com muitos outros tipos de conhecimento da literatura filosófica, ver Baltag e Smets (2008). O último também inclui discussões sobre a interdefinibilidade de várias noções, assim como fazem Halpern, Samet e Segev (2009) para conhecimento e crença (não-condicional).

3. Conhecimento em Grupos

Nós seres humanos estamos preocupados com estados epistêmicos de outros agentes. Na vida cotidiana, raciocinamos com um variado grau de sucesso sobre o que os outros sabem. Estamos especialmente preocupados com o que os outros sabem sobre nós, e às vezes especificamente sobre o que eles sabem sobre o que nós sabemos.

> Ela sabe que eu sei onde ela enterrou o tesouro?
> Ela sabe que eu sei que ela sabe?
> E por aí vai.

A lógica epistêmica pode revelar características epistêmicas interessantes de sistemas envolvendo grupos de agentes. Em alguns casos, por exemplo, fenômenos sociais emergentes dependem de agentes raciocinando, de modo particular, sobre o conhecimento e crença de outros agentes. Como vimos, sistemas tradicionais de lógica epistêmica se aplicam somente a casos de um único agente. Entretanto, eles podem ser estendidos para grupos ou sistemas de múltiplos agentes de uma forma relativamente direta.

Como David Lewis notou em sua obra *Convention* (1969), muitas características proeminentes da vida social dependem de os agentes assumirem que as regras de algumas práticas são questões de *conhecimento comum*. Por exemplo, os motoristas sabem que a luz vermelha no semáforo indica que eles devem parar em um cruzamento. No entanto, para a convenção das luzes do semáforo funcionar, é primeiramente necessário que os motoristas também saibam que os outros motoristas sabem que *vermelho* significa *pare*. Além disso, motoristas devem saber também que todo mundo sabe que todo mundo sabe que.... O papel convencional das luzes do semáforo sustenta-se sobre todos os motoristas saberem que todos os motoristas sabem a regra, que a regra é um pedaço de conhecimento comum [10].

Uma variedade de normas, práticas linguísticas e sociais, interações de agentes e jogos, pressupõe conhecimento comum, primeiramente formalizado por Aumann (1976) e com os primeiros tratamentos na lógica epistêmica por Lehmann (1984) e por Halpern e Moses (1984). Para ver como a lógica epistêmica esclarece esse fenômeno, é necessário introduzir

[10] https://plato.stanford.edu/entries/common-knowledge/

um pouco mais de formalismo. Seguindo o tratamento padrão (ver, por exemplo Fagin et al. 1995), podemos sintaticamente ampliar a linguagem da lógica proposicional com n operadores de conhecimento, um para cada agente envolvido no grupo de agentes em consideração. A diferença primária entre semânticas para o agente único e as semânticas para múltiplos agentes é basicamente que n relações de acessibilidade são introduzidas. Um sistema modal para n agentes é obtido ao unir n lógicas modais onde, por simplicidade, assumi-se que os agentes são homogêneos, no sentido em que todos eles podem ser descritos pelo mesmo sistema lógico. Uma lógica epistêmica para n agentes consiste de n cópias de uma certa lógica modal. Em tal lógica epistêmica estendida é possível expressar que algum agente no grupo conhece um certo fato, que um agente sabe que outro agente conhece um fato, etc. É possível desenvolver a lógica ainda mais: não somente um agente poderia saber que outro agente sabe um fato, mas todos eles podem conhecer esse fato simultaneamente.

3.1 Linguagens e Modelos para Múltiplos Agentes

Para representar conhecimento para um conjunto $\mathcal{A}$ de n agentes, primeiro vamos estipular uma linguagem. Seja $\mathcal{L}_{Kn}$ dado pelo *formalismo de Backus-Naur*

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_i\varphi \text{ para } p \in \acute{A}tomo, i \in \mathcal{A}.$$

Para representar conhecimento para todos os n agentes em conjunto, em modelos de Kripke destacados, é necessário apenas acrescentar adequadamente várias relações:

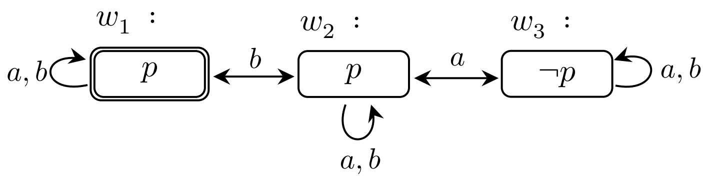
Definição: Um ***modelo de Kripke destacado*** para $\mathcal{L}_{Kn}$ é uma tupla $(M, w) = (W, \{R_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V, w)$ onde

- W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis,
- Para todo $i \in \mathcal{A}, R_i$ é uma relação binária sobre W,
- $V : \acute{A}tomo \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ é uma valoração, e
- $w \in W$

Para incorporar também crenças, simplesmente aplica-se o mesmo movimento como no caso de agente único: aumenta-se a linguagem para que haja duas relações para cada agente.

A definição utiliza uma família de relações $\{R_i\}_{i\in\mathcal{A}}$. Na literatura, o mesmo é denotado por $(W, R_i, V, w)_{i\in\mathcal{A}}$. Alternativamente, R é tomado como sendo uma função enviando agentes para relações, ou seja, $R : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(W \times W)$. Então, para cada $i \in \mathcal{A}$, $R(i)$ é a relação sobre W, geralmente denotada R_i. Essas são escolhas de estilo.

Quando considerando somente um único agente, é tipicamente irrelevante incluir mais mundos em W do que possíveis valorações de átomos. No caso de múltiplos agentes, isso não é o caso: para expressar as diferentes formas de conhecimento de ordem superior disponível, muitas cópias do "mesmo" mundo são necessárias. Vamos exemplificar para $\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\acute{A}tomo = \{p\}$ e cada $R_i, i \in \mathcal{A}$, uma relação de equivalência. Vamos representar que ambos a e b sabem que p, mas b não sabe que a sabe que p, isto é, $K_a p \wedge K_b p \wedge \neg K_b K_a p$. Então precisamos de três mundos:



Se tentarmos deixar w_1 desempenhar o papel de w_2, então a perderia conhecimento em p: ambos os mundos p são necessários. Em geral, se W é assumido como tendo qualquer tamanho fixo, finito, haverá alguma fórmula com informação de ordem superior que não poderá ser satisfeita nele.

3.2 Noções de Conhecimento de Grupo

Sistemas de múltiplos agentes são interessantes por outras razões para além de representar informação de ordem superior. A informação dos agentes individuais pode ser agrupada para capturar o que os agentes sabem em conjunto, como conhecimento de grupo (ver Baltag, Boddy, & Smets 2018 para uma discussão recente). Uma noção padrão nesse estilo é a de *conhecimento distribuído*: o conhecimento que o grupo *teria* se os agentes compartilhassem todo seu conhecimento individual. Para representá-lo, aumentamos a linguagem $\mathcal{L}_{Kn}$ com operadores

$$D_G \text{ para } G \subseteq \mathcal{A},$$

para tornar $D_G\varphi$ uma fórmula bem formada. Onde $G \subseteq \mathcal{A}$ é um grupo de agentes, a fórmula $D_G\varphi$ lê-se que é *conhecimento distribuído no grupo G, que* φ.

Para avaliar $D_G\varphi$, definimos uma nova relação a partir daquelas já apresentadas no modelo. A ideia por trás da definição é que se algum agente eliminou um mundo como alternativa epistêmica, assim fará o grupo. Definimos a relação como a intersecção das relações dos agentes individuais:

$$R_G^D = \bigcap_{i \in G} R_i$$

No modelo de três estados, R_G^D contém somente três setas rotacionadas. Para avaliar uma fórmula de conhecimento distribuído, utilizamos o mesmo formalismo como para os outros operadores modais:

$$(M, w) \vDash D_G\varphi \text{ sse } (M, w') \vDash \varphi \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wR_G^D w'.$$

Pode ser o caso que um agente muito conhecedor saiba tudo que é conhecimento distribuído em G, mas isso não é garantido. Para capturar que todos os agentes sabem que φ, podemos utilizar a conjunção de fórmulas $K_i\varphi$ para $i \in \mathcal{A}$, isto é, $\bigwedge_{i \in \mathcal{A}} K_i\varphi$. Esta é uma fórmula bem definida se $\mathcal{A}$ for finito (o que tipicamente é o caso). Se $\mathcal{A}$ não for finito, então $\bigwedge_{i \in \mathcal{A}} K_i\varphi$ não é uma fórmula em $\mathcal{L}_{Kn}$, pois ela possui apenas conjunções finitas. Como uma abreviação para $\bigwedge_{i \in \mathcal{A}} K_i\varphi$, é comum introduzir o operador *todos sabem*, E_G:

$$E_G\varphi := \bigwedge_{i \in \mathcal{A}} K_i\varphi$$

No modelo de três mundos, $K_a p \wedge K_b p$, então $E_{\{a,b\}}p$.

Todos saberem algo não significa que esse conhecimento é compartilhado entre os membros do grupo. O modelo de três mundos exemplifica isso: apesar de $E_{\{a,b\}}p$, também é o caso que $\neg K_b E_{\{a,b\}}p$.

Para capturar que não há incerteza no grupo sobre φ, nem *qualquer incerteza de ordem superior* sobre φ ser conhecida por todos os agentes, nenhuma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_{Kn}$ é suficiente. Considere a fórmula

$$E_G^k\varphi$$

onde E_G^k é a abreviação para k interações do operador E_G. Então, para nenhum número natural k a fórmula $E_G^k\varphi$ será suficiente: poderia ser o caso que b não a conheça! Para retificar essa situação, poderíamos tentar

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_G^k\varphi$$

mas essa não é uma fórmula, pois $\mathcal{L}_{Kn}$ contém apenas conjunções finitas.

Assim, embora o operador E_G seja definível na linguagem $\mathcal{L}_{Kn}$, uma noção apropriada de *conhecimento comum* não o é. Para isso, precisamos novamente definir uma nova relação em nosso modelo. Desta vez, estamos interessados em capturar que ninguém considera φ epistemicamente possível *em lugar algum*. Para construir a relação, precisamos primeiramente tomar a união das relações de todos os agentes em G, mas isso não é suficiente: para utilizar a cláusula da semântica modal padrão, devemos ser capazes de atingir todos os mundos nessa relação em *um único passo*. Assim, seja

$$R_G^C := \left(\bigcup_{i\in G} R_i\right)^*$$

onde $(\cdot)^*$ é a operação de tomar o *fechamento transitivo*. Se R é uma relação, então $(R)^*$ é R mais todos os pares que faltam para tornar R uma relação transitiva. Considere o modelo de três mundos: com a relação $\bigcup_{i\in\{a,b\}} R_i$, podemos atingir w_3 a partir de w_1 em dois passos, parando sobre w_2. Com $(\bigcup_{i\in\{a,b\}} R_i)^*$, w_3 é atingível em um passo: pelo mais recentemente adicionado *link* transitivo de w_1 para w_3.

Para representar conhecimento comum, aumente o *formalismo de Backus-Naur* de $\mathcal{L}_{Kn}$ com operadores

$$C_G \text{ para } G \subseteq \mathcal{A},$$

para tornar $C_G\varphi$ uma fórmula bem formada. Avalie tais fórmulas pela cláusula semântica

$$(M, w) \vDash C_G\varphi \text{ sse } (M, w') \vDash \varphi \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wR_G^C w'.$$

Variar as propriedades das relações de acessibilidade $R_1, R_2, ..., R_n$, tal como descrito acima, resulta em diferentes lógicas epistêmicas. Por exemplo, o sistema **K** com conhecimento comum é determinado por todas estruturas, enquanto o sistema **S4** com conhecimento comum é determinado por todas estruturas reflexivas e transitivas. Resultados similares podem ser obtidos para as lógicas epistêmicas restantes (Fagin et al. 1995). Para saber mais, consulte o verbete sobre conhecimento comum[11].

4. Onisciência Lógica

A principal queixa contra a abordagem tomada pelos lógicos epistêmicos é de que eles estão comprometidos com uma imagem excessivamente idealizada do raciocínio humano. Os críticos têm notado que a semântica relacional da lógica epistêmica se compromete com uma propriedade de fechamento que é implausivelmente forte para o conhecimento de um agente, dado as habilidades atuais do raciocínio humano. As propriedades de fechamento dão origem ao que tem sido chamado o problema da onisciência lógica:

> Sempre que o agente c conhece todas as fórmulas em um conjunto Γ, e A segue-se logicamente de Γ, então c também sabe que A.

Em particular, c conhece todos os teoremas (sendo $\Gamma = \emptyset$), e conhece todas as consequências lógicas de qualquer fórmula que o agente conhece (sendo que Γ consiste em uma única fórmula). A preocupação aqui é que agentes finitos são restringidos por limites sobre suas capacidades cognitivas e habilidades de raciocínio. A concepção de conhecimento e crença que a lógica epistêmica parece estar comprometida envolve habilidades super-humanas, como o conhecimento de todas as tautologias. Assim, uma preocupação é que a lógica epistêmica seja simplesmente inadequada para capturar conhecimento e crença atual tal como essas noções aparecem na vida humana cotidiana.

Hintikka reconheceu, já nas primeiras páginas de *Knowledge and Belief*, a discrepância entre as regras da lógica epistêmica e o modo como o verbo "saber" é utilizado ordinariamente. Ele aponta que

> é claramente inadmissível inferir "ele sabe que q" a partir de "ele sabe que p" somente sobre a base de que q segue-se logicamente de p, pois a pessoa em questão pode falhar em ver que p acarreta q, particularmente se p e q são sentenças relativamente complicadas (1962, p. 30-31).

[11] https://plato.stanford.edu/entries/common-knowledge/

A primeira reação de Hintikka, ao que viria a ser chamado de problema da onisciência lógica, foi notar a discrepância entre o uso ordinário de termos como "consistência" e o tratamento formal do conhecimento, como indicando um problema com nossa terminologia ordinária. Se uma pessoa conhece os axiomas de uma teoria matemática, mas é incapaz de formular consequências distantes dessa teoria, Hintikka nega que seja apropriado chamar essa pessoa de inconsistente. Em questões humanas cotidianas, Hintikka afirma, a acusação de inconsistência quando atribuída a um agente confere-lhe uma conotação de ser irracional ou desonesto. Assim, da perspectiva de Hintikka, devemos escolher outro termo para capturar a situação de alguém que é racional, aberto a persuasão ou correção, mas não é logicamente onisciente. Agentes racionais, não-oniscientes, podem estar em posição de dizer que "eu sei que p, mas não sei se q", mesmo no caso em que q segue-se de p. Ele então sugere que q deva ser tratada como *defensível*, dado o conhecimento do agente, e a negação de q deve ser tratada como *indefensível*. Essa escolha de terminologia foi criticada na medida em que ela anexa o pejorativo *indefensível* a algum conjunto de proposições, mesmo que a falha atual se repouse sobre as capacidades cognitivas dos agentes (Chisholm 1963; Hocutt 1972; Jago 2007).

A primeira lógica epistêmica de Hintikka pode ser entendida como um modo de raciocinar sobre o que está implícito no conhecimento dos agentes, mesmo em casos onde o próprio agente é incapaz de determinar o que está implícito. Tal abordagem arrisca ser excessivamente idealizada e sua relevância para entender as circunstâncias epistêmicas humanas pode ser questionada sobre esses fundamentos.

Poucos filósofos ficaram satisfeitos com a tentativa de Hintikka de revisar nosso uso ordinário do termo "consistência", tal como apresentado em *Knowledge and Belief*. Entretanto, ele e outros rapidamente providenciaram modos mais populares de lidar com a onisciência lógica. Na década de 1970, respostas ao problema da onisciência lógica introduziram entidades semânticas que explicam por que o agente parece ser, mas de fato não é realmente culpado pela onisciência lógica. Hintikka chamou essas entidades de "mundos possíveis impossíveis" (1979; ver também o verbete sobre mundos impossíveis[12], e Jago 2014). A ideia básica é que um agente pode erroneamente considerar, entre os mundos consistentes com seu conhecimento, alguns mundos que contenham contradições lógicas. O erro é simplesmente um produto dos recursos limitados do agente; o agente pode não estar em condição de detectar a contradição e pode erroneamente considerá-los como possibilidades

[12]https://plato.stanford.edu/entries/impossible-worlds/

genuínas. Em algum sentido, essa abordagem pode ser entendida como uma extensão da já mencionada resposta a onisciência lógica que Hintikka já tinha esboçado em *Knowledge and Belief*.

No mesmo espírito, entidades chamadas de mundos "aparentemente possíveis" são introduzidas por Rantala (1975) em sua análise modelo-urna da onisciência lógica. Permitindo mundos possíveis impossíveis, ou aparentemente possíveis, no qual a valoração semântica das fórmulas é arbitrária até certa medida, proporciona um modo de tornar a aparência da onisciência lógica menos ameaçadora. Além disso, em qualquer concepção realista de agência epistêmica, é provável que o agente considere (mesmo que inadvertidamente) mundos em que as leis da lógica não se sustentam. Uma vez que nenhum princípio epistêmico real se sustenta de modo amplo o suficiente para abranger mundos impossíveis ou aparentemente possíveis, algumas condições devem ser aplicadas aos modelos epistêmicos de modo que eles sejam coerentes com princípios epistêmicos (para uma crítica a essa abordagem, ver Jago 2007: 336-337).

Como alternativa ao desenho de lógicas nas quais os operadores de conhecimento não exibem onisciência lógica, a *lógica da consciência* (*awareness logic*) oferece uma alternativa: mude a interpretação de $K_a\varphi$ de "a sabe que φ" para "a *implicitamente* sabe que φ", e tome conhecimento *explícito* de φ como sendo conhecimento implícito de φ *e* consciência de φ. Com consciência não sendo fechada sob consequência lógica, tal movimento permite uma noção de conhecimento explícito não logicamente onisciente. Como agentes não têm que computar seu conhecimento implícito, nem podem ser responsabilizados por responderem dúvidas baseadas sobre ele, onisciência lógica é problemática somente para conhecimento explícito, o *problema* da onisciência lógica é assim evitado. Embora a onisciência lógica seja uma condição epistemológica para o conhecimento implícito, o próprio agente pode realmente falhar em realizar essa condição. Para saber mais sobre a lógica da consciência, ver o seminal Fagin & Halpern (1987) ou Velazquez-Quesada (2011) e Schipper (2015) para outras visões.

Debates sobre os vários tipos de idealização envolvida na lógica epistêmica estão ocorrendo em ambos os contextos: filosófico e interdisciplinar.

Referências Bibliográficas

Horacio Arló-Costa, Vincent F Hendricks, Johan van Benthem, Henrik Boensvang, and Rasmus K Rendsvig. *Readings in formal epistemology*. Springer, 2016.

Sergei Artemov and Elena Nogina. Introducing justification into epistemic logic. *Journal of Logic and Computation*, 15(6):1059–1073, 2005.

Guillaume Aucher. Principles of knowledge, belief and conditional belief. In *Interdisciplinary Works in Logic, Epistemology, Psychology and Linguistics*, pages 97–134. Springer, 2014.

Robert J Aumann. Agreeing to disagree. *The annals of statistics*, pages 1236–1239, 1976.

Alexandru Baltag and Sonja Smets. A qualitative theory of dynamic interactive belief revision. *Logic and the foundations of game and decision theory (LOFT 7)*, 3:9–58, 2008.

Alexandru Baltag, Rachel Boddy, and Sonja Smets. Group knowledge in interrogative epistemology. In *Jaakko Hintikka on Knowledge and Game-Theoretical Semantics*, pages 131–164. Springer, 2018.

Patrick Blackburn, Maarten De Rijke, and Yde Venema. *Modal logic: graph. Darst*, volume 53. Cambridge University Press, 2002.

E Boër Steven and William G Lycan. Knowing who, 1986.

Ivan Boh. *Epistemic logic in the later middle ages*. Psychology Press, 1993.

Brian F Chellas. *Modal logic: an introduction*. Cambridge university press, 1980.

Roderick M Chisholm. The logic of knowing. *The journal of philosophy*, 60(25):773–795, 1963.

Hans Ditmarsch, Joseph Y Halpern, Wiebe van der Hoek, and Barteld Pieter Kooi. *Handbook of epistemic logic*. College Publications, 2015.

Ronald Fagin and Joseph Y Halpern. Belief, awareness, and limited reasoning. *Artificial intelligence*, 34(1):39–76, 1987.

Ronald Fagin, Yoram Moses, Joseph Y Halpern, and Moshe Y Vardi. *Reasoning about knowledge*. MIT press, 1995.

Paul Gochet and Pascal Gribomont. Epistemic logic. In *Handbook of the History of Logic*, volume 7, pages 99–195. Elsevier, 2006.

Joseph Y Halpern. Should knowledge entail belief? *Journal of Philosophical Logic*, 25(5): 483–494, 1996.

Joseph Y Halpern and YO Moses. Knowledge and common knowledge in a distributed systems. In *proceedings of the 3rd ACM Conference on Principles of distributed computing*, 1984.

Joseph Y Halpern, Dov Samet, and Ella Segev. Defining knowledge in terms of belief: The modal logic perspective. *The Review of Symbolic Logic*, 2(3):469–487, 2009.

VF Hendricks and J Symons. Where's the bridge? epistemic logic and epistemology. *Philosophical Studies*, 128(1):2–26, 2006.

Vincent F Hendricks. *Mainstream and formal epistemology*. Cambridge University Press, 2006.

Vincent F Hendricks and Rasmus K Rendsvig. Hintikka's knowledge and belief in flux. In *Jaakko Hintikka on Knowledge and Game-Theoretical Semantics*, pages 317–337. Springer, 2018.

Jaakko Hintikka. Knowledge and belief: an introduction to the logic of the two notions. 1962.

Jaakko Hintikka. Semantics for propositional attitudes. In *Models for modalities*, pages 87–111. Springer, 1969.

Jaakko Hintikka. Impossible possible worlds vindicated. In *Game-theoretical semantics*, pages 367–379. Springer, 1979.

Jaakko Hintikka. (2007) epistemology without knowledge and without belief. *From the WAB archives: A selection from the Bergen Wittgenstein archives' Working Papers and audio-visual materials*, 2005.

Jaakko Hintikka and John Symons. Systems of visual identification in neuroscience: Lessons from epistemic logic. *Philosophy of Science*, 70(1):89–104, 2003.

Max O Hocutt et al. Is epistemic logic possible? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4): 433–453, 1972.

Wesley H Holliday. Epistemic logic and epistemology. In *Introduction to Formal Philosophy*, pages 351–369. Springer, 2018.

Mark Jago. Hintikka and cresswell on logical omniscience. *Logic and Logical Philosophy*, 15 (4):325–354, 2006.

Mark Jago. *The impossible: An essay on hyperintensionality*. OUP Oxford, 2014.

Simo Knuuttila. *Modalities in medieval philosophy*, volume 29. Routledge, 2019.

Sarit Kraus and Daniel Lehmann. Knowledge, belief and time. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 186–195. Springer, 1986.

Franz Kutschera. *Einführung in die intensionale Semantik*. de Gruyter, 1976.

Daniel Lehmann. Knowledge, common knowledge and related puzzles (extended summary). In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 62–67, 1984.

Wolfgang LENZEN. Recent work in epistemic logic. *Acta Philosophica Fennica*, 1978.

Wolfgang Lenzen. Glauben, wissen und wahrscheinlichkeit. systeme der epistemischen logik. 1985.

David Lewis. *Convention: A philosophical study*. John Wiley and Sons, 2008.

JJ Meyer. Ch., van der hoek, w.: Epistemic logic for ai and computer science. *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*, 41, 1995.

John-Jules Ch Meyer. Epistemic logic. In *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, page 183 – 202. John Wiley & Sons, 2001.

F Velázquez Quesada. *Small Steps in the Dynamics of Information*. PhD thesis, Dissertation, ILLC, University of Amsterdam, 2011.

Veikko Rantala. Urn models: a new kind of non-standard model for first-order logic. In *Game-Theoretical Semantics*, pages 347–366. Springer, 1979.

Rasmus K Rendsvig. Modeling semantic competence: A critical review of frege's puzzle about identity. In *New Directions in Logic, Language and Computation*, pages 140–157. Springer, 2010.

Bryan Renne. *Dynamic epistemic logic with justification*. Citeseer, 2008.

Burkhard C Schipper. Awareness. *Available at SSRN 2401352*, 2015.

Robert Stalnaker. On logics of knowledge and belief. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 128(1):169–199, 2006.

Williamson Timothy. *Knowledge and its Limits*. Oxford University Press, Oxford, 2000.

Johan Van Benthem. Epistemic logic and epistemology: The state of their affairs. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 128(1): 49–76, 2006.

Johan Van Benthem. *Logical dynamics of information and interaction*. Cambridge University Press, 2011.

Wiebe van der Hoek. Systems for knowledge and belief. 1993.

Hans Van Ditmarsch and Gabriel Sandu. *Jaakko Hintikka on Knowledge and Game-Theoretical Semantics*, volume 12. Springer, 2018.

Hans Van Ditmarsch, Wiebe van Der Hoek, and Barteld Kooi. *Dynamic epistemic logic*, volume 337. Springer Science & Business Media, 2007.

Franciscus Petrus Johannes Maria Voorbraak. *As far as I know: Epistemic logic and uncertainty*. Universiteit Utrecht, Faculteit Wijsbegeerte, 1993.

Yanjing Wang. A logic of knowing how. In *International Workshop on Logic, Rationality and Interaction*, pages 392–405. Springer, 2015.

Yanjing Wang. Beyond knowing that: A new generation of epistemic logics. In *Jaakko Hintikka on Knowledge and Game-Theoretical Semantics*, pages 499–533. Springer, 2018.

Georg Henrik Wright. *An essay in modal logic*, volume 5. North-Holland Publishing Company, 1951.

(III) Lógica Temporal[1]

Título Original: Temporal Logic
Autores: Valentin Goranko e Antje Rumberg
Tradução: Vítor M. Costa
Revisão: Raoni A. Wohnrath

O termo *Lógica Temporal*[2] tem sido amplamente utilizado para cobrir todas as abordagens ao raciocínio sobre informação temporal e do tempo, bem como sua representação formal em uma estrutura lógica[3], e também mais estritamente para se referir especificamente ao tipo[4] de abordagem lógico-modal introduzida por volta de 1960 por Arthur Prior sob o nome de *Lógica de Tempo Verbal*[5] e posteriormente mais desenvolvida por muitos lógicos e cientistas da computação. Aplicações da Lógica Temporal incluem seu uso como um formalismo para esclarecer questões filosóficas sobre o tempo, como uma estrutura[6] na qual se define a semântica de expressões temporais em linguagem natural, como uma linguagem para codificar conhecimento temporal em inteligência artificial, e também como ferramenta para a

---

[1]GORANKO, Valentin; RUMBERG, Antje. "Temporal Logic", In: ZALTA, E. N. (ed.). Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer Edition. Stanford, CA: The Metaphysics Research Lab, 2019. Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-temporal/. Acesso em: 21 de mar. 2022. A seguir está a tradução da entrada sobre Lógica Temporal de Valentin Goranko e Antje Rumberg na Stanford Encyclopedia of Philosophy. A tradução segue a versão da entrada nos arquivos da SEP em https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-temporal/. Esta versão traduzida pode diferir da versão atual da entrada, que pode ter sido atualizada desde o momento desta tradução. A versão atual está localizada em https://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/. Gostaríamos de agradecer aos editores da Stanford Encyclopedia of Philosophy, principalmente o Prof. Dr. Edward Zalta, por concederem permissão para traduzir e publicar esta entrada.

[2]Nota do Tradutor (N.T.): "*Temporal Logic*".

[3]N.T.: "*logical framework*".

[4]N.T.: "*type*". Doravante também traduziremos '*kind*' pelo mesmo termo em português, 'tipo'.

[5]N.T.: "*Tense Logic*", daí de posteriormente tal lógica ser abreviada por 'TL'.

[6]N.T.: "*framework*". Onde, no lugar de *framework*, aparecer *structure* ou *frame*, receberá o mesmo termo em português ('estrutura') sem menção em nota.

especificação, a análise formal e a verificação das execuções de programas e sistemas de computador.

Aqui forneceremos um panorama amplamente representativo, porém conciso e inevitavelmente incompleto, da rica variedade de modelos e lógicas temporais introduzidos e estudados nos últimos 50 anos.

1. O raciocínio temporal da antiguidade aos dias modernos

Discussões sobre a temporalidade e o raciocínio sobre o tempo remontam a antiguidade, e exemplos podem ser encontrados mesmo na Bíblia (Boyd, 2004). O famoso paradoxo da flecha voadora de Zenão refere-se à natureza do tempo e aborda a noção correspondente de mudança. Grande parte da discussão temporal inicial, contudo, circundou o problema dos *futuros contingentes*, ou seja, a questão de se saber enunciados[7] sobre eventos futuros que não são necessários nem impossíveis e podem ter valores de verdade definidos. O exemplo mais amplamente conhecido e provavelmente mais citado é o cenário do combate marítimo discutido por Aristóteles em *Sobre Interpretação* (Capítulo 9). Aristóteles argumentou que enunciados tais como ”Haverá uma batalha naval amanhã”, bem como a predição contrária ”Não haverá uma batalha naval amanhã”, não são necessários e, portanto, carecem de um valor de verdade definido no presente, isso admitindo-se que é necessário que ou haverá uma batalha naval amanhã ou não. Umas poucas décadas mais tarde, o filósofo Diodoro Crono demonstrou o problema dos futuros contingentes em seu famoso Argumento do Dominador, o qual levou-o a definir o possível enquanto ”o que é ou será o caso”. Uma discussão detalhada do argumento de Diodoro é fornecida em *e.g.* Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XVII) e o verbete[8] sobre futuros contingentes.

Discussões filosóficas sobre o tempo e o futuro contingente continuaram na Idade Média, onde o tema foi retomado por escritores tais como Peter Aureole, William de Ockham, e Luis Molina. No centro do foco estava a questão de como reconciliar a presciência de Deus com a ideia da liberdade humana. Ockham, por exemplo, adotou a ideia de um futuro verdadeiro ou atual/real, sustentando que enunciados de futuro contingente são ou verdadeiros ou falsos mesmo que apenas Deus saiba seus valores de verdade. De acordo com Ockham, isso não

[7] N.T.: “*statements*”.

[8] N.T.: “*entry*”. O autor se refere nesta indicação (como em outras posteriormente neste texto) a outros verbetes da Stanford Encyclopedia of Philosophy.

significa dizer, contudo, que contingentes futuros são necessários, significando que existem possibilidades alternativas para, a partir delas, os humanos escolherem. Mais tarde, vários filósofos e lógicos engajaram-se no problema de relacionar a temporalidade com o livre-arbítrio, o indeterminismo, e o futuro aberto, propondo várias soluções diferentes. C. S. Peirce opôs-se à ideia de que futuros contingentes podem ter valores de verdade definidos. Avançou na visão de que somente o presente e o passado são atuais/reais enquanto o futuro é o reino da possibilidade e da necessidade. Em um espírito similar, J. Łukasiewicz concebeu uma lógica trivalorada/trivalente, tratando os valores de verdade dos enunciados de futuro contingente como indeterminados. Para uma discussão filosófica mais recente sobre livre-arbítrio, indeterminismo e futuro aberto, ver *e.g.* Belnap *et al.* (2001) e Müller (2014).

A era moderna da lógica temporal formal foi iniciada pelo trabalho seminal de Arthur N. Prior, com precursores importantes tais como H. Reichenbach, J. Findlay, J. Łukasiewicz e J. Łoś.[9] Desde o início dos anos 1950, Prior introduziu e analisou em detalhes ao longo de mais de uma década várias diferentes versões de Lógica de Tempo Verbal, muitas das quais são discutidas abaixo. A invenção de Prior da Lógica de Tempo Verbal foi, em grande parte, movida por considerações filosóficas. Em particular, o Argumento do Dominador de Diodoro Crono e a intrincada relação entre tempo, o (in)determinismo, a presciência de Deus e a liberdade humana desempenharam um papel central em sua obra. Prior estava convencido de que uma abordagem lógica apropriada poderia ajudar a clarificar e resolver tais problemas filosóficos. Introduziu operadores temporais, estudou a lógica de tempo verbal métrica, foi um pioneiro em lógica temporal híbrida, desenvolveu duas versões de lógica temporal de tempo ramificado, as quais adotou para refletir sobre as visões de Ockham e Peirce, respectivamente, etc. Seu trabalho pavimentou o caminho para o desenvolvimento do vasto e diverso campo da lógica temporal, com numerosas aplicações importantes não somente em filosofia, mas também em ciência da computação, inteligência artificial e linguística. Para mais sobre as visões e os trabalhos de Prior, ver Hasle *et al.* (2017); Blackburn *et al.* (2019); e o verbete sobre Arthur Prior. Um panorama abrangente da história do raciocínio temporal e das lógicas é fornecido em Øhrstrøm e Hasle (1995) e Dyke e Bardon (2013, Parte I).

[9] Tkaczyk e Jarmużek (2019) enfatizaram recentemente a contribuição de Łoś para o surgimento da lógica temporal. O artigo deles foi seguido por uma resposta a Øhrstrøm e Hasle (2019), clarificando a influência de Łoś sobre Prior.

2. Modelos formais de tempo

A natureza ontológica e as propriedades do tempo dão origem a questões filosóficas fundamentais, as quais encontram sua expressão na rica variedade de modelos formais de tempo empregados em lógicas temporais. Por exemplo, o tempo é baseado em instantes ou em intervalos? É ele discreto, denso ou contínuo? Tem o tempo um começo ou um fim? É linear, ramificado ou circular? Antes de nos voltarmos para a linguagem formal das lógicas temporais e suas semânticas, introduziremos brevemente abaixo os dois tipos mais básicos de modelos formais de tempo juntamente com algumas de suas propriedades pertinentes: modelos baseados em instantes e modelos baseados em intervalos.

2.1 Modelos de tempo baseados em instantes

Em modelos baseados em instantes as entidades temporais primitivas são pontos no tempo, a saber[10], *instantes de tempo*, e as relações básicas entre elas (além da igualdade) é a *precedência temporal*. Assim, o fluxo do tempo é representado por um conjunto não-vazio de instante de tempo T com uma relação binária $\prec$ de precedência sobre ele: $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$.

Há algumas propriedades básicas que, naturalmente, podem ser impostas sobre o fluxo do tempo baseado em instantes. É geralmente exigido à relação de precedência temporal ser uma ordenação estrita parcial, isso é, uma relação irreflexiva, transitiva e, portanto, assimétrica. Algumas vezes, contudo, é assumida como reflexiva, e então a condição antissimétrica é adicionada. As propriedades relevantes estão listadas abaixo.

Uma distinção fundamental no reino dos modelos baseados em instantes de tempo é a distinção entre modelos lineares, onde o fluxo de tempo é retratado como uma linha, e modelos lineares-para-trás[11], os quais permitem uma representação como que em árvore [12], suportando a visão de que o passado está fixado (e portanto linear) enquanto o futuro pode estar aberto (ramificado em múltiplos futuros possíveis). Nesse caso, a ordenação temporal pode ou não conter elementos minimais ou maximais, correspondendo aos primeiros ou últimos instantes no tempo, respectivamente.

---

[10]N.T.: no texto original, o autor utiliza a expressão latina “*viz.*” que abrevia a contração '*vidēlicet*' (a saber) de '*vidē licet*' (é permitido ver); expressão latina pouco usual no português (mesmo em âmbito formal). Doravante a expressão será traduzida igualmente.

[11]N.T.: “*backward-linear models*”.

[12]N.T.: “*tree-like representation*”.

Uma outra distinção importante é a entre modelos discretos de tempo, que prevalecem na ciência da computação, e aqueles densos ou contínuos, que são mais comuns nas ciências naturais e na filosofia. Em modelos discretos-para-frente (discretos-para-trás), cada instante de tempo que tem um sucessor (predecessor) sempre tem um correspondente sucessor imediato (predecessor imediato). Em modelos densos, por contraste, entre quaisquer dois instantes de tempo subsequentes, existe um outro instante.

Muitas, mas não todas, as propriedades possíveis que um modelo de tempo baseado em instantes $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ pode ter podem ser expressas em sentenças de primeira-ordem como se segue (onde $\preceq$ é uma abreviação de $x \prec y \vee x = y$):

- *reflexividade*: $\forall x(x \prec x)$;
- *irreflexividade*: $\forall x \neg(x \prec x)$;
- *transitividade*: $\forall x \forall y \forall z(x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z)$;
- *assimetria*: $\forall x \forall y \neg(x \prec y \wedge y \prec x)$;
- *antissimetria*: $\forall x \forall y(x \prec y \wedge y \prec x \rightarrow x = y)$;
- *linearidade (tricotomia, conectividade)*: $\forall x \forall y(x = y \vee x \prec y \vee y \prec x)$;
- *linearidade-para-frente*: $\forall x \forall y \forall z(z \prec x \wedge z \prec y \rightarrow (x = y \vee x \prec y \vee y \prec x))$;
- *linearidade-para-trás*: $\forall x \forall y \forall z(x \prec z \wedge y \prec z \rightarrow (x = y \vee x \prec y \vee y \prec x))$;
- *começo*: $\exists x \neg \exists y(y \prec x)$;
- *fim*: $\exists x \neg \exists y(x \prec y)$;
- *sem começo*: $\forall x \exists y(y \prec x)$;
- *sem fim (ilimitabilidade)*: $\forall x \exists y(x \prec y)$;
- *densidade*: $\forall x \forall y(x \prec y \rightarrow \exists z(x \prec z \wedge z \prec y))$;
- *discretização-para-frente*: $\forall x \forall y(x \prec y \rightarrow \exists z(x \prec z \wedge z \preceq y \wedge \neg \exists u(x \prec u \wedge u \prec z)))$;

- *discretização-para-trás*: $\forall x \forall y(y \prec x \to \exists z(z \prec x \wedge y \preceq z \wedge \neg \exists u(z \prec u \wedge u \prec x)))$.

Note que, em modelos lineares, as duas condições de discretização simplificam

- $\forall x \forall y(x \prec y \to \exists z(x \prec z \wedge \forall u(x \prec u \to z \preceq u)))$ e
- $\forall x \forall y(y \prec x \to \exists z(z \prec x \wedge \forall u(u \prec x \to u \preceq z)))$, respectivamente.

Exemplos-chave de propriedades de modelos baseados em instantes de tempo que não podem ser expressas por sentenças de primeira-ordem, mas requerem uma linguagem de segunda-ordem com quantificação sobre conjuntos, são a *continuidade*, a *boa-ordenação*, e a *propriedade finita intervalar*[13]. A continuidade exige que não haja lacunas [14] na ordem temporal. Não somente deve a ordem temporal ser densa, mas também ser *Dedekind-completa*, *i.e.*, todo conjunto de instantes de tempo não-vazio que tenha um limite superior tem um limite inferior. Um exemplo é o conjunto ordenado dos números reais, enquanto um não-exemplo é a ordenação dos números racionais: considere *e.g.* o conjunto de todos os números racionais cujo quadrado é menor que 2. Um modelo baseado em instantes é bem-ordenado se todo conjunto de instantes de tempo não-vazio e linear tem um elemento mínimo e tem a propriedade finita intervalar se entre quaisquer dois subsequentes instantes de tempo existem ao menos finitamente muitos instantes. Os números naturais são bem-ordenados e têm a propriedade finita intervalar, os inteiros negativos não são bem-ordenados mas ainda têm a propriedade finita intervalar, e os positivos racionais ou reais não são nem bem-ordenados nem têm a propriedade finita intervalar. Como nós veremos na Seção 3.6, essas propriedades de segunda-ordem podem ser expressas em linguagens proposicionais temporais.

2.2 Modelos de tempo baseados em intervalos

Modelos baseados em instantes de tempo geralmente não são adequados para o raciocínio sobre eventos com duração, que são melhor modelados se a ontologia temporal subjacente usa intervalos temporais, *i.e.* períodos, em vez de instantes, como entidades primitivas. As raízes do raciocínio temporal baseado em intervalos podem ser traçadas até

[13] *N.T.: "the finite interval property".*
[14] N.T.: "*gaps*".

Zenão e Aristóteles (Øhrstrøm e Hasle, 1995). Em um cenário baseado em intervalos, o famoso paradoxo da flecha voadora de Zenão (”Se a cada instante a flecha voadora para, como o movimento é possível?”) não ocorre. Outros exemplos que exigem naturalmente raciocínio baseado em intervalos são: ”Na noite passada Alice chorou muito enquanto escrevia a carta, e então ela se acalmou” e ”Bill estava bebendo seu chá enquanto o carteiro chegou”.

Modelos baseados em intervalos geralmente pressupõem tempo linear. Ainda assim, eles são ontologicamente mais ricos que modelos baseados em instantes, pois há muito mais relacionamentos possíveis entre intervalos de tempo que entre instantes de tempo. Um modelo baseado em intervalos de tempo pode, por exemplo, incluir as relações de *precedência temporal* $\prec$, *inclusão* $\sqsubseteq$, e *sobreposição* O sobre um conjunto de intervalos de tempo T: formalmente $\mathcal{T} = \langle T, \prec, \sqsubseteq, O \rangle$. Algumas propriedades naturais de tais relações e modelos baseadas em intervalos incluem:

- *reflexividade de* $\sqsubseteq$: $\forall x(x \sqsubseteq x)$;
- *antissimetria de* $\sqsubseteq$: $\forall x \forall y(x \sqsubseteq y \land y \sqsubseteq x \to x = y)$;
- *atomicidade de* $\sqsubseteq$ *(para tempo discreto)*: $\forall x \exists y(y \sqsubseteq x \land \forall z(z \sqsubseteq y \to z = y))$;
- *monotonicidade descendente de* $\prec$ *w.r.t*: $\forall x \forall y \forall z(x \prec y \land z \sqsubseteq x \to z \prec y)$;
- *simetria de* O: $\forall x \forall y(xOy \to yOx)$;
- *intervalos sobrepostos se intersectam em um subintervalo*: $\forall x \forall y(xOy \to \exists z(z \sqsubseteq x \land z \sqsubseteq y \land \forall u(u \sqsubseteq x \land u \sqsubseteq y \to u \sqsubseteq z)))$;
- *monotonicidade de* $\sqsubseteq$ *w.r.t* O: $\forall x \forall y \forall z(x \sqsubseteq y \land xOz \to z \sqsubseteq y \lor zOy)$.

Em um influente trabalho pioneiro sobre o estudo formal da ontologia temporal baseada em intervalos e o raciocínio em IA, Allen (1983) considerou a família de todas as relações binárias que podem ocorrer entre dois intervalos em uma ordem linear, posteriormente denominadas *relações de Allen*. Essas 13 relações, exibidas na Tabela 1, são mutuamente exclusivas em conjunto, *i.e.*, exatamente uma delas vale entre quaisquer pares dados de intervalos estritos (excluindo intervalos-pontos). Ademais, tornam-se definíveis em termos de somente dois deles, a saber, em termos de 'recebe' e 'recebido-por' [15] (Allen, 1983).

Relações intervalares	Relações de Allen	Notação HS
	igual{=}	
	antes {<} / *depois* {>}	$\langle L\rangle$ / $\langle\overline{L}\rangle$ *Later*
	recebe $\{m\}$ / *recebido-por* $\{mi\}$	$\langle A\rangle$ / $\langle\overline{A}\rangle$ *After*
	sobrepõe $\{o\}$ / *sobreposto-por* $\{oi\}$	$\langle O\rangle$ / $\langle\overline{O}\rangle$ *Overlaps*
	terminado-por $\{fi\}$ / *termina* $\{f\}$	$\langle E\rangle$ / $\langle\overline{E}\rangle$ *Ends*
	contém $\{di\}$ / *durante* $\{d\}$	$\langle D\rangle$ / $\langle\overline{D}\rangle$ *During*
	começado-por $\{si\}$ / *começa* $\{s\}$	$\langle B\rangle$ / $\langle\overline{B}\rangle$ *Begins*

Dada uma estrutura abstrata definida por um certo conjunto de relações intervalares de aridade arbitrária que são exigidos para satisfazer certas propriedades, surge a questão de se ela pode ser representada por meio de um modelo concreto baseado em intervalos em tempo linear. Respostas são fornecidas por vários teoremas de representação, ver *e.g.* van Benthem (1983); Ladkin (1987); e Venema (1990).

2.3 Modelos de tempo baseados em instantes *versus* baseados em intervalos

A escolha entre instantes e intervalos enquanto objetos primários da ontologia temporal tem sido um tema filosófico altamente debatido desde os tempos de Zenão e Aristóteles. Tecnicamente, os dois tipos de ontologias temporais estão intimamente relacionados, e eles são redutíveis um ao outro: por um lado, intervalos de tempo podem ser definíveis por pares de instantes de tempo (começo e fim); por outro lado, um instante de tempo pode ser construído como um intervalo degenerado, a saber, como um intervalo-ponto cujo começo e fim coincidem.

Ainda assim, as reduções técnicas não resolvem a questão semântica de se as sentenças devem ser avaliadas com respeito aos instantes ou com respeito aos intervalos, e pode-se argumentar que ambos, instantes e intervalos, são necessários como mutuamente complementares. Modelos pontuais intervalares de duas ordenadas[16] foram estudados em

[15] N.T.: Originalmente *"'meets' and 'met-by'"*.

[16] N.T.: "*Two-sorted point-interval models*".

e.g. Balbiani *et al.* (2001), e mais modelos complexos de tempo também foram investigados, incluindo modelos de granularidade de tempo (Euzenat and Montanari, 2005), os quais permitem diferentes níveis de resolução de intervalos temporais (*e.g.* minutos, horas, dias, anos, etc.), modelos temporais métricos e em camadas (Montanari, 1996), etc.

Aqui discutimos ambas, lógicas temporais baseadas em instantes e baseadas em intervalos. Para uma discussão mais aprofundada sobre a primazia ontológica de instantes *versus* intervalos em lógicas temporais, ver Hamblin (1972); Kamp (1979); Humberstone (1979); Galton (1996); bem como van Benthem (1983) para uma exploração comparativa detalhada de ambas abordagens. Um panorama mais filosófico e histórico é fornecido em *e.g.* Øhrstrøm e Hasle (1995; 2006); Dyke e Bardon (2013); e Meyer (2013).

3. A lógica básica de tempo verbal TL de Prior

Nessa seção, discutiremos a linguagem, a semântica e a axiomatização da lógica de tempo verbal TL introduzida por Prior (1957; 1967; 1968), o pai fundador da lógica temporal. A motivação de Prior para inventar a lógica de tempo verbal foi, em grande parte, filosófica, e suas ideias foram fortemente inspiradas no uso do tempo verbal em linguagem natural. O recurso inovador da abordagem de Prior estava no fato de tratar proposições como verbalmente temporalizadas ou não. Tecnicamente, isso foi alcançado pela introdução de operadores temporais na linguagem, aos quais foi dado um tipo de semântica lógico-modal. Tendo em vista o papel principal que o tempo verbal está desempenhando em sua estrutura [17], Prior por sua conta referiu-se a ela como Lógica de Tempo Verbal, enquanto hoje em dia prevalece a expressão mais geral Lógica Temporal.

3.1 Operadores de tempo verbal de Prior

A linguagem básica da Lógica de Tempo Verbal TL de Prior estende a linguagem proposicional padrão (com proposições atômicas e conectivos verifuncionais) com quatro operadores temporais com os seguintes significados pretendidos:

[17] N.T.: "*framework*".

P: "Em algum momento foi o caso que ..."
F: "Será em algum momento o caso que ..."
H: "Sempre foi o caso que ..."
G: "Sempre será o caso que ..."

Por exemplo, "Sempre será o caso que Prior inventou a Lógica de Tempo Verbal" traduz-se em TL como $GP(\mathsf{Prior\ inventa\ TL})$ e tem a leitura formal "Será sempre o caso que em algum momento foi o caso que Prior inventa a Lógica de Tempo Verbal".

TL compreende um par de operadores temporais para o passado, P e H, e um par de operadores temporais para o futuro, F e G. Os operadores P e F são geralmente mencionados como os operadores temporais 'fracos', enquanto H e G são conhecidos como operadores 'fortes'. Os respectivos operadores de passado e futuro são duais um do outro, *i.e.*, são interdefiníveis por meio das seguintes equivalências:

$$P\varphi \equiv \neg H\neg\varphi, H\varphi \equiv \neg P\neg\varphi \text{ e } F\varphi \equiv \neg G\neg\varphi, G\varphi \equiv \neg F\neg\varphi.$$

À luz dessas equivalências, o conjunto de fórmulas de TL pode ser recursivamente definido da seguinte forma, sobre um dado conjunto de proposições atômicas $PROP$:

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid P\varphi \mid F\varphi.$$

Os conectivos verifuncionais $\vee, \rightarrow$, e $\leftrightarrow$ são definíveis em termos de $\neg$ e $\wedge$ como de costume. Além disso, podemos definir $A\varphi = H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$ e, dualmente, $E\varphi = P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$, que, em fluxos lineares de tempo, significam "sempre" e "alguma vez", respectivamente.

Como dito, a introdução de Prior dos operadores temporais foi inicialmente motivada pelo uso do tempo verbal em linguagem temporal, e vários tempos verbais em linguagem natural podem, ao menos aproximadamente, ser capturadas em TL. Por exemplo:

$P\varphi$ corresponde a "φ *foi* o caso" ou "foi o caso que φ".
$F\varphi$ corresponde a "φ *será* o caso".
$PP\varphi$ corresponde a "*fora* o caso que φ".
$FP\varphi$ corresponde a "*terá sido* o caso que φ".
$PF\varphi$ corresponde a "*seria* o caso que φ" ou "*ia ser* o caso que φ".

Hamblin e Prior mostraram que, em modelos de tempo linear, qualquer sequência de operadores temporais se reduz a uma sequência de no máximo dois operadores. No total, eles identificaram 15 diferentes combinações — ou *tempos verbais*, como os chamam — que podem ser expressas em TL em fluxo linear do tempo (ver Prior 1967, Capítulo III.5). Mesmo que essas combinações pareçam superar o número de tempos verbais em *e.g.* Inglês, também existem propriedades temporais da linguagem natural que não podem ser capturadas em TL: operadores temporais de Prior, tendo como exemplo, não são muito bem adequados para modelar distinções de aspecto (*e.g.* a distinção entre "Eu escrevi a carta" e "Eu estava escrevendo a carta"), enquanto são debatidas de maneira mais adequada em uma estrutura[18] baseada em intervalos. Para detalhes, ver Kuhn e Portner (2006) e o verbete sobre tempo verbal e aspecto.

3.2 A semântica de TL

A semântica padrão de TL é essencialmente uma semântica à maneira de Kripke, conhecida da lógica modal. Em lógica modal, sentenças são valoradas sobre as chamadas estruturas de Kripke[19] consistindo de um conjunto não-vazio de mundos possíveis e uma relação de acessibilidade entre eles. Em lógica temporal, os mundos possíveis são instantes de tempo, e a relação de acessibilidade tem uma interpretação concreta em termos de precedência temporal. Em outras palavras, sentenças são valoradas sobre modelos baseados em instantes de tempo, modelos esses da forma $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$, doravante chamadas *estruturas temporais*[20]. Observe que até o momento nenhuma condição, como transitividade, irreflexividade, etc., está imposta à relação de precedência $\prec$.

Dado um conjunto de proposições atômicas $PROP$, um modelo temporal para TL é uma tripla $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ onde $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ é uma estrutura temporal e V é uma valoração atribuindo para cada proposição atômica $p \in PROP$ o conjunto de instantes de tempo $V(p) \subseteq T$ no qual p é considerado verdadeiro. (Equivalentemente, a valoração pode ser dada por uma função $I : T \times PROP \rightarrow \{$*true*, *false*$\}$, a qual atribui um valor de verdade para cada proposição atômica em cada instante de tempo na estrutura temporal, ou para uma descrição de rotulação ou estado $L : T \rightarrow \mathcal{P}(PROP)$, o qual atribui para cada

[18] N.T.: "*framework*".
[19] N.T.: "*Kripke frames*".
[20] N.T.: "*temporal frames*".

instante de tempo o conjunto das proposições atômicas que são consideradas verdadeiras naquele instante.)

A verdade de uma fórmula arbitrária de TL em um dado instante de tempo t em um dado modelo temporal M (denotado por $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$) é então definido indutivamente como se segue:

- $\mathcal{M}, t \vDash p$ sse $t \in V(p)$, para $p \in PROP$;
- $\mathcal{M}, t \nvDash \bot$ (*i.e.*, não é o caso que $\mathcal{M}, t \vDash \bot$);
- $\mathcal{M}, t \vDash \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, t \nvDash \varphi$;
- $\mathcal{M}, t \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, t \vDash \psi$;
- $\mathcal{M}, t \vDash P\varphi$ sse $\mathcal{M}, t' \vDash \varphi$ para algum instante de tempo t' tal que $t' \prec t$;
- $\mathcal{M}, t \vDash F\varphi$ sse $\mathcal{M}, t' \vDash \varphi$ para algum instante de tempo t' tal que $t \prec t'$.

Ou seja, dado um modelo temporal $\mathcal{M}$, uma fórmula da forma $P\varphi$ é verdadeira em um instante t sse φ é verdadeiro em algum instante anterior t', e $F\varphi$ é verdadeiro em t sse φ é verdadeiro em algum instante posterior t'. Consequentemente, para os duais H e G, sustenta-se que $H\varphi$ é verdadeiro em t sse φ é verdadeiro em todos os instantes anteriores t', e $G\varphi$ é verdadeiro em t sse φ é verdadeiro em todos os instantes posteriores t'. Note que, do ponto de vista da lógica modal, existem, formalmente falando, duas diferentes relações de acessibilidade envolvidas aqui: uma 'relação-de-anterioridade' no caso dos operadores de passado e uma 'relação-de-posterioridade' no caso dos operadores de futuro. Em lógica temporal, essas duas relações são uniformemente capturadas por uma relação de precedência singular; afinal, 'anterior' e 'posterior' são apenas conversas entre si (*i.e.*, t é anterior a t' sse t' é posterior a t).

Uma fórmula φ de TL é *válida em um modelo temporal* $\mathcal{M}$ (denotado por $\mathcal{M} \vDash \varphi$) sse é verdadeira em todo instante de tempo no modelo. Ademais, dizemos que φ é *válido em uma estrutura temporal* $\mathcal{T}$ (denotada por $\mathcal{T} \vDash \varphi$) sse é válida em todo modelo sobre essa estrutura. Por conseguinte, uma fórmula φ é válida (denotada por $\vDash \varphi$) sse é válida em todas as estruturas temporais, *i.e.* verdadeira em todos os instantes de tempo em todos os modelos temporais. Uma fórmula φ é *satisfazível* sse sua negação não é válida, *i.e.* se φ é verdadeira em algum instante de tempo em algum modelo de tempo.

3.3 A tradução padrão de TL em lógica de primeira-ordem

Como no caso da lógica modal, a linguagem e a semântica de TL pode ser traduzida em lógica clássica de primeira-ordem (ver *e.g.* van Benthem, 1983).

Suponha que o conjunto das proposições atômicas de TL é $PROP = \{p_0, p_1, ...\}$, e deixe L_1 ser uma linguagem de primeira-ordem com $=$, um símbolo de predicado binário R, e um conjunto enumerável de símbolos de predicados unários $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, ...\}$, um para cada proposição atômica de TL. A *tradução padrão*[21] ST de TL em L_1 é definida como se segue, onde $\theta[y/x]$ resulta da substituição de y por todas as ocorrências livres de x em θ:

- $ST(p_i) = P_i(x)$;
- $ST(\bot) = \bot$;
- $ST(\neg\varphi) = \neg ST(\varphi)$;
- $ST(\varphi \wedge \psi) = ST(\varphi) \wedge ST(\psi)$;
- $ST(P\varphi) = \exists y(yRx \rightarrow ST(\varphi)[y/x])$, onde y é uma variável nova
- $ST(F\varphi) = \exists y(xRy \rightarrow ST(\varphi)[y/x])$, onde y é uma variável nova

Por exemplo:

$$ST(Gp_1 \vee FHp_2) = \forall y(xRy \rightarrow P_1y) \vee \exists y(xRy \wedge \forall z(zRy \rightarrow P_2z)).$$

Nem toda fórmula de primeira-ordem tem um correspondente em TL. Atualmente, com um pequeno cuidado extra para reutilizar variáveis individuais, TL pode ser traduzida no fragmento de duas variáveis FO^2 da lógica de primeira-ordem, que eventualmente implica a decidibilidade da validade em TL (pois a validade em FO^2 é decidível, como mostrado por Grädel e Otto, 1999). tendo como exemplo, o exemplo acima pode ser reescrito como

$$ST(Gp_1 \vee FHp_2) = \forall y(xRy \rightarrow P_1y) \vee \exists y(xRy \wedge \forall x(xRy \rightarrow P_2x)).$$

[21] N.T.: "*standard translation*", daí ST.

Dada a tradução padrão, todo modelo temporal $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ pode ser considerado um modelo-L_1 interpretando R como $\prec$ e cada P_i como $V(p_i)$. Então:

$$\mathcal{M}, t \vDash \varphi \text{ sse } \mathcal{M} \vDash ST(\varphi)[x := t],$$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi \text{ sse } \mathcal{M} \vDash \forall x ST(\varphi).$$

Assim, a validade de uma fórmula de TL em um modelo temporal é uma propriedade de primeira-ordem. Validade em uma estrutura temporal, por outro lado, acaba sendo uma propriedade de segunda-ordem, já que envolve quantização sobre valorações. Se tratarmos os predicados unários de $\mathcal{P}$ como variáveis predicadas de uma linguagem de segunda-ordem L_2, toda estrutura temporal $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ pode ser considerada um modelo-L_2, onde as variáveis predicadas representam as valorações das respectivas proposições atômicas. Deixe $\forall \overline{P} \varphi$ denotar o fechamento universal de uma fórmula-L_2 φ sobre todas as variáveis predicadas que ocorrem nele. Então:

$$\mathcal{T} \vDash \varphi \text{ sse } \mathcal{T} \vDash \forall \overline{P} \forall x ST(\varphi),$$

$$\vDash \varphi \text{ sse } \vDash \forall \overline{P} \forall x ST(\varphi).$$

A tradução padrão de TL em lógica de primeira-ordem permite um tratamento sistemático de vários aspectos da lógica temporal com as ferramentas e técnicas da lógica clássica (ver *e.g.* Blackburn *et al.*, 2006). Como veremos na Seção 3.6, contudo, nem todas as propriedades de primeira-ordem das estruturas temporais são definíveis por fórmulas temporais; e vice-versa, nem todas as propriedades de estruturas temporais que podem ser expressas por fórmulas de TL são definíveis em primeira-ordem. Surge uma correspondência não-trivial entre lógica temporal e lógica de primeira-ordem como linguagens alternativas para descrever propriedades do tempo.

3.4 Lógica de tempo verbal, lógica de primeira-ordem, e séries de tempo de McTaggart

A tradução padrão discutida na seção anterior vincula a semântica da lógica básica de tempo verbal de Prior à lógica de primeira-ordem. Porém, existem diferenças cruciais entre as duas abordagens para formalização da lógica do tempo. De fato, na gênese da lógica temporal, a abordagem de Prior era percebida como rival de abordagens mais convencionais usando lógica de primeira-ordem. A rivalidade entre lógica de tempo verbal e lógica de primeira-ordem pode ser vista como refletindo uma distinção fundamental concernente à natureza do tempo, a saber, a distinção entre a série-A e a série-B do tempo introduzida por McTaggart (1908).

Existe uma estreita correspondência entre a série-A de tempo e a lógica de tempo verbal, por um lado, e entre a série-B e a lógica de primeira-ordem, de outro, como já foi observado pelo próprio Prior (1967, Capítulo 1). Considere, por exemplo, a sentença "Escurece, clareou, e clareará novamente". Essa sentença pode ser formalizada em TL como

$$\mathsf{escurece} \wedge P(\mathsf{clareia}) \wedge F(\mathsf{clareia})$$

enquanto sua formulação em primeira-ordem lê-se

$$\mathsf{escure}(t_1) \wedge \exists t_0(t_0 \prec t_1 \wedge \mathsf{clareia}(t_0)) \wedge \exists t_2(t_1 \prec t_2 \wedge \mathsf{clareia}(t_2)).$$

A fórmula de TL consiste em proposições verbalmente temporalizadas (proposições que não contêm operadores temporais estão verbalmente temporalizadas no presente[22]), e invoca a perspectiva local do presente. Na fórmula de primeira-ordem, em contraste, as proposições são intemporais[23] ou sem temporalidade verbal[24]. Aqui nos são fornecidos predicados de instantes de tempo em vez de tempos verbais, e a perspectiva envolvida é uma perspectiva global de fora do tempo. Prior sentiu que nem tudo que pode ser expresso em uma linguagem de tempo verbal pode, da mesma forma, ser expresso em uma sem temporalidade verbal, sendo seu clássico exemplo: "Graças a Deus, acabou!" (Prior, 1959).

3.5 O sistema axiomático $\mathbf{K}_t$ para TL

Como todo sistema de lógica formal, a lógica temporal tem dois aspectos principais: o *semântico* e o *dedutivo*. Nessa seção, apresentaremos um sistema dedutivo para a validade em TL, a saber, a *lógica temporal minimal* $\mathbf{K}_t$. A lógica $\mathbf{K}_t$ é um sistema axiomático, *i.e.*, é

[22] N.T.:"present tensed".
[23] N.T.: "untensed".
[24] N.T.: "tenseless".

dada por uma lista de axiomas e regras de inferência. O sistema foi primeiramente estudado por Lemoon, após axiomatizações anteriores propostas por Hamblin e Prior (ver Rescher e Urquhart, 1971, Capítulo VI).

A lista de axiomas da lógica temporal minimal $\mathbf{K}_t$ estende a lista da lógica proposicional clássica com os seguintes quatro esquemas de axioma:

$$
\begin{array}{ll}
(K_G) & G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi). \\
(K_H) & H(\varphi \to \psi) \to (H\varphi \to H\psi). \\
(GP) & \varphi \to GP\varphi. \\
(HF) & \varphi \to HF\varphi.
\end{array}
$$

Os dois primeiros esquemas de axioma são os correspondentes temporais dos assim chamados *axiomas-K* de lógica modal, daí a terminologia $\mathbf{K}_t$. O terceiro e o quarto esquemas de axioma capturam a interação dos operadores de passado e de futuro. Em um nível formal, garantem que esses operadores correspondam a relações temporais conversas, a saber, mais cedo e mais tarde, respectivamente.

As regras de inferência compreendem, além do *modus ponens* clássico, duas regras de necessitação para os operadores temporais (onde $\vdash$ significa, como de costume, "decidível"):

(MP) Se $\vdash \varphi$ e $\vdash \varphi \to \psi$, então $\vdash \psi$.
(NEC$_G$) Se φ, então $G\varphi$.
(NEC$_H$) Se φ, então $H\varphi$.

O sistema axiomático $\mathbf{K}_t$ é correto[25] e completo para a validade em TL: todas e apenas as fórmulas que são válidas em TL podem ser deduzidas a partir dos axiomas por meio das regras de inferência dadas. Para uma prova, ver *e.g.* Rescher e Urquhart (1971); Goldblatt (1992); e Gabbay *et al.* 1994).

3.6 Expressando propriedades temporais em TL e extensões de $\mathbf{K}_t$

A lógica temporal minimal $\mathbf{K}_t$ captura aquelas validades de TL que não dependem de quaisquer suposições específicas concernentes às propriedades da relação de precedência

[25]N.T.: "*sound*".

temporal. Porém, muitas propriedades naturais de estruturas temporais podem ser expressas por fórmulas temporais, e, tomadas como axiomas adicionais, essas fórmulas podem ser usadas para representar importantes suposições ontológicas a respeito da estrutura do tempo[26].

Uma fórmula temporal de TL expressa (define ou corresponde a) uma propriedade de estruturas temporais se a fórmula é válida em todas e apenas nessas estruturas que tenham a propriedade. As correspondências mais importantes entre propriedades de estruturas temporais (ver uma lista na Seção 2.1) e TL incluem as fórmulas:

(REF)	Qualquer uma entre $G\varphi \to \varphi$, $H\varphi \to \varphi$, $\varphi \to F\varphi$ ou $\varphi \to P\varphi$ (reflexividade)
(TRAN)	Qualquer uma entre $G\varphi \to GG\varphi$, $H\varphi \to HH\varphi$, $F\varphi \to FF\varphi$ ou $P\varphi \to PP\varphi$ (transitividade)
(LIN-F)	$PF\varphi \to (P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi)$ (linearidade-para-frente)
(LIN-P)	$FP\varphi \to (P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi)$ (linearidade-para-trás)
(LIN)	$(PF\varphi \vee FP\varphi) \to (P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi)$ (linearidade)
(BEG)	$H\bot \vee PH\bot$ (o tempo tem um começo (assumindo reflexividade))
(END)	$G\bot \vee FG\bot$ (o tempo tem um fim (assumindo reflexividade))
(NOBEG)	$P\top$ ou $H\varphi \to P\varphi$ (o tempo não tem começo)

[26]N.T.: Nessa passagem há um contraste entre dois sentidos de 'estrutura' correntes na filosofia em língua portuguesa, um a respeito de estrutura enquanto um ponto de vista formal ou quadro lógico sobre algo como o tempo (nesse contexto, "*temporal frames*") e outro enquanto a base de propriedades sobre a qual constitui ontologicamente o que algo é; nesse caso, a base estrutural do tempo ("*the structure of time*"). Nesse contexto, o autor aponta que é possível capturar diferentes propriedades da estrutura do tempo enquanto tal dentro de estruturas temporais lógicas.

(NOEND)	$F\top$ ou $G\varphi \to F\varphi$ (o tempo não tem fim)
(DENSE)	Qualquer um entre $GG\varphi \to G\varphi$, $HH\varphi \to H\varphi$, $F\varphi \to FF\varphi$ ou $P\varphi \to PP\varphi$ (densidade)
(DISCR-F)	$(F\top \wedge \varphi \wedge H\varphi) \to FH\varphi$ (discretude-para-frente (assumindo linearidade))
(DISCR-P)	$(P\top \wedge \varphi \wedge G\varphi) \to PG\varphi$ (discretude-para-frente (assumindo linearidade))
(IND$_G$)	$F\varphi \wedge G(\varphi \to F\varphi) \to GF\varphi$ (indução para frente)
(IND$_H$)	$P\varphi \wedge H(\varphi \to P\varphi) \to HP\varphi$ (indução para trás)
(COMPL)	$A(H\varphi \to FH\varphi) \to (H\varphi \to G\varphi)$ (completude de Dedekind (recorde que $A\varphi = H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$)) alternativamente, a completude de Dedekind pode ser expressa por: $(FG\neg\varphi \wedge F\varphi) \to F(G\neg\varphi \wedge HF\varphi)$
(WELLORD)	$H(H\varphi \to \varphi) \to H\varphi$ (boa-ordenação com transitividade)
(FIN-INT)	$(G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)) \ \wedge (H(H\varphi \to \varphi) \to (PH\varphi \to H\varphi))$ (intervalos finitos) Note que essa fórmula equivale à conjunção de (ING$_G$) e (IND$_H$)

O princípio (LIN) combina linearidade-para-frente (LIN-F) e linearidade-para-trás (LIN-P) em uma condição única. A fórmula resultante não é, contudo, o suficiente para garantir a continuidade da ordem temporal. Em outras palavras, não se pode descartar linhas temporais disjuntas. Também vale a pena notar que (IND$_G$) implica discretude-para-trás e que (IND$_H$) implica discretude-para-frente mas não o inverso. Tendo como exemplo, um fluxo de tempo consistindo de uma cópia dos números naturais seguidos por uma cópia dos inteiros é discreto-para-trás, mas não satisfaz (IND$_G$).

Recorde que as últimas três propriedades mencionadas acima — completude de Dedekind, boa-ordenação e a propriedade intervalar finita — não são definíveis por sentenças de primeira-ordem, mas podem ser expressas por fórmulas temporais. Por outro lado, algumas propriedades simplíssimas de estruturas temporais que são definíveis em primeira-ordem, como irreflexividade ou anti-simetria, são inexprimíveis em TL. Para mais sobre axiomas temporais que expressam propriedades de tempo e detalhes sobre tais resultados, ver Segerberg (1970); Rescher e Urquhart (1971); Burgess (1979), van Benthem (1983, 1995); Goldblatt (1992); e Hodkinson e Reynolds (2006).

Ao estender a lista de axiomas de $\mathbf{K}_t$ com algum dos vários princípios acima, pode-se capturar a validade de um número de modelos naturais de tempo; isso é, existem extensões axiomáticas que são corretas e completas para as classes correspondentes de estruturas temporais. Algumas dessas extensões foram já estudadas na gênese da Lógica Temporal, e Prior (1967) discute vários sistemas obtidos por postulação de diferentes combinações de axiomas.

$$\mathbf{K4}_t = \mathbf{K}_t + \text{(TRAN): todas as estruturas transitivas.} \tag{(III).1}$$
$$\mathbf{S4}_t = \mathbf{K}_t + \text{(REF) + (TRAN): todas as ordenações parciais.} \tag{(III).2}$$
$$\mathbf{L}_t = \mathbf{K}_t + \text{(TRAN) +(LIN): todas as ordenações lineares estritas.} \tag{(III).3}$$
$$\mathbf{N}_t = \mathbf{L}_t + \text{(NOEND) + (IND}_G\text{) + (WELLORD): } \langle \mathbf{N}, < \rangle. \tag{(III).4}$$
$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{L}_t + \text{(NOBEG) + (NOEND) + (IND}_G\text{) + (IND}_H\text{): } \langle \mathbf{Z}, < \rangle. \tag{(III).5}$$
$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{L}_t + \text{(NOBEG) + (NOEND) + (DENSE): } \langle \mathbf{Q}, < \rangle\,. \tag{(III).6}$$
$$\mathbf{R}_t = \mathbf{L}_t + \text{(NOBEG) + (NOEND) + (DENSE) + (COMPL): } \langle \mathbf{R}, < \rangle\,. \tag{(III).7}$$

Como ilustram essas axiomatizações, o fato de (LIN) não ser suficiente para garantir conectividade em um sentido estrito ou o fato de que a irreflexividade não é definível em TL não constituem aqui limitações severas: conectividade e irreflexividade não produzem novas validades.

Cada uma das lógicas acima acaba sendo *decidível* (*i.e.* tem um conjunto decidível de validades), o qual é tipicamente mostrado pela comprovação da assim chamada *propriedade de modelo finito* ("Toda fórmula satisfatível é satisfatível em um modelo finito"), na maioria dos casos, com respeito aos modelos finitos não-padrões. Para provas detalhadas de completude das variações desses sistemas axiomáticos, bem como provas de decidibilidade, ver Segerberg (1970); Rescher and Urquhart (1971); Burgess (1979); Burgess and Gurevich (1985); Goldblatt (1992); e Gabbay *et al.* (1994).

4. Extensões de TL em tempo linear

Uma classe muito natural de modelos baseados em instantes é a classe de modelos lineares, e logo após a invenção de Prior da Lógica de Tempo Verbal, muitas extensões de TL sobre tempo linear foram propostas. Nessa seção, discutimos duas dessas extensões da lógica temporal básica de Prior: a extensão de TL para um operador *Próxima vez* sobre modelos lineares discretos de tempo e a introdução dos operadores *Desde que* e *Até que*. Esses operadores também formam a base da lógica temporal de tempo linear LTL, a qual tem aplicações difundidas em ciência da computação.

4.1 Adicionando o operador *Próxima Vez*

Nos modelos temporais lineares, ilimitados e discretos-para-frente $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V\rangle$, onde todo instante t tem um único sucessor imediato $s(t)$, é natural adicionar um operador temporal X ("*PróXima Vez*" ou "Amanhã")[27] com semântica[28]:

$$\mathcal{M}, t \vDash X\varphi \text{ sse } \mathcal{M}, s(t) \vDash \varphi.$$

Isso é, X é verdade em um instante de tempo t se e somente se φ é verdadeiro no imediato sucessor $s(t)$ de t. O operador Próxima Vez foi já mencionado por Prior (1967, Capítulo IV.3), mas sua importância foi primeiramente apreciada em sua totalidade no contexto de LTL.

O operador X satisfaz o axioma K

(K_X) $\quad X(\varphi \to \psi) \to (X\varphi \to X\psi)$;

e o axioma da funcionalidade

(FUNC) $\quad X\neg\varphi \leftrightarrow \neg X\varphi$.

Ele também permite uma definição recursiva de ponto fixo do G (FP_G), e, na ordenação dos números naturais, os operadores X e G satisfazem um princípio de indução (IND).

[27] N.T.: Originalmente, "*NeXt Time* or *Tomorrow*".

[28] Em especial a literatura de ciência da computação inicialmente usava por vezes a notação $\bigcirc$ em vez de X para o operador *Próxima Vez*.

Assumindo que a relação de precedência temporal $\prec$ seja reflexiva, o que é uma suposição padrão em ciência da computação, obtemos as seguintes definições:

(FP$_G$) $\quad G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge XG\varphi)$;
(IND) $\quad \varphi \wedge G(\varphi \to X\varphi) \to G\varphi$.

Na linguagem com G, H e X:

$\mathbf{L}_t(X) = \mathbf{L}_t + K_X + FUNC + FP_G$
axiomatiza completamente a lógica temporal de ordens lineares, ilimitadas e discretas-para-frente, enquanto

$\mathbf{N}_t(X) = \mathbf{N}_t + K_X + FUNC + FP_G + IND$
axiomatiza comopletamente a lógica temporal de $\langle \mathbf{N}, s, \leq \rangle$, onde $s(n) = n+1$.

Um análogo passado de X, geralmente denotado por Y ("$Ontem$")[29], pode ser definido e axiomatizado da mesma forma. Para mais detalhes, ver Goldblatt (1992) e Andréka *et al.* (1995).

4.2 Adicionando *Desde que* e *Até que*

Talvez a extensão mais importante da lógica de tempo verbal TL de Prior foi a introdução dos operadores temporais binários S ("Desde que")[30] e U ("Até que")[31] por Hans Kamp em sua dissertação doutoral (Kamp, 1968). Os significados intuitivos desses operadores são[32]

$\varphi S \psi$ "φ foi o caso desde que ψ foi o caso".
$\varphi U \psi$ "φ será o caso até que ψ seja o caso".

Tendo como exemplo, a sentença "Vou continuar tentando até ter sucesso" pode ser formalizada como $\texttt{tento}\, U\, \texttt{tenha sucesso}$. Como um outro exemplo, "Desde quando Mia

[29]N.T.: Originalmente, "*Yesterday*", daí Y.
[30]N.T.: Originalmente "*Since*".
[31]N.T.: Originalmente "*Until*".
[32]Na literatura lógica filosófica, frequentemente uma notação de prefixo para U e S é usada e os dois argumentos são trocados, *i.e.*, $U\psi\varphi$ é usado para $\varphi U \psi$.

saiu de casa, Joe ficou infeliz e bebeu até perder a consciência" pode ser formalizada usando *Desde que* e *Até que* como:

$$(\text{Joe está infeliz} \wedge (\text{Joe bebe } U \ \neg(\text{Joe está consciente}))) \ S \ (\text{Mia sai}).$$

A semântica formal de S e U em um modelo temporal $\mathcal{M} = \langle M, \prec, V\rangle$ é dada pelas duas cláusulas seguintes:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, t \vDash \varphi S \psi & \text{sse} & \mathcal{M}, s \vDash \psi \text{ para algum } s \text{ tal que } s \prec t \\ & & \text{e } \mathcal{M}, u \vDash \varphi \text{ para todo } u \text{ tal que } s \prec u \prec t; \\ \mathcal{M}, t \vDash \varphi U \psi & \text{sse} & \mathcal{M}, s \vDash \psi \text{ para algum } s \text{ tal que } t \prec s \\ & & \text{e } \mathcal{M}, u \vDash \varphi \text{ para todo } u \text{ tal que } t \prec u \prec s. \end{array}$$

Essas são as versões 'estritas' de S e U prevalentes na filosofia. Em ciência da computação, geralmente versões reflexivas das clausas semânticas são consideradas.

Os operadores temporais de Prior P e F são definíveis em termos de S e U:

$$P\varphi := \top S \varphi \text{ e } F\varphi := \top U \varphi.$$

Sobre ordens temporais lineares, irreflexivas e discretas-para-frente, S e U também permitem uma definição do operador *Próxima Vez* X:

$$X\varphi := \bot U \varphi.$$

Note que essa definição falha em ordens temporais reflexivas, o que mostra que as versões irreflexivas de S e U são mais expressivas que suas contrapartes reflexivas.[33] Naturalmente outros operadores podem ser definidos em termos de S e U como, a título de exemplo, *Antes*[34], dado por $\varphi B \psi := \neg((\neg\varphi) U \psi)$ com leitura intuitiva "Se ψ vai ser o caso no futuro, φ vai ocorrer antes que ψ".

[33]De fato, as versões reflexivas de S e U podem ser definidas em termos daquelas irreflexivas: $\varphi S_{\mathit{ref}} \psi := \psi \vee (\varphi \wedge \varphi S \psi)$ e igualmente para U, mas em geral não *vice versa*. Ainda que, em estruturas lineares discretas, os operadores estritos sejam definíveis em termos de suas contrapartes reflexivas usando X e seu análogo passado, respectivamente: *e.g.* $\varphi U \psi := X(\varphi U_{\mathit{ref}} \psi)$.

[34]N.T.: Originalmente "*Before*".

Kamp (1968) provou o seguinte resultado concernente ao poder expressivo das linguagens temporais com “Desde que” e “Até que”:

> *Todo operador temporal sobre uma classe de ordenações contínuas, estritas e lineares que é definível em lógica de primeira-ordem é exprimível em termos de S e U.*

Stavi posteriormente propôs mais dois operadores, S' e U', que, quando adicionados a S e U, fazem a linguagem temporal expressivamente completa em *todas as estruturas lineares*. Porém, como mostrado por Gabby, nenhum número finito de novos operadores pode tornar uma linguagem temporal funcionalmente completa em todas as ordenações parciais. Ver Gabby *et al.* (1994) para um panorama desses resultados.

Burgess (1982a) forneceu um sistema axiomático completo da lógica desde-que-até-que na classe de todas as ordenações lineares com relação de precedência reflexiva, a qual foi mais simplificada por Xu (1988). Extensões dessa axiomatização para ordenações lineares estritas foram obtidas por Venema (1993) e Reynolds (1994; 1996); Para detalhes e resultados relacionados, ver Burgess (1984); Zanardo (1991); Gabby *et al.* (1994); Finger *et al.* (2002); e Hodkinson e Reynolds (2006). São apresentados o sistema axiomático Burgess-Xu e algumas de suas extensões no documento suplementar:

> Sistema Axiomático de Burgess-Xu para *Desde que* e *Até que* e Algumas Extensões

4.3 A lógica temporal de tempo linear LTL

A lógica temporal mais popular e conhecida usada em ciência da computação é a lógica de tempo linear LTL, a qual foi proposta no artigo seminal de Pnueli (1977), e foi inicial e explicitamente estudada e axiomatizada em Gabbay *et al.* (1980). Em LTL, o tempo é concebido como uma sucessão linear e discreta de instantes de tempo, e a linguagem involve os operadores G, X e U (sem operadores no passado). LTL é interpretada em $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$, onde a ordenação temporal é assumida como reflexiva, como é comum em ciência da computação.

A lógica LTL é muito útil para expressar propriedades de computações infinitas em sistemas reativos, como segurança, vivacidade e justiça, conforme descrito na Seção 11.1. Por exemplo, a especificação “Toda vez que uma mensagem é enviada, uma confirmação de recebimento será retornada, e a mensagem não será marcada como ´enviada' antes que uma confirmação de recebimento seja retornada" pode ser formalizada em LTL como:

$$G(\text{Enviada} \rightarrow (\neg\text{Marcada como Enviada}\ U\ \text{Confirmação Retornada})).$$

O sistema axiomático para LTL estende a lógica proposicional clássica pelo axioma-K para G, pelo axioma-K e pelos axiomas de funcionalidade para X, bem como pelos axiomas que fornecem caracterizações de ponto fixo das versões reflexivas de G e U:

(K_G)	$G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
(K_X)	$X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (X\varphi \rightarrow X\psi)$
(FUNC)	$X\neg\varphi \leftrightarrow \neg X\varphi$
(FP_G)	$G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge XG\varphi)$
(GFP_G)	$\psi \wedge G(\psi \rightarrow (\varphi \wedge X\psi)) \rightarrow G\varphi$
(FP_U)	$\varphi U\psi \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge X(\varphi U\psi)))$
(LFP_U)	$G((\psi \vee (\varphi \wedge X\theta)) \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi U\psi \rightarrow \theta)$.

As regras de inferência envolvem somente o *modus ponens* clássico e a regra de necessitação para G. Em termos técnicos, o axioma (FP_G) diz que $G\varphi$ é um *ponto fixado* do operador Γ_G definido por $\Gamma_G(\theta) = \varphi \wedge X\theta$, onde ($\mathsf{GFP}_G$) diz que $G\varphi$ é (conjuntistamente,[35] em termos de suas extensões) *o maior ponto pós-fixado* de Γ_G. Da mesma forma, o axioma (FP_U) diz que $\varphi U\psi$ é um *ponto fixado* do operador Γ_U definido por $\Gamma_U(\theta) = \varphi \wedge X\theta$, onde ($\mathsf{LFP}_U$) diz que $\varphi U\psi$ é *o ponto menos pré-fixado* de Γ_U. Algumas variações desse sistema axiomático estão presentes no documento suplementar:

Algumas variações do Sistema Axiomático para LTL

Os primeiros estudos de lógicas temporais para tempo linear estão presentes em Rescher e Urquhart (1971) e McArthur (1976). Provas de completude das variações do sistema axiomático dadas acima podem ser encontradas em Gabbay *et al.* (1980; 1994); Goldblatt (1992); e Finger *et al.* (2002). Todas as lógicas mencionadas nessa seção têm a propriedade de modelo finito (geralmente, com respeito aos modelos não-padrões) e, portanto, são decidíveis. Para provas de decidibilidade, ver as referências sobre completude.

[35] N.T.: "*set-theoretically*".

5. Lógicas temporais de tempo ramificado

Grande parte dos trabalhos de Prior sobre Lógica de Tempo Verbal foi inicialmente motivada pelos problemas concernentes à relação entre tempo e modalidade suscitados pelo Argumento do Dominador de Diodoro Crono e sua conclusão fatalista. Prior tinha um interesse genuíno em temas como o indeterminismo e o futuro em aberto. Uma de suas principais preocupações aqui era permitir a liberdade humana. Para capturar a noção de necessidade histórica subjacente ao argumento de Diodoro, ele optou por uma representação ramificada da inter-relação de tempo e modalidade, a qual foi-lhe sugerida pela primeira vez em uma carta de Kripke em 1958 (ver Ploug e Øhrstrøm, 2012). A concepção diodoreana de modalidade como quantificação em tempo linear foi abandonada e substituída pela figura de uma árvore, cujos ramos representam possibilidades alternativas para o futuro. Prior (1967, Chapter 7) considerou duas diferentes versões de lógica temporal de tempo ramificado, as quais ele associou às visões históricas de Peirce e Ockham, respectivamente. Um tratamento formal inicial dessas ideias é fornecido por Thomason (1970; 1984) e Burgess (1978). Muitos resultados técnicos e desenvolvimentos adicionais foram propostos desde então, e mencionamos os mais importantes deles abaixo. Para as visões motivacionais de Prior sobre indeterminismo e liberdade humana, ver Øhrstrøm e Hasle (1995, Chapers 2.6 e 3.2) e Øhrstrøm (2019). Uma discussão detalhada dos aspectos filosóficos da teoria do tempo ramificado está contida em *e.g.* Belnap *et al.* (2001) e Correia e Iacona (2013).

5.1 A teoria do tempo ramificado de Prior

A imagem que está no coração da teoria de tempo ramificado de Prior é uma reminiscência da que foi evocada em *O Jardim de Caminhos de Bifurcação*[36] de Borges. A inter-relação de tempo e modalidade é representada como uma árvore de histórias alternativas que é linear em volta do passado e ramificada em futuros possíveis múltiplos. A linearidade-para-trás captura a ideia de que o passado está fixado; a ramificação-para-frente reflete a abertura do futuro. Em cada momento no tempo pode haver mais de um caminho levando ao futuro, e cada um desses caminhos representa uma possibilidade de futuro.

Formalmente, uma árvore (ou uma estrutura de tempo ramificado) é uma estrutura temporal $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ onde a relação de precedência temporal $\prec$ é uma ordenação parcial

[36]N.T.: Originalmente "*The Garden of Forking Paths*".

linear-para-trás no conjunto de instantes de tempo T, de modo que quaisquer dois instantes tem um predecessor-$\prec$ comum em T. Isso é, todo instante de tempo em uma árvore tem um conjunto ordenado linear de predecessores-$\prec$, e quaisquer dois instantes compartilham algum passado comum. A condição preliminar exclui ramificação-para-trás, enquanto a posterior assegura 'conectividade histórica'. Na literatura filosófica, a relação de precedência temporal $\prec$ é comumente assumida como sendo irreflexiva, *i.e.* uma ordem parcial estrita, enquanto na ciência da computação geralmente são estudadas estruturas reflexivas.

Uma árvore $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ retrata alternatividades, possibilidades mutuamente incompatíveis para o futuro em uma estrutura unificada, e pode ser dividida em múltiplas histórias. Uma história em $\mathcal{T}$ é um conjunto maximal (*i.e.* não-extensível) de instante de tempo que é linearmente ordenada por $\prec$, isso é, um caminho inteiro através da árvore; e representa um curso completo possível de eventos. Denotamos o conjunto de todas as histórias em $\mathcal{T}$ com $\mathcal{H}(T)$, e usamos $\mathcal{H}(t)$ para o conjunto das histórias passando através de um dado instante de tempo t em $\mathcal{T}$.

Alguns filósofos têm criticado o rótulo 'tempo ramificado'[37] como um nome impróprio, argumentando que o tempo não se ramifica, mas evolui linearmente. Inicialmente o criticismo nessa linha é encontrado em Rescher e Urquhart (1971), e um ponto semelhante é levantado em Belnap *et al.* (2001), que sugerem, em vez daquele, o rótulo 'histórias ramificadas'[38]. Esse criticismo também põe em dúvida a adequação da terminologia 'instantes de tempo'[39] usada aqui para se referir aos pontos primitivos da árvore. Aderimos à terminologia por razão de uniformidade. Na literatura de tempo ramificado, a expressão mais neutra 'momentos'[40] prevalece, e em Belnap *et al.* (2001) a distinção entre instantes de tempo e momentos é formalmente elaborada: estruturas de tempo ramificado são associadas ao conjunto de instantes de tempo linearmente ordenados, onde um instante é definido como o conjunto de momentos contemporâneos contidos em histórias diferentes.

5.2 A lógica temporal de tempo ramificado peirciana

A lógica básica de tempo verbal LTL de Prior é neutra quanto à estrutura do tempo. Em um cenário de tempo ramificado com possibilidades futuras alternativas, a semântica original

[37]N.T.: "*branching time*".
[38]N.T.: "*branching histories*".
[39]N.T.: "*time instants*".
[40]N.T.: "*moments*".

do operador futuro F, contudo, não é mais adequada para capturar a verdade futura. Nesse cenário, o operador de futuro F meramente lê "possivelmente será o caso que …". Prior (1967, Capítulo 7), portanto, considerou duas semânticas alternativas para o operador de futuro em tempo ramificado, que deram origem às lógicas temporais de tempo ramificado peirciana e ockhamista, respectivamente.

Na lógica de tempo ramificado peirciana PBTL, o sentido intuitivo do operador de futuro F é "necessariamente será o caso que …". Isso é, a verdade do futuro é concebida como verdade em todos os futuros possíveis. Nessa leitura, o operador de futuro F não é mais o dual do operador forte de futuro G, o qual agora precisa ser incluído como um operador primitivo adicional na linguagem. Dado um conjunto de proposições atômicas PROP, o conjunto de fórmulas de PBTL pode ser definido recursivamente como se segue:

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid P\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi.$$

As fórmulas de PBTL são valoradas em um modelo temporal $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V\rangle$ em uma árvore $\mathcal{T} = \langle T, \prec\rangle$, denominada um modelo de árvore peirciana. Como de costume, V é uma valoração que atribui a toda proposição atômica $p \in PROP$ o conjunto de instantes de tempo $V(p) \subseteq T$ no qual p é considerado verdadeiro, e a verdade de uma fórmula arbitrária φ de PBTL em um dado instante de tempo t em um modelo de árvore peirciano $\mathcal{M}$ é definido indutivamente. As cláusulas para os conectivos verifuncionais e para o operador de passado P (e seu dual H) são como em TL (ver Seção 3.2), e somente forneceremos aqui as cláusulas semânticas para os operadores de futuro F e G:

$\mathcal{M}, t \vDash F\varphi$	sse	para toda história $h \in \mathcal{H}(t)$, existe algum instante de tempo $t' \in h$ tal que $t \prec t'$ e $\mathcal{M}, t' \vDash \varphi$;
$\mathcal{M}, t \vDash G\varphi$	sse	para toda história $h \in \mathcal{H}(t)$ e para todo instante $t' \in h$ tal que $t \prec t'$, $\mathcal{M}, t' \vDash \varphi$.

Assim, de acordo com a semântica peirciana, uma fórmula da forma $F\varphi$ é verdadeira em um instante t se e somente se toda história passando por t contém algum instante posterior t' no qual φ é verdadeiro. O operador forte de futuro G retém essencialmente sua semântica original, mas agora se lê "será necessariamente sempre o caso que …". Note que nesse caso a quantificação universal sobre histórias é redundante e pode ser omitida sem perda de significado. O dual de G é o operador fraco de futuro de TL, o que é agora denotado por

f, enquanto o dual do F peirciano é comumente escrito g (*cf.* Burgess, 1980). Todos os operadores de futuro envolvem (implícita ou explicitamente) quantificação sobre histórias e são modalizadas: elas capturam possibilidade e necessidade relativamente ao futuro. Não existe futuro atual e, de acordo com isso, nenhuma noção clara de verdade futura. Como isso está de acordo com a visão mantida por Peirce, Prior denominou esse sistema 'peirciano'.

Note que, na lógica temporal peirciana, a fórmula $\varphi \rightarrow HF\varphi$ não é mais válida, o que bloqueia o Argumento do Dominador de Diodoro Crono: o que é o caso agora não precisa ter sido necessariamente no passado. Além disso, enquanto o peircianismo preserva a bivalência e o princípio de terceiro excluído $\varphi \vee \neg\varphi$, isso falsifica todas as fórmulas que expressam futuros contingentes e, portanto, invalida o princípio do terceiro excluído futuro $F\varphi \vee F\neg\varphi$. Esse princípio afirma que, eventualmente, φ ou $\neg\varphi$ será o caso e é geralmente julgado intuitivamente válido (ver *e.g.* Thomason, 1970).

Uma axiomatização finita completa da lógica temporal de tempo ramificado peirciana foi dada por Burgess (1980), usando uma versão da assim-chamada Regra da Irreflexividade de Gabbay. Zanardo (1990) fornece uma axiomatização alternativa, onde a Regra da Irreflexividade de Gabbay é substituída por uma lista infinita de axiomas.

5.3 A lógica temporal de tempo ramificado ockhamista

Embora o próprio Prior fosse favorável ao peircianismo, a lógica temporal de tempo ramificado ockhamista, que ele desenvolveu como uma alternativa possível, tem ganhado muito mais influência na literatura sobre tempo ramificado. Na lógica de tempo ramificado ockhamista OBTL, verdade não é somente relativizada a um instante de tempo na árvore, mas também a uma história passando através desse instante, e o operador de futuro F é agora valorada ao longo de uma história dada. Assim, o significado intuitivo de F torna-se "com respeito à história dada, vai ser o caso que ...". Além dos operadores temporais F e P, a linguagem de OBTL contém um operador modal $\Diamond$ e seu dual $\Box$, os quais são interpretados como quantificadores sobre histórias. Dado um conjunto de proposições atômicas PROP, o conjunto das fórmulas de OBTL pode ser recursivamente definida por

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid P\varphi \mid F\varphi \mid \Diamond\varphi.$$

Na semântica ockhamista, fórmulas são interpretadas em um modelo sobre uma árvore $\mathcal{T} = \langle T, \prec\rangle$ em pares (t, h) consistindo de um instante de tempo $t \in T$ e uma história

$h \in \mathcal{H}(t)$ contendo esse instante. Algumas vezes os pares instante-história (t, h) são concebidos como 'ramos iniciais' que começam no instante t e abrangem o futuro possível especificado pela história h (ver *e.g.* Zanardo, 1996).

Naturalmente, surge a questão de como valorar as proposições atômicas no modelo: os valores de verdade das proposições atômicas dependem somente dos instantes de tempo, ou dependem também da história? A resposta para essa questão liga-se crucialmente a se proposições atômicas podem conter 'traços de futuridade'[41] ou não (Prior, 1967, 124). Não há consenso no tratamento das proposições atômicas na literatura (*cf.* Zanardo, 1996), e o próprio Prior alimentou a ideia de uma linguagem de duas-classes[42] com dois diferentes tipos de proposições atômicas[43] cada qual requerendo um tratamento diferente (Prior, 1967, Capítulo 7.4). Aqui permitiremos que os valores de verdade de proposições atômicas dependam de ambos, o instante de tempo e a história. O caso mais específico de proposições baseadas em instantes pode ser obtido impondo o requisito adicional de que a fórmula $p \to \Box p$ seja válida para $p \in PROP$.

Assim, um modelo de árvore ockhamista é uma tripla $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ onde $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ é uma árvore e V é uma valoração que atribui a toda proposição atômica $p \in PROP$ o conjunto de pares instante-história $V(p) \subseteq T \times \mathcal{H}(\mathcal{T})$ em que p é considerado verdadeiro. A verdade de uma fórmula arbitrária φ de OBTL em um par instante-história (t, h) em um modelo de árvore ockhamista $\mathcal{M}$ é definida indutivamente como se segue:

$\mathcal{M}, t, h \vDash p$	sse	$(t, h) \in V(p)$, para $p \in PROP$;
$\mathcal{M}, t, h \nvDash \bot$;		
$\mathcal{M}, t, h \vDash \neg\varphi$	sse	$\mathcal{M}, t, h \nvDash \varphi$;
$\mathcal{M}, t, h \vDash \varphi \wedge \psi$	sse	$\mathcal{M}, t, h \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, t, h \vDash \psi$;
$\mathcal{M}, t, h \vDash P\varphi$	sse	$\mathcal{M}, t', h \vDash \varphi$, para algum instante de tempo $t' \in h$ tal que $t' \prec t$;
$\mathcal{M}, t, h \vDash F\phi$	sse	$\mathcal{M}, t', h \vDash \phi$, para algum instante de tempo $t' \in h$ tal que $t \prec t'$;
$\mathcal{M}, t, h \vDash \Diamond\varphi$	sse	$\mathcal{M}, t', h' \vDash \varphi$ para alguma história $h' \in \mathcal{H}(t)$.

[41]N.T.: Uma tradução para expressão de Prior "*traces of futurity*".

[42]N.T.: "*two-sorted language*".

[43]N.T.: "*kinds of atomic propositions*".

Os operadores temporais são essencialmente interpretados como na lógica temporal linear: o instante de valoração é simplesmente deslocado para trás e para frente na história dada. Note que o requisito de “$t \in h$” é redundante na cláusula semântica para o operador de passado P, como não há ramificação para trás. É crucial, contudo, na cláusula para o operador de futuro F. Como de costume, os operadores temporais fortes H e G são definidos como os duais de P e F, respectivamente. Os operadores modais quantificam sobre o conjunto das histórias que passam através do instante atual. O operador $\Diamond$ é um quantificador existencial sobre esse conjunto e captura a possibilidade, enquanto seu dual $\Box$ envolve uma quantificação universal e expressa ‘inevitabilidade’ ou ´necessidade histórica’.

Dizemos que uma fórmula de OBTL é ockhamisticamente válida se e somente se é verdade em todos os pares instante-história em todos os modelos de árvores ockhamistas. Obviamente, todas as fórmulas temporais que são válidas em modelos lineares de tempo são também ockamisticamente válidas. Portanto, o ockamismo valida o princípio de terceiro excluído futuro $F\varphi \vee F\neg\varphi$ (sob a suposição de que o tempo não termina) bem como a fórmula $\varphi \rightarrow HF\varphi$. Invalida, contudo, o princípio da necessidade do passado $P\varphi \rightarrow \Box P\varphi$, e, desse modo, bloqueia o Argumento do Dominador de Diodoro.

Enquanto na lógica de tempo ramificado peirciana PBTL a verdade futura é modalizada, na lógica de tempo ramificado ockhamista OBTL a verdade e a modalidade futuras separam-se. As fórmulas peircianas $F\varphi$ e $G\varphi$ são equivalentes às ockhamistas $\Box F\varphi$ e $\Box G\varphi$, respectivamente. De fato, PBTL pode ser observada como um fragmento próprio de OBTL, a saber, o fragmento que compreende todas e somente aquelas fórmulas que são recursivamente construídas a partir de proposições atômicas (baseadas em instantes) usando conectivos verifuncionais e as modalidades combinadas $\Box F$, $\Box G$ e seus duais $\Diamond F$ e $\Diamond G$. Contudo, a linguagem peirciana é menos expressiva que a ockhamista, carecendo *e.g.* de um equivalente para $\Diamond GF\varphi$ (para uma prova, ver Reynolds, 2002).

Ao relativizar a verdade em um instante para uma história na árvore, a lógica de tempo ramificado ockhamista oferece uma noção de verdade futura clara. Do ponto de vista filosófico, contudo, a relativização para uma história não é inteiramente não-problemática. Existem essencialmente dois diferentes modos para interpretar o parâmetro de história ockhamista: primeiro, pode-se pensar no parâmetro de história como referindo-se ao curso atual dos eventos na árvore de possibilidade e, uma vez que essa ideia se encaixa bem na visão de Ockham sobre o futuro, Prior escolheu o rótulo ‘ockhamismo’. A posição atualista desencadeou uma variedade de lógicas temporais de tempo ramificado, que são frequentemente resumidas sob as teorias do rótulo 'Linha Vermelha Fina'[44] (para uma discussão, ver Belnap e Green, 1994; Belnap *et al.* 2001; e Øhrstrøm, 2009). Segundo, pode-se pensar no parâmetro da história como um parâmetro de verdade auxiliar que não pode ser inicializado em um contexto: um contexto de enunciado, pode-se argumentar, determina unicamente o instante de tempo do enunciado, mas não faz e não pode destacar uma das histórias que passam através desse instante se o futuro está genuinamente aberto. Essa linha de pensamento deu origem a relatos 'pós-semânticos', os quais visam preencher a lacuna entre a maquinaria semântica recursiva e um contexto introduzindo uma noção de *super-verdade*, mais notavelmente o supervaloracionismo de Thomason (Thomason, 1970) e a pós-semântica avaliativamente sensível de MacFarlane (MacFarlane, 2003; 2014)[45]. Essas abordagens sacrificam a bivalência, mas preservam o princípio de terceiro excluído $\varphi \vee \neg\varphi$ e o princípio de terceiro excluído futuro $F\varphi \vee F\neg\varphi$.

De um ponto de vista lógico, a abordagem ockhamista para tempo ramificado carrega uma forte semelhança com a ideia subjacente à noção de uma estrutura $T \times W$ e a noção mais geral de uma *estrutura de Kamp*, discutida em Thomason (1984); o último é tecnicamente equivalente à noção de uma *estrutura ockhamista* introduzida em Zanardo (1996). Esses tipos de estruturas são construídas sobre um conjunto de mundos possíveis distintos, cada qual é dotado de uma estrutura temporal linear interna[46], e assume uma relação de mundos possíveis de acessibilidade histórica relativa ao tempo[47]. Isso é, a sobreposição de histórias é substituída pela acessibilidade, e os mundos possíveis são considerados elementos primitivos enquanto em histórias de tempo ramificado são definidos em termos de instantes. Como uma consequência, se mesclarmos uma estrutura consistindo de mundos possíveis historicamente relacionados em uma única árvore (substituindo a acessibilidade pela identidade), novas histórias poderão surgir que não correspondam a nenhum dos mundos possíveis (para a construção, ver *e.g.* Reynolds, 2002).

Tecnicamente, a diferença entre uma abordagem baseada em mundos possíveis e uma abordagem baseada em tempo ramificado pode ser superada equipando as estruturas de tempo ramificado com um conjunto primitivo de histórias que é rico o suficiente para cobrir a

[44] N.T.: "*Thin Red Line*".
[45] N.T.: "*Thomason's supervaluationism and MacFarlane's assessment-sensitive post-semantics*".
[46] N.T.: "*an internal linear temporal structural*".
[47] N.T.: "*a time-relative, historical accessibility relation between possible worlds*".

estrutura inteira, um assim-chamado *ramalhete*[48]. uma *árvore ramalhenta*[49] é definida como uma tripla $\langle T, \prec, \mathcal{B}\rangle$ onde $\mathcal{T} = \langle T, \prec\rangle$ é uma árvore e o *ramalhete* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(t)$ é um conjunto não-vazio de histórias tal que todo instante em $\mathcal{T}$ pertence a alguma história em $\mathcal{B}$ (Burgess, 1978; 1980). A lógica de tempo ramificado ockhamista generaliza diretamente as árvores ramalhentas: a única diferença é que a semântica está agora restrita às histórias do ramalhete. A validade de uma árvore ramalhenta é equivalente à validade de Kamp (Zanardo, 1996; Reynolds, 2002), mas é mais fraca que a validade ockhamista total. Reynolds (2002) oferece o seguinte exemplo de uma fórmula que é ockhamisticamente válida, mas é falsificável em arvores ramalhentas (contra-exemplos adicionais foram oferecidos em *e.g.* Burgess, 1978 e Nishimura, 1979):

$$\Box G(\Box p \to \Diamond F \Box p) \to \Diamond G(\Box p \to F \Box p)$$

O antecedente dessa fórmula intuitivamente permite a construção de uma 'história limite' em que $\Box p$ sempre se sustenta em um ramalhete infinito de histórias diferentes. Tais histórias limite podem ser omitidas em árvores ramalhentas, o que deu origem a discussões filosóficas concernentes à adequação dessas estruturas (ver *e.g.* Nishimura, 1979; Thomason, 1984; e Belnap *et al.*, 2001).

Uma axiomatização completa da validade em árvores ramalhentas é dada em Zanardo (1985) e Reynolds (2002). Encontrar uma axiomatização completa para a validade ockhamista acabou sendo mais difícil. Foi demonstrado que a classe das árvores ockhmistas não é definível na classe das árvores ramalhentas (Zanardo *et al.*, 1999). Em Reynolds (2003), uma axiomatização completa para a validade Ockhamista é reivindicada e uma prova é esboçada. Nesse sistema, o problema das histórias emergentes é tratado por um esquema de axioma infinito que é baseado na fórmula dada acima e deve supostamente garantir a 'propriedade de fechamento de limite'. A prova completa, contudo, não apareceu ainda. O sistema axiomático proposto pode ser encontrado no documento suplementar:

O Sistema Axiomático de Reynolds para OBTL

[48]N.T.: "*bundle*". Termo aqui de difícil tradução para o português, mas que é entendido, nesse contexto, como um pacote de ramos (*branches*) ou ainda como um "feixe de setas de tempo histórico" onde vários ramos estão agrupados e, paralelamente, estendendo-se na mesma direção (para o futuro e/ou para o passado)
[49]N.T.: "*bundle tree*".

5.4 Extensões do peircianismo e do ockhamismo

Diversas variações e extensões das lógicas temporais de tempo ramificado perciana e ockhamista foram propostas e estudadas nos últimos anos, incluindo lógicas que unificam ambas estruturas[50], e mencionaremos brevemente algumas delas aqui.

Brown e Goranko (1999) propuseram uma axiomatização de uma lógica que combina ideias peircianas e ockhamistas. A linguagem da lógica de tempo ramificado ockhamista é estendida por uma modalidade para um ramo *alternativo*, e um tipo especial de *variáveis de ventilador*[51] é introduzido para representar todas as histórias passando por um instante.

A lógica de tempo ramificado com *funções de indistiguibilidade*[52] desenvolvida em Zanardo (1998) unifica o peircianismo e o ockhamismo. A linguagem estende a lógica temporal peirciana com operadores modais, e as fórmulas são valoradas nas assim-chamadas *árvores-I*, as quais são árvores $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ com uma função de indistinguibilidade I que atribui para cada instante de tempo em $\mathcal{T}$ uma partição do conjunto das histórias passando através desse instante. Enquanto na semântica ockhamista a verdade em um instante é relativa a uma história, na semântica sobre árvores-I a verdade em um instante é relativizada a uma classe de equivalência módulo indistinguível[53] nesse instante, *i.e.*, para um conjunto de histórias. O peircianismo e o ockhamismo correspondem aos casos limitantes onde a partição é trivial, isso é, um singuleto[54] ou um conjunto de singuletos, respectivamente. Para detalhes, ver Zanardo (1998), bem como Zanardo (2013) e Ciuni e Zanardo (2010), onde a ideia é combinada com elementos da lógica *stit* de agência.

Uma abordagem que é similar em espírito e, do mesmo modo, unifica peircianismo e ockhamismo é a *semântica de transição* apresentada em Rumberg (2016). O novo recurso dessa estrutura[55] é o de que cursos possíveis de eventos são sucessivamente construídos a partir das possibilidades locais futuras: eles são vistos como cadeias de transições possivelmente não-maximais e fechadas-para-baixo, onde cada transição especifica uma direção

[50] N.T.: "*frameworks*".
[51] N.T.: "*fan variables*".
[52] N.T.: "*indistinguishability functions*".
[53] N.T.: "*equivalence class modulo indistinguishability*".
[54] N.T.: originalmente '*singleton*' e frequentemente mencionado como 'singleto' na literatura em língua portuguesa, trata-se, em matemática, de um conjunto unitário, ou seja, um conjunto que possui um único elemento. Tal termo é usado de outra forma em Química e Física.
[55] N.T.: "*framework*".

possível em um ponto de ramificação[56]. Também cursos possíveis incompletos de eventos tornam-se disponíveis, que podem ser estendidos para o futuro, e a linguagem contém, em adição aos operadores temporais e modais, o assim-chamado operador de estabilidade[57], que permite capturar como o valor de verdade de uma fórmula sobre o futuro muda em um instante no curso do tempo. O peircianismo e o ockhamismo resultam como casos limitantes, restringindo a gama de cursos admissíveis de eventos ao conjunto vazio das transições e cadeias maximais, respectivamente. Para detalhes, ver Rumberg (2016; 2019) e Rumberg e Zanardo (2019). Um breve panorama é apresentado no documento suplementar:

Semântica de Transição

5.5 As lógicas de árvore de computação CTL e CTL*

As lógicas de tempo ramificado são extensivamente utilizadas em ciência da computação. As mais populares sãos as lógicas de árvore de computação CTL e CTL*, que são variações das lógicas de tempo ramificado peirciana e ockhamista. Elas são interpretadas na classe das assim-chamadas *árvores de computação*[58], onde toda história tem o tipo de ordem dos números naturais. Essas árvores são obtidas naturalmente como desdobramentos de árvores de sistemas de transição discretos e representam as possíveis computações infinitas que surgem nesses sistemas. Enquanto CTL precede historicamente CTL*, hoje-em-dia CTL é frequentemente vista como um fragmento de CTL*, e seguimos essa convenção aqui.

- A *lógica completa de árvore de computação*[59] CTL* é a variante computacional do ockhamismo, e foi introduzida por Emerson e Halpern (1985). A linguagem de CTL* contém (as versões reflexivas dos) operadores futuros G e U (*Até que*) bem como o operador *Próxima Vez* X (sem operadores de passado), os quais são agora interpretados em árvores de computação. Como na lógica geral de tempo ramificado

[56] N.T.: “*branching point*”. Para essa expressão em particular, mudamos o padrão até aqui de verter ‘*branching*’ para o português com ‘ramificado’ como em ‘lógica temporal de tempo ramificado’.

[57] N.T.: “*stability operator*”.

[58] N.T.: “*computation trees*”.

[59] N.T.: “*full computation tree logic*”.

ockhamista, a valoração é relativizada para ambos, um instante (aqui chamado *estado*[60]) e uma história (aqui chamada *caminho*[61]). Observamos que em ciência da computação geralmente são assumidas proposições atômicas baseadas em instantes, *i.e.*, a valoração das proposições atômicas depende somente do estado.

- A lógica de árvore de computação CTL é a variante computacional do peircianismo, e foi introduzida por Emerson e Clarke (1982), CTL é o fragmento de CTL* onde cada um dos operadores G, U e X é imediatamente precedido por um operador modal, $\Box$ ou $\Diamond$, aqui denotado geralmente pelos quantificadores de caminho $\forall$ e $\exists$. Isso é, a linguagem de CTL é recursivamente construída usando as modalidades combinadas $\forall G\varphi$, $\forall(\varphi U\psi)$,$\exists X\varphi$ e $\exists G\varphi$, $\exists(\varphi U\psi)$, $\exists X\varphi$. Um precursor de CTL é a lógica UB, introduzida por Ben-Ari *et al.* (1983), em que U não ocorre.

A lógica CTL tornou-se amplamente usada devido às suas boas propriedades computacionais em vista de *checagem de modelo*[62], tendo complexidade linear tanto no tamanho da fórmula de entrada[63] quanto no tamanho do modelo de entrada (enquanto um sistema de transição finito). Contudo, CTL não é muito expressiva, o que levou à sua extensão CTL*. A lógica CTL* é expressivamente muio mais poderosa e subsume[64] a lógica temporal de tempo linear LTL, mas tem complexidades mais altas de checagem de modelo (PSPACE) e de decisão de satisfação (2EXPTIME). Para referências e mais detalhes, ver Emerson (1990) e Stirling (1992).

Uma axiomatização completa de CTL pode ser obtida substituindo os axiomas de LTL por suas versões caminho-quantificadas[65]. Para provas de completude, ver Emerson (1990) e Golblatt (1992). Para CTL* mais axiomas devem ser adicionados para levar em conta as combinações de operadores temporais e modais e para impor a propriedade de fechamento limite das árvores. Uma axiomatização completa para CTL* foi obtida por Reynolds (2001), e um resultado de completude para as extensões de CTL* com operadores de passado é estabelecido em Reynolds (2005). Um esboço do sistema axiomático para CTL pode ser encontrado no documento suplementar:

[60]N.T.: "*state*".
[61]N.T.: "*path*".
[62]N.T.: "*model checking*".
[63]N.T.: "*input*".
[64]N.T.: "*subsumes*".
[65]N.T.: "*path-quantified versions*".

Um sistema axiomático para CTL

Observamos que as lógicas de tempo ramificado peirciana e ockhamista, bem como suas variantes computacionais, têm a propriedade de modelo finito e são decidíveis. Provas de decidibilidade das respectivas lógicas podem ser encontradas em *e.g.* Burgess (1980); Emerson e Sistla (1984); Gurevich e Shelah (1985); Emerson e Halpern (1985); Emerson (1990); Goldblatt (1992); Gabby *et al.* (1994); Finger *et al.* (2002); e Demri *et al.* (2016).

6. Lógicas temporais intervalares

Modelos de tempo baseados em instantes e baseados em intervalos são dois tipos diferentes de ontologias temporais e, embora sejam tecnicamente redutíveis um ao outro, isso não resolve a principal questão semântica que surge ao se desenvolver um formalismo lógico para capturar o raciocínio temporal: devem as proposições sobre o tempo, e, portanto, as fórmulas em uma dada linguagem lógica, serem interpretadas como referindo-se a instantes de tempo ou a intervalos?

Houve várias propostas e desenvolvimentos de lógicas temporais baseadas em intervalos na literatura da lógica filosófica. Importantes contribuições iniciais incluem Hamblin (1972); Humberstone (1979); Röper (1980); e Burgess (1982b). O último fornece uma axiomatização para uma lógica temporal baseada em intervalos envolvendo a relação de precedência temporal entre intervalos nos racionais e nos reais. A abordagem baseada em intervalos para o raciocínio temporal tem sido muito proeminente em Inteligência Artificial. Alguns trabalhos notáveis aqui incluem a lógica do planejamento de Allen (Allen , 1984), o cálculo de eventos de Kowalski e Sergot (1986), e a lógica modal intervalar de Halpern e Shoham (Halpern e Shoham, 1986). Mas aparece também em algumas aplicações em ciência da computação, como *lógicas em tempo real*[66] e *verificação de Hardware*, notavelmente a Lógica Intervalar de Moszkowski (Moszkowski, 1983) e o Cálculo de Duração de Ravn, Zhou e Hoare (ver Hansen e Zhou, 1997).

Aqui apresentaremos brevemente a lógica proposicional modal intervalar proposta por Halpern e Shoham (1986), doravante chamada HS. A linguagem de HS inclui uma família de operadores intervalares unários da forma $\langle X\rangle$, um para cada uma das relações intervalares de Allen sobre tempo linear. As respectivas notações são listadas na Tabela 1 (Seção 2.2).

[66] N.T.: "*real-time logics*".

Dado um conjunto de proposições atômicas PROP, as fórmulas são recursivamente definidas pela seguinte gramática:

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \langle X \rangle \varphi$$

A lógica intervalar HS começa a partir de modelos baseados em instantes sobre tempo linear, e intervalos são considerados elementos definidos. Então deixe $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ ser uma estrutura temporal e assuma que a relação de precedência temporal $\prec$ induz uma ordem linear estrita no conjunto dos instantes de tempo T. Um *intervalo* em $\mathcal{T}$ é definido como um par ordenado $[a, b]$ tal que $a, b \in T$ e $a \leq b$. O conjunto de todos os intervalos em $\mathcal{T}$ é denotado por $\mathbb{I}(\mathcal{T})$. Note que a definição permite 'intervalos de pontos' cujos pontos de começo e fim coincidem, seguindo a proposta original de Halpern e Shoham (1986). Algumas vezes, somente intervalos 'estritos' são considerados, excluindo intervalos-ponto.

Em lógica temporal baseada em intervalos, fórmulas são valoradas em relação aos intervalos de tempo, em vez dos instantes. Um *modelo intervalar*[67] é uma tripla $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V \rangle$ consistindo de uma estrutura temporal $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ e uma valoração V que atribui a cada proposição atômica $p \in PROP$ o conjunto dos intervalos de tempo $V(p) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{I}(\mathcal{T}))$ em que p é considerado verdadeiro. A *verdade de uma fórmula arbitrária* φ *com relação a um dado intervalo* $[a, b]$ *em um modelo intervalar* $\mathcal{M}$ é definido por indução estrutural em fórmulas como se segue:

- $\mathcal{M}, [a, b] \vDash p$ sse $[a, b] \in V(p)$, para $p \in PROP$;
- $\mathcal{M}, [a, b] \nvDash \bot$;
- $\mathcal{M}, [a, b] \vDash \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, [a, b] \nvDash \varphi$;
- $\mathcal{M}, [a, b] \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, [a, b] \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, [a, b] \vDash \psi$;
- $\mathcal{M}, [a, b] \vDash \langle X \rangle \varphi$ sse $\mathcal{M}, [c, d] \vDash \varphi$ para algum intervalo $[c, d]$ tal que $[a, b] R_X [c, d]$, onde R_X é a relação intervalar de Allen correspondendo ao operador modal $\langle X \rangle$ (*cf.* Tabela 1).

[67] N.T.: "*interval model*".

Isso é, os novos operadores intervalares recebem uma semântica no estilo de kripke sobre as relações de Allen associadas. *E.g.*, para a relação “recebe” de Allen, temos:

$$\mathcal{M}, [t_0, t_1] \models \langle A \rangle \varphi \text{ sse } \mathcal{M}, [t_1, t_2] \models \varphi \text{ para algum intervalo } [t_1, t_2].$$

Para cada modalidade de diamante $\langle X \rangle$, a modalidade de caixa correspondente é definida como seu dual: $[X]\varphi \equiv \neg\langle X \rangle \neg\varphi$. Algumas vezes é útil incluir uma constante modal adicional para intervalos de pontos, denotada por π, com a seguinte definição de verdade:

$$\mathcal{M}, [a, b] \models \pi \text{ iff } a = b.$$

Algumas das modalidades HS são definíveis em termos de outras, e, para cada semântica estrita e não-estrita, foram identificados fragmentos minimais que são suficientemente expressivos para definir todos os outros operadores. Conjuntos completos de equivalências que permitem definir certas modalidades HS em termos de outras são apresentadas no documento suplementar:

Inter-definibilidade de Modalidades HS

A lógica HS tem mais de mil fragmentos expressivamente não-equivalentes envolvendo somente alguns dos operadores modais, os quais foram estudados extensivamente (ver Della Monica *et al.* 2011 para uma pesquisa recente). HS e a maioria de seus fragmentos são muito expressivos, e as respectivas noções de validade são geralmente indecidíveis (sob algumas suposições adicionais, mesmo altamente indecidíveis, *viz.* Π^1_1-completa). Contudo, uns muitos fragmentos decidíveis não-triviais de HS foram identificados. Provavelmente o melhor estudado é a *lógica de vizinhança intervalar*, a qual envolve os operadores $\langle A \rangle$ e $\langle \overline{A} \rangle$ (Goranko *et al.* 2003). Um axioma específico para $\langle A \rangle$ (e, simetricamente, para $\langle \overline{A} \rangle$) é $\langle A \rangle\langle A \rangle\langle A \rangle p \to \langle A \rangle\langle A \rangle p$, dizendo que quaisquer dois intervalos consecutivos vizinhos-à-direita podem ser jungidos a um intervalo vizinho-à-direita.

Além das modalidades unárias intervalares HS associadas às relações intervalares binárias de Allen, existe uma operação natural e importante de cortar[68] um intervalo em dois subintervalos, o que dá origem à relação intervalar ternária ‘corte’[69], proposta e estudada em

[68]N.T.: “*chopping*”. Vertemos para o português esse termo utilizando apenas um de seus significados, aquele mais importante nesse contexto, a saber, a ideia de *cortar* ou *partir* (por exemplo, em subintervalos) um composto inteiro (como um certo intervalo de tempo).

[69]N.T.: “*chop*”.

Moszkowski (1983). A estrutura[70] foi posteriormente estendida em Venema (1991) para a lógica CDT, a qual envolve próximo ao 'corte' (C) os dois operadores residuais de 'corte' D e T. A lógica CDT foi completamente axiomatizada em Venema (1991); ver também Goranko *et al.* (2004) e Konur (2013).

Existe uma interpretação espacial natural das lógicas temporais intervalares, baseada na ideia de que os pares de pontos que definem um intervalo sobre uma ordem linear L podem ser considerados coordenadas de um ponto no plano-$L \times L$. As relações entre os intervalos são, então, interpretadas como relações espaciais entre os pontos correspondentes. Essa interpretação foi frutíferamente explorada para transferir vários resultados técnicos entre lógicas espaciais e intervalares, tais como a indecibilidade, ver *e.g.* Venema (1990) e Marx e Reynolds (1999).

Finalmente, algumas palavras sobre o relacionamento entre lógicas temporais intervalares e a lógica de primeira-ordem. A tradução padrão da lógica de tempo verbal básica de Prior TL em lógica de primeira-ordem (apresentada na Seção 3.3) se estende naturalmente às lógicas intervalares, onde proposições atômicas são representadas na linguagem de primeira-ordem por relações binárias. Ocorre que alguns fragmentos de HS podem ser traduzidos no fragmento FO^2 de duas variáveis da lógica de primeira-ordem, o que eventualmente implica sua decidibilidade. A lógica intervalar expressivamente mais forte é a lógica intervalar de vizinhança, que foi provada ser expressivamente completa para FO^2 (Bresolin *et al.*, 2009). Outros fragmentos de HS requerem ao menos três variáveis distintas para a tradução padrão. Ainda assim, mesmo a lógica inteira HS é menos expressiva que o fragmento FO^3 de três variáveis da lógica de primeira-ordem, para o qual Venema (1991) mostrou que a lógica CDT é expressivamente completa.

Para mais sobre lógicas temporais intervalares, ver Halpern e Shoham (1986); Venema (1990); Goranko *et al.* (2003; 2004); Della Monica *et al.* (2011); a pesquisa de Konur (2013), e as suas referências.

7. Outras variantes de lógicas temporais

Até agora discutimos a família tradicional de lógicas temporais, mas existem numerosas variações e desenvolvimentos alternativos que fornecem formalismos úteis para várias aplicações. Apresentaremos brevemente algumas delas aqui: lógicas temporais híbridas,

[70] N.T.: "*framework*".

lógicas métricas e temporais em tempo-real, e lógicas proposicionais quantificadas.

7.1 Lógicas temporais híbridas

Uma família notável de lógicas temporais, que enriquecem a estrutura tradicional, são lógicas temporais híbridas, que combinam a lógica temporal proposicional com elementos de lógica de primeira-ordem e, assim, aumentam consideravelmente o poder de expressão da linguagem.

A noção mais proeminente nas lógicas temporais híbridas é a de um *nominal*. Os nominais são proposições atômicas especiais, pois são considerados verdadeiros exatamente em um instante do modelo temporal. Consequentemente, pode-se pensar em um nominal enquanto dizendo "Agora é uma hora"[71]. Por essa razão, os nominais são às vezes também chamados 'variáveis de relógio'[72]. A ideia dos nominais pode ser traçada até Prior (1967, Capítulo V; 1968, Capítulo XI), que considerou a possibilidade de identificar instantes com proposições-instante: um instante pode ser concebido como a conjunção de todas aquelas proposições que são verdadeiras nesse instante. Um primeiro tratamento sistemático da lógica temporal híbrida foi dado em Bull (1970). Além dos nominais, linguagens híbridas são frequentemente aumentadas por mecanismos sintáticos adicionais, tais como o operador de satisfação, quantificadores nominais, e ponteiros de referência[73], que discutiremos brevemente abaixo. Os dois primeiros mecanismos podem ser já encontrados no trabalho de Prior (ver Blackburn, 2006) e foram reinventados independentemente em Passy e Tinchev (1985). Ponteiros de referência foram introduzidos somente mais tarde em Goranko (1996), e um mecanismo similar de referência é encontrado em Alur e Henzinger (1994).

- *Operador de satisfação*: O operador de satisfação $@_i$ permite expressar que uma dada fórmula é verdadeira em um modelo no instante de tempo denotado pelo nominal i. Isso é, $\mathcal{M}, t \vDash @_i\varphi$ sse $\mathcal{M}, V(i) \vDash \varphi$, onde $V(i)$ é o único instante onde i é verdadeiro. A noção de verdade em um instante de um modelo temporal é importada para a linguagem-objeto.

- *Quantificadores sobre nominais*: Por meio dos quantificadores nominais $\forall i$ pode-se expressar que uma dada fórmula é verdadeira em um dado instante de tempo em um

[71] N.T.: "*It is a o'clock now*".
[72] N.T.: "'*clock variables*'".
[73] N.T.: "*reference pointers*".

modelo temporal sob cada possível enunciado de instantes de tempo para i. Mais formalmente, $\mathcal{M}, t \vDash \forall i\varphi$ sse $\mathcal{M}_{[i\to s]}, t \vDash \varphi$ para qualquer instante s em $\mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}_{[i\to s]}$ é o modelo obtido a partir de $\mathcal{M}$ ao redesignar a denotação de i para s. Todo o poder de quantificação em primeira-ordem é trazido para a linguagem temporal, enquanto muitas de suas virtudes proposicionais são preservadas.

- *Ponteiros de referência*: Ponteiros de referência $\downarrow_i$ são também frequentemente referidos como 'vinculantes'[74], pois vinculam[75] o valor do nominal i ao instante atual da valoração. A fórmula $\downarrow i\varphi$ é verdadeira em um dado instante t em um modelo temporal sse φ é verdadeiro em t sempre que o nominal i denota t. Isso é, $M, t \vDash \downarrow i\varphi$ sse $M[i \to t], t \vDash \varphi$. Ponteiros de referência fornecem um mecanismo para referência ao instante de tempo atual, *i.e.* dizendo 'agora'. Para um tratamento lógico sistemático do 'agora', ver Kamp (1971).

Outros operadores que podem ser considerados operadores híbridos de lógica temporal são as *modalidades universais*, a *modalidade de diferença*, e *quantificadores proposicionais*. A modalidade universal A diz que uma dada fórmula é verdadeira em todo instante do modal temporal e, consequentemente, captura a noção global de verdade em um modelo: $M, t \vDash A\varphi$ sse $M \vDash \varphi$. A modalidade de diferença D, por outro lado, afirma que a fórmula dada é verdadeira em algum outro instante. Note que ambas as modalidades são abstraídas da relação de acessibilidade subjacente. Quantificadores proposicionais Ap introduzem quantificação de segunda-ordem na linguagem proposicional, e discutimo-los na Seção 7.3 abaixo.

Linguagem híbridas são muito expressivas. Aqui estão somente dois exemplos:

- A irreflexividade da relação de precedência, a qual não é exprimível em TL, pode ser expressa na linguagem com nominais e o operador de satisfação $@_i$ com $@_i G\neg i$.

- Os operadores S e U são definíveis em uma linguagem com nominais e vinculantes[76]: $\varphi U\psi := \downarrow_i F(\psi \wedge H(Pi \to \varphi))$ e da mesma forma para S.

[74] N.T.: "*binders*".
[75] N.T.: "*bind*".
[76] N.T.: "*binders*".

Enquanto as versões mais fracas das lógicas híbridas — com nominais, operadores de satisfação, modalidade universal, e modalidade de diferença — são ainda decidíveis, a mais expressiva delas — com quantificadores sobre nominais ou ponteiros de referência — são geralmente indecidíveis. Para detalhes, ver Goranko (1996); e Arecesse Ten Cate (2006).

Versões de tempo ramificado de lógicas temporais híbridas foram investigadas também. Para um panorama das variedades de lógicas temporais híbridas e seu desenvolvimento histórico, ver Blackburn e Tzakova (1999) e o verbete sobre lógica híbrida.

7.2 Lógicas temporais métricas e de tempo real

Lógicas temporais métricas remontam a Prior, também (ver Prior, 1967, Capítulo VI). Ele usou a notação $Pn\varphi$ para "foi o caso no intervalo n antes que φ" (*i.e.* φ foi o caso n unidades de tempo antes) e $Fn\varphi$ para "será o caso no intervalo n depois que φ" (i.e φ vai ser o caso n unidades de tempo depois). Esses operadores pressupõem que o tempo tenha uma certa estrutura métrica e possa ser dividido em unidades temporais, as quais podem ser associadas a horários[77] (*e.g.* horas, dias, anos, etc.). Se as unidades relevantes são dias, por exemplo, o operador $F1$ lê-se como 'amanhã'.

Prior notou que $Pn\varphi$ pode ser definido como $F(-n)\varphi$. O caso $n = 0$ corresponde ao tempo presente. Os operadores métricos validam princípios de combinação tais como:

$$Fn\varphi Fm\varphi \to F(n+m)\varphi$$

A inter-relação das versões métricas e não-métricas dos operadores temporais é capturada pelas seguintes equivalências:

$$\begin{array}{ll} P\varphi \equiv \exists n(n < 0 \land Fn\varphi) & F\varphi \equiv \exists n(n > 0 \land Fn\varphi) \\ H\varphi \equiv \forall n(n < 0 \to Fn\varphi) & G\varphi \equiv \forall n(n > 0 \to Fn\varphi). \end{array}$$

São estudadas lógicas temporais baseadas em instantes para o tempo métrico em *e.g.* Rescher e Urquhart (1971, Capítulo X); Montnari (1996); e Montanari e Policriti (1996). Para lógicas métricas intervalares, ver Bresolin *et al.* (2013).

Várias extensões métricas das lógicas temporais sobre a estrutura dos números reais foram propostas também, dando origem às assim-chamadas lógicas de tempo real[78] Essas

[77]N.T.: "*clock times*".
[78]N.T.: "*real-time logics*".

lógicas introduzem operadores adicionais, tais como os seguintes, que permitem diferentes formalizações da sentença de exemplo “sempre que p ocorre no futuro, q ocorrerá dentro de três unidades de tempo depois”:

- operadores de tempo limitado, *e.g.*: $G(p \to F_{\leq 3} q)$;
- quantificadores de congelamento (semelhantes aos ponteiros de referência em lógica híbrida), *e.g.*: $Gx.(p \to Fy.(q \wedge y \leq x + 3))$;
- Quantificadores sobre variáveis de tempo, *e.g.*: $\forall x G(p \wedge t = x \to F(q \wedge t \leq x + 3))$.

Tais extensões de tempo real são usualmente mais expressivas e frequentemente levam a lógicas com problemas de decisão indecidível. Um caminho para recuperar a decidibilidade é relaxar[79] os requisitos de “pontualidade” que envolvem durações precisas de tempo para requisitos envolvendo intervalos de tempo. Para detalhes, ver *e.g.* Koymans (1990); Alur e Henzinger (1992; 1993; 1994) bem como Reynolds (2010; 2014) sobre as lógicas temporais lineares de tempo real RTL, e a pesquisa de Konur (2013).

7.3 Lógicas temporais proposicionais quantificadas

Lógicas temporais proposicionais são estendíveis com quantificadores sobre proposições atômicas (ver Rescher e Urquhart, 1971, Capítulo XIX). Semanticamente, esses quantificam sobre todas as valorações das respectivas proposições atômicas e, consequentemente, são equivalentes aos quantificadores monádicos de segunda-ordem. As linguagens resultantes são muito expressivas, e as respectivas lógicas são geralmente indecidíveis (frequentemente nem axiomatizáveis recursivamente). Algumas extensões notáveis são a lógica QPTL, a versão proposicional quantificada de LTL (que é decidível embora com complexidade não-elementar), bem como a extensão de CTL* (ver French, 2001). Sistemas axiomáticos completos e os resultados de decidibilidade para a lógica temporal proposicional quantificada QPTL (com e sem operadores de passado) foram apresentadas em Kesten e Pnueli (2002) e French e Reynolds (2003).

[79]N.T.: “*to relax*”.

8. Lógicas temporais de primeira-ordem

Objetos existem no tempo, e mudam suas propriedades ao longo do tempo. Lógicas temporais proposicionais não são suficientemente expressivas para capturar esse aspecto dinâmico do mundo, pois tudo o que está associado a um instante de tempo em um modelo de lógicas temporais proposicionais é um conjunto de proposições atômicas abstratas que são declaradas verdadeiras ali. O que é necessário, em vez disso, é um modelo plenamente desenvolvido[80] da história temporal do mundo, com objetos que possam ter certas propriedades e permanecer em certas relações. Em conformidade, a linguagem deve conter nomes para objetos, variáveis e quantificadores que abrangem objetos, bem como predicados para denotar propriedades e relações, para descrever adequadamente como o mundo é em um dado instante no tempo — além de operadores temporais para raciocínio sobre como o mundo muda ao longo do tempo. Isso é o que as lógicas temporais de primeira ordem fornecem.

8.1 Existência e quantificação no tempo

A existência no tempo é um tópico importante na filosofia do tempo. Objetos geralmente surgem em um ponto no tempo e deixam de existir em algum instante posterior. Mas o que é um objeto existir no tempo? Existem apenas objetos presentes, como um *presentista* gostaria, ou a existência deve ser entendida em um sentido mais amplo, compreendendo objetos do passado e do futuro também, como um *eternalista* gostaria? A controvérsia entre *presentismo* e *eternalismo* é acompanhada por um debate sobre a *persistência*[81], isso é, sobre a questão de como objetos existem através do tempo. Estão os objetos completamente presentes em cada instante em que existem — uma visão conhecida como *endurantismo*[82] — ou persistem por estágios em diferentes instantes no tempo — uma visão chamada *perdurantismo*[83]? Para um panorama detalhado desses debates, ver *e.g.* Dyke e Bardon (2013), Meyer (2013), bem como os verbetes sobre tempo, partes temporais e identidade ao longo do tempo.

Questões similares acerca da existência de objetos no tempo e suas identidades ao

[80]N.T.: "*full-fledged*".
[81]N.T.: "*persistence*".
[82]N.T.: "*endurantism*".
[83]N.T.: "*perdurantism*".

longo do tempo surgem no contexto das lógicas temporais de primeira-ordem, embora sob um pretexto diferente. Essas questões tornam-se particularmente importantes quando vão para a interação de temporalidade e quantificação. Por exemplo, a sentença “Um filósofo será um rei” pode ser interpretada de diversas maneiras, tais como[84]

- $\exists x(\text{filósofo}(x) \wedge F\,\text{rei}(x))$
  Alguém que é agora um filósofo será um rei em algum tempo futuro.

- $\exists x F(\text{filósofo}(x) \wedge \text{rei}(x))$
  Agora existe alguém que, em algum tempo futuro, será ambos: um filósofo e um rei.

- $F\exists x(\text{filósofo}(x) \wedge F\,\text{rei}(x))$
  Haverá alguém que é um filósofo e posteriormente será um rei.

- $F\exists x(\text{filósofo}(x) \wedge \text{rei}(x))$
  Haverá alguém que, ao mesmo tempo, é ambos: um filósofo e um rei.

As interpretações dadas acima assumem que o domínio da quantificação é sempre relativo a um instante de tempo e que o mesmo indivíduo pode existir em tempos múltiplos. Para habilitar essas interpretações, precisamos introduzir nos modelos um *domínio local* de objetos $D(t)$ para cada instante de tempo t, para restringir o alcance dos quantificadores a esse domínio, e identificar o mesmo objeto através de diferentes tempos.

Além disso, o exemplo acima sugere que o domínio local em um dado instante de tempo contém exatamente aqueles indivíduos que de fato existem naquele instante. A partir de um ponto de vista lógico, contudo, existem caminhos alternativos de como pensar nos domínios locais associados a instantes de tempo, os quais refletem diferentes concepções de existência no tempo. Aqui estão quatro opções naturais:

1. Os objetos surgem em um ponto no tempo e deixam de existir em um tempo posterior, *i.e.*, eles realmente existem somente através de um certo período de tempo. Essa ideia pode ser formalmente capturada ao se assumir que o domínio local em um dado instante de tempo compreende esses, e somente esses, objetos que existem presentemente nesse instante. Assim, os objetos pertencem aos domínios locais precisamente daqueles instantes nos quais realmente existem, e os domínios locais variam de acordo com o tempo.

[84] Adotamos este exemplo do verbete original de Lógica Temporal de Anthony Galton (Galton, 2008).

2. Os objetos realmente existem em um período de tempo, mas permanecem na história temporal do mundo depois que cessam de realmente existir. Nesta abordagem, o domínio local em um instante inclui não somente aqueles objetos que existem presentemente, mas todos os objetos passados também. Isso é, os domínios locais aumentam com o progresso do tempo e novos objetos vem a existir.

3. Alternativamente, pode-se afirmar que todos os objetos que existirão são inicialmente parte da história temporal do mundo, mas desaparecem quando deixam de realmente existir. Tecnicamente, isso equivale à ideia de que o domínio local em um instante compreende todos os objetos presentes e futuros. Assim, os domínios locais diminuem no decorrer do tempo e os objetos deixam de existir.

4. Os objetos do passado, do presente e do futuro existem igualmente. Essa é a noção de existência em um sentido eternalista. Uma maneira de capturar formalmente essa ideia é exigir que o domínio local associado a um instante de tempo contenha todos os objetos que são partes da história temporal do mundo. Consequentemente, os domínios locais permanecem constantes ao longo do tempo.

Uma questão conceitualmente diferente, mas tecnicamente intimamente relacionada, diz respeito ao escopo de quantificação. O que quantificamos em uma configuração temporal?

- Somente sobre aqueles objetos que presentemente existem no instante atual, como pressuposto no exemplo acima?

- Sobre todos os objetos presentes, passados e futuros da história temporal do mundo?

Adotando a terminologia ‘quantificação atualista’ e ‘quantificação possibilista’ de Fitting e Mendelsohn (1998) para o caso temporal, podemos nos referir ao primeiro tipo de quantificação como *quantificação presentista* e usar o termo *quantificação eternalista* para o último. Dependendo da escolha entre essas opções, a sentença “Todo humano nasceu após 1888”, por exemplo, pode ser verdadeira ou falsa. É verdadeira se quantificarmos somente sobre aqueles humanos que vivem atualmente; mas é falsa se quantificarmos sobre todos os humanos na história temporal do mundo, incluindo aqueles que já viveram. Uma questão mais que surge aqui diz respeito às entidades fictícias, tais como Papai Noel ou Píppi Meialonga, os quais não existem atualmente em qualquer instante de tempo. Porém, pode-se dizer que existem em um sentido mais amplo, e pode-se querer incluí-los no domínio de quantificação. Deixamos essa questão de lado aqui e indicamos ao leitor o verbete sobre lógica livre, que é uma lógica que permite referência a entidades inexistentes (*cf.* também Seção 8.6).

Muitas das questões que dizem respeito à inter-relação de existência e quantificação que surgem aqui correspondem também a problemas bem conhecidos em lógicas modais de primeira-ordem, onde uma discussão extensa nessas questões começou já com Frege e Russell e atingiu seu pico nas décadas de 1940-1950 nos trabalhos de R. Barcan-Marcus, R. Carnap, W. Quine, R. Montague, e outros (ver o verbete sobre lógica modal). Um tópico central em lógicas modais de primeira-ordem refere-se à validade ou à invalidade das assim-chamadas fórmulas de Barcan, cuja versão temporal diz intuitivamente: "Se em algum tempo no futuro houver algo que é Q, então existe algo agora que será Q em algum tempo no futuro". A garantia de que esse enunciado é verdadeiro depende crucialmente de como os domínios locais nos vários instantes no tempo são construídos e do quanto nossos quantificadores alcançam. Além do mais, a lógica temporal produz duas versões da fórmula de Barcan, uma para o futuro e uma para o passado.

8.2 A linguagem e os modelos de FOTL

A linguagem básica da lógica temporal de primeira ordem (FOTL) é essencialmente uma extensão de uma dada linguagem de primeira-ordem pelos operadores P e F. Enquanto nas lógicas temporais proposicionais as proposições atômicas são entidades não-estruturadas, em lógicas temporais de primeira-ordem as fórmulas são construídas a partir de termos que denotam indivíduos e símbolos de predicado que denotam relações, e a linguagem é equipada com quantificadores que variam sobre os indivíduos[85]. (Um breve panorama da lógica de primeira-ordem é fornecido no documento suplementar Estruturas e Linguagens Relacionais de Primeira-ordem.) No que se segue, consideramos FOTL sobre uma linguagem de primeira-ordem relacional (sem símbolos funcionais) com igualdade. O conjunto de fórmulas é definido como se segue:

$$\varphi \ := \ R(\tau_1, \dots, \tau_n) \mid \tau_1 = \tau_2 \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \forall x \varphi \mid P\varphi \mid F\varphi,$$

onde $R(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e $\tau_1 = \tau_2$ são fórmulas atômicas. Os conectivos funcionais de

[85]N.T.: "*with quantifiers ranging over individuals*".

verdade $\vee, \rightarrow, e \ \leftrightarrow$, bem como os operadores temporais H e G, podem ser definidos como de costume. Ademais, o dual $\exists$ de $\forall$ é definido por $\exists x\varphi := \neg\forall x\neg\varphi$.

Os modelos de FOTL são baseados em estruturas temporais onde cada instante de tempo é associado a uma estrutura relacional de primeira-ordem. Formalmente, um *modelo temporal de primeira-ordem* é uma quíntupla:

$$\mathcal{M} = (T, \prec, \mathcal{U}, D, \mathcal{I})$$

onde:

- $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ é uma estrutura temporal;
- $\mathcal{U}$ é um domínio global (universo) do modelo;
- $D : T \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ é uma *função de domínio*, atribuindo para cada instante de tempo $t \in T$ um *domínio local* $D_t \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{t \in T} D_t$.[86]
- $\mathcal{I}$ é uma *função de interpretação*, atribuindo para cada $t \in T$:
  - um objeto $\mathcal{I}_t(c) \in \mathcal{U}$ para cada símbolo de constante c;
  - uma relação n-ária $\mathcal{I}_t(R) \subseteq \mathcal{U}^n$ para cada símbolo de predicado n-ário R.

  Note que as interpretações dos símbolos de constante e predicado são definidos localmente, *i.e.* em relação a um dado instante de tempo, enquanto as respectivas extensões variam sobre o domínio global. Essa abordagem permite a referência a objetos que não existem atualmente e permite um tratamento apropriado de relações intertemporais, como, por exemplo, na sentença “Um de meus amigos é um descendente de um seguidor de Guilherme, o Conquistador”[87].

[86]Note que a suposição de que o domínio glocal é a união de todos os domínios locais intuitivamente exclui a possibilidade de indivíduos fictícios que não existam realmente e em algum instante de tempo. Esse problema pode ser resolvido permitindo instantes temporalmente isolados ou mundos possíveis, onde tais objetos fictícios podem residir, ou eliminando o requisito, *i.e.* permitindo objetos no domínio global que não pertençam a nenhum domínio local.

[87]N.T.: Em “*One of my friends is a descendant of a follower of William the Conqueror*”, o autor se refere ao primeiro rei normando da Inglaterra, Guilherme I (como usualmente é chamado em português), mas cujo nome em normando antigo era Williame I; em inglês antigo: Willelm I.

A quádrupla $\mathcal{F} = (T, \prec, \mathcal{U}, D)$ é a chamada *estrutura temporal aumentada*[88] do modelo $\mathcal{M}$. Como o modelo é suposto para representar a evolução temporal do mundo, os domínios locais nos diferentes instantes de tempo na estrutura temporal aumentada subjacente devem estar adequadamente conectados. Existem quatro casos naturais a se distinguir para uma estrutura temporal aumentada, respectivamente para um modelo temporal qualquer de primeira-ordem baseado em:

1. *domínios variados*: nenhuma restrição se aplica;

2. *expansão (aumento) de domínios*: para todo $t, t' \in T$, se $t \prec t'$, então $D_t \subseteq D_{t'}$;

3. *encolhendo (diminuindo) domínios*: $t, t' \in T$, se $t \prec t'$, então $D_{t'} \subseteq D_t$;

4. *domínios localmente constantes*: $t, t' \in T$, se $t \prec t'$, então $D_t = D_{t'}$.

   Assim, uma estrutura temporal aumentada $\mathcal{F}$ tem domínios localmente constantes se e somente se tem ambos: domínios de expansão e encolhimento. Em particular, dizemos que $\mathcal{F}$ tem *um domínio constante* se todos os domínios locais são o mesmo que o domínio global. Como o domínio global é requerido para haver a união de todos os domínios locais, ter domínios localmente constantes implica ter um domínio constante caso o conjunto dos instantes de tempo forme um todo conectado temporalmente.

Uma maneira natural de dar sentido aos quatro casos aqui distinguidos é por meio das quatro noções de existência no tempo discutidas na Seção 8.1 acima.

8.3 Semântica de FOTL

Como em lógica temporal proposicional, as fórmulas de FOTL são valoradas em modelos temporais de primeira-ordem localmente em instantes de tempo. Contudo, como as fórmulas de FOTL podem conter variáveis, a noção de verdade é relativizada não somente a um modelo e um instante de tempo mas também à atribuição de variável. Denotamos o conjunto das variáveis individuais de FOTL por VAR e o conjunto dos termos individuais (*i.e.* variáveis e constantes) por TERM.

[88] N.T.: "*the augmented temporal frame*".

Dado um modelo temporal de primeira-ordem $\mathcal{M} = (T, \prec, \mathcal{U}, D, \mathcal{I})$, uma *atribuição de variável*[89] em $\mathcal{M}$ é um mapeamento v : VAR $\to \mathcal{U}$ que atribui para cada variável $x \in$ VAR um elemento $v(x)$ no domínio global $\mathcal{U}$ do modelo. Cada qual atribuição v pode ser unicamente estendida por uma *valoração de termo*[90] $v : T \times$ TERM $\to \mathcal{U}$ como se segue:

$$v_t(x) := v(x),\ v_t(c) := \mathcal{I}_t(c).$$

Note que a atribuição de variável é globalmente definida, enquanto a valoração dos símbolos constantes dependem do respectivo instante de tempo.

A *verdade de uma fórmula arbitrária φ de FOTL em um dado instante de tempo t em um dado modelo temporal de primeira-ordem $\mathcal{M}$ em relação à atribuição de variável v* (denotada por $\mathcal{M}, t \vDash v\varphi$) é agora definida indutivamente como se segue:

- $\mathcal{M}, t \vDash_v R(\tau_1, \dots, \tau_n)$ sse $(v_t(\tau_1), \dots, v_t(\tau_n)) \in \mathcal{I}_t(R)$, para qualquer símbolo de predicado n-ário e termos $\tau_1, \dots, \tau_n \in$ TERM;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v \tau_1 = \tau_2$ sse $v_t(\tau_1) = v_t(\tau_2)$, para quaisquer termos $\tau_1, \tau_2 \in$ TERM;
- $\mathcal{M}, t \nvDash_v \bot$;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, t \nvDash_v \varphi$;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, t \vDash_v \varphi$ e $\mathcal{M}, t \vDash_v \psi$;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v P\varphi$ sse $\mathcal{M}, t' \vDash_v \varphi$ para algum $t' \in T$ tal que $t' \prec t$;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v F\varphi$ sse $\mathcal{M}, t' \vDash_v \varphi$ para algum $t' \in T$ tal que $t \prec t'$;
- $\mathcal{M}, t \vDash_v \forall x\varphi$ sse ...
  - *quantificação presentista*: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ para todo $a \in D_t$;
  - *quantificação eternalista*: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ para todo $a \in \mathcal{U}$,

[89]N.T.: “*variable assignment*”.

[90]N.T.: “*term valuation*”.

onde $v[a/x]$ é a variante da atribuição de variável v tal que $v[a/x](x) = a$.

Como mencionamos anteriormente, existem duas abordagens naturais à quantificação em lógica temporal: a *quantificação presentista* e a *quantificação eternalista*. Tecnicamente, a quantificação presentista equivale à quantificação sobre o domínio local no dado instante de tempo, enquanto a quantificação eternalista é construída como quantificação sobre o domínio global. As respectivas cláusulas semânticas para o dual $\exists$ de $\forall$ são conformemente lidas como se segue:

- $\mathcal{M}, t \vDash_v \exists x\varphi$ sse ...
  - *quantificação presentista*: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ para algum $a \in D_t$;
  - *quantificação eternalista*: ...$\mathcal{M}, t \vDash_{v[a/x]} \varphi$ para algum $a \in \mathcal{U}$,

Note que a quantificação presentista naturalmente se relaciona a modelos temporais de primeira-ordem com domínios variantes, enquanto na semântica baseada em quantificação eternalista os domínios locais não desempenham nenhum papel essencial. De fato, do ponto de vista técnico, a quantificação eternalista equivale à suposição de que o modelo tem um domínio constante, *i.e.*, todos os domínios locais são iguais ao domínio global. Além disso, em modelos de domínios constantes a semântica baseada em quantificação presentista coincide com a semântica baseada em quantificação eternalista. Assim, a quantificação presentista sugere uma *semântica de domínio variante*[91], enquanto a semântica associada à quantificação eternalista é uma *semântica de domínio constante*[92], e pelo que se segue que usaremos essas expressões intercambiavelmente.

Em cada uma dessas semânticas, a fórmula φ de FOTL é dita *válida em um modelo* $\mathcal{M}$ se e somente se é verdadeira naquele modelo em cada instante de tempo em relação a toda atribuição variável; é *válida em uma estrutura temporal aumentada* se e somente se é válida em cada modelo baseado naquela estrutura; e é *válida* se e somente se é válida em todo modelo.

Adotar uma ou outra abordagem para quantificação afeta a noção de validade, mesmo para princípios não-temporais. Por exemplo, a sentença $\exists x(x = c)$ é válida em lógica de

---

[91]N.T.: "*varying domain semantics*".

[92]N.T.: "*constant domain semantics*".

primeira-ordem, e é também válida na semântica de domínio constante, mas não é mais válida na semântica de domínio variante, porque o objeto atribuído à constante c pode não pertencer ao domínio local. Um outro princípio da lógica de primeira-ordem simples que distingue as duas semânticas é o esquema de *Instanciação Universal* (onde τ é qualquer termo livre para substituir por x em φ):

$$\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau),$$

que é igualmente válido na semântica de domínio constante, mas inválido na semântica de domínio variante, por razões análogas. A principal distinção entre as duas semânticas está, contudo, em termos de princípios que envolvem a interação entre operadores temporais e quantificação, tais como os esquemas da fórmula de Barcan e suas conversas.

8.4 A quantificação eternalista e a semântica de domínio constante

Vejamos algumas validades e não-validades de FOTL na semântica de domínio constante, isso é, na semântica com quantificação eternalista. Denotamos a validade na semântica de domínio constante com $\models_{\mathsf{CD}}$.

- Todas as instâncias de FOTL de fórmulas de primeira-ordem válidas são CD-válidas.
- Em particular, o esquema da *Instanciação Universal* é CD-válido:
  $\models_{\mathsf{CD}} \forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$, para qualquer termo τ livre para substituir por x em φ.
- O esquema da *Fórmula de Barcan Futura*[93], BF_G, é CD-válida:
  $\models_{\mathsf{CD}} \forall xG\varphi(x) \to G\forall x\varphi(x)$ ou, equivalentemente,
  $\models_{\mathsf{CD}} F\exists x\varphi(x) \to \exists xF\varphi(x)$.
- O esquema da *Fórmula Conversa de Barcan Futura*, CBF_G, é CD-válida:
  $\models_{\mathsf{CD}} G\forall x\varphi(x) \to \forall xG\varphi(x)$ ou, equivalentemente, $\models_{\mathsf{CD}} \exists xF\varphi(x) \to F\exists x\varphi(x)$.
- Algumas importantes não-validades incluem:
  $\not\models_{\mathsf{CD}} \forall xF\varphi(x) \to F\forall x\varphi(x)$ e $\not\models_{\mathsf{CD}} G\exists x\varphi(x) \to \exists xG\varphi(x)$.

[93] Adotamos aqui a terminologia de McArthur (1976).

Reivindicações análogas são sustentadas para as versões de passado dos esquemas acima, com H e P em vez de G e F. Um sistema axiomático para o FOTL minimal com semântica de domínio constante, bem como alguns teoremas importantes dele, são fornecidos no documento suplementar:

> Sistema Axiomático **FOTL (CD)** para o FOTL Minimal com Semântica de Domínio Constante

8.5 Quantificação presentista e semântica de domínio variante

Na semântica de domínio variante, variáveis livres variam sobre o domínio global, enquanto que os quantificadores são dados em uma leitura presentista, *i.e.*, eles quantificam somente sobre os domínios locais. Como consequência, algumas fórmulas que são válidas na semântica com domínios constantes não são mais válidas na semântica de domínio variante. Mais importante, a semântica de domínio variante invalida a Instanciação Universal $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ bem como ambas: os esquemas de Fórmula de Barcan Futura e Pretérita e suas conversas. Denotamos a validade na semântica de domínio variante com $\models_{\mathsf{VD}}$.

De fato, os esquemas das Fórmulas de Barcan BF_G e BF_H e suas conversas CBF_G e CBF_H correspondem às condições nos domínios locais. Para qualquer estrutura temporal aumentada $\mathcal{F}$, vale o seguinte:

- $\mathcal{F}$ tem domínios em expansão sse $\mathcal{F} \models_{\mathsf{VD}} \mathsf{BF}_H$ sse $\mathcal{F} \models_{\mathsf{VD}} \mathsf{CBF}_G$;
- $\mathcal{F}$ tem domínios decrescentes[94] sse $\mathcal{F} \models_{\mathsf{VD}} \mathsf{BF}_G$ sse $\mathcal{F} \models_{\mathsf{VD}} \mathsf{CBF}_H$.

Note que o esquema de Barcan Futuro BF_G corresponde semanticamente ao esquema conversa de Barcan Pretérito CBF_H, e vice-versa. Do exposto acima segue-se que uma estrutura temporal aumentada $\mathcal{F}$ tem localmente domínios constantes se e somente se ou uma ou outra das seguintes fórmulas é VD-válida em $\mathcal{F}$: $\mathsf{BF}_G \wedge \mathsf{BF}_H$, $\mathsf{CBF}_G \wedge \mathsf{CBF}_H$, $\mathsf{BF}_G \wedge \mathsf{CBF}_G$, ou $\mathsf{BF}_H \wedge \mathsf{CBF}_H$.

Um sistema axiomático para FOTL minimal com semântica de domínio variante é fornecido no documento suplementar:

> Sistema Axiomático **FOTL (VD)** para FOTL Minimal com Semântica de Domínio Variante

[94] N.T.: "*shrinking*".

8.6 O predicado de existência

Enquanto o presentismo e o eternalismo são teorias alternativas na filosofia do tempo, suas respectivas manifestações técnicas são inter-redutíveis. Por um lado, a semântica de domínio constante com quantificação eternalista pode ser obtida a partir da semântica de domínio variante com quantificação presentista impondo a restrição de que os esquemas da Fórmula de Barcan Pretérita e Futura e suas conversas sejam válidos. Por outro lado, a semântica de domínio variante pode ser simulada na semântica de domínio constante adicionando à linguagem de FOTL um predicado de existência para 'existência no instante de tempo atual', que pode ser definido na semântica de domínio variante por $E(\tau) := \exists x(x = \tau)$.

Com o predicado de existência à nossa disposição, a sentença "Existe algum homem que assinou a Declaração de Independência" pode ser formalizado de duas formas diferentes:

$$\exists x(\mathsf{homem}(x) \wedge P(\mathsf{assina}(x)))$$

e

$$\exists x(E(x) \wedge \mathsf{homem}(x) \wedge P(\mathsf{assina}(x)))$$

Enquanto a fórmula preliminar é verdadeira no instante presente na semântica de domínio constante com quantificação eternalista, a fórmula posterior é presentemente falsa nessa semântica, mas era verdadeira em 1777.

Para generalizar, para toda fórmula φ de FOTL, sua *relativização-E* na linguagem estendida pode ser obtida substituindo toda ocorrência de $\forall x$ em φ pode "$\forall(\exists(x) \rightarrow \ldots)$" e toda ocorrência de $\exists x$ por "$\exists x(E(x) \wedge \ldots)$". Então vale o seguinte: para qualquer sentença de FOTL φ que não contenha E, φ é válida na semântica de domínio variante se e somente se sua relativização-E é válida na semântica de domínio constante. A questão que permanece, a partir de um ponto de vista filosófico, é de se a existência é um predicado legítimo. Um sistema axiomático para o FOTL minimal com predicado de existência pode ser obtido nas linhas da lógica livre, conforme delineado no documento suplementar:

Os axiomas para o FOTL minimal com E: a Versão de Lógica Livre

8.7 Descrições definidas e nomes próprios

Uma questão adicional que surge em lógica temporal de primeira-ordem refere-se à interpretação de termos individuais. Dependendo de que tipo de termos nós estamos lidando, podemos ou não querer permitir que a interpretação deles varie com o tempo.

Na semântica delineada acima, as atribuições de variáveis são definidas globalmente, e consequentemente variáveis individuais selecionam o mesmo objeto em todos os tempos. A interpretação de símbolos constantes, por outro lado, é localmente específica, relativa ao instante de tempo, mesmo que as respectivas extensões abranjam o domínio global. De um ponto de vista filosófico, parece natural tratar símbolos constantes como *nomes próprios* ou como *designadores rígidos*, isso é, impor o requerimento adicional de que suas interpretações sejam constantes através de diferentes tempos. Símbolos constantes podem, então, ser usados para identificar um objeto no tempo. Por exemplo, tratando a como um nome para Aristóteles, a sentença "Aristóteles existiu, mas não existe mais" pode ser formalizada na semântica de domínio variante como $P\exists x(x = a) \wedge \neg\exists x(x = a)$.

Se constantes são tratadas como designadores rígidos, o princípio de *Necessidade da Identidade* $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow A(\tau_1 = \tau_2)$ é válido para ambos: variáveis e constantes (lembre-se que $A\varphi = H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$). Contudo, a linguagem pode também conter termos individuais para os quais esse princípio falha. As *descrições definidas* são um exemplo central, tais como "o Papa", que podem selecionar objetos diferentes em tempos diferentes. De forma importante, nomes próprios e descrições definidas requerem um tratamento semântico diferente e não livremente inter-substituível. Por exemplo "O papa foi o soberano do Estado do Vaticano[95] desde 1929" é verdadeira, enquanto "Jorge Mario Bergoglio foi o soberano do Estado do Vaticano desde 1929" é falsa. Além disso, em uma configuração temporal, surge a questão de como lidar com descrições definidas que se referem a objetos que não mais existe ou ainda não existem, tais como "o primeiro filho a nascer na África do Sul em 2050". Os problemas ficam ainda mais intrincados em uma configuração de tempo ramificado, onde tempo e modalidade são combinadas. Note, por exemplo, que algumas descrições definidas que são temporalmente rígidas podem ser modalmente não-rígidas. Para mais sobre descrições definidas no contexto da lógica temporal, ver Rescher e Urquhart (1971, Capítulos XIII e XX) e Cocchiarella (2002).

Uma maneira de lidar com descrições definidas é trocar uma abordagem extensional

[95]N.T.: Expressão mais usual em português para "*Vatican City*".

dos termos individuais por uma intensional. Isso é, em vez de atribuir para cada termo em cada instante de tempo uma extensão, *i.e.* um objeto a partir do domínio, pode-se atribuir para cada termo uma intensão, *i.e.* uma função dos instantes de tempo nos objetos. Uma estrutura[96] geral na qual aos termos individuais são atribuídos ambos, extensões e intensões, é a Lógica de Primeira-Ordem Intensional de Casos (CIFOL) proposta em Belnap e Müller (2014a; 2014b). Em CIFOL, a identidade é extensional, a predicação é intensional, e os indivíduos podem ser identificados através dos tempos sem se fazer uso da designação rígida. A estrutura[97] é também interessante no contexto do debate sobre persistência, pois permanece metafisicamente neutra com relação à natureza precisa dos objetos incluídos no domínio geral.

8.8 Alguns resultados técnicos sobre lógicas temporais de primeira-ordem

Lógicas temporais de primeira-ordem são muito expressivas, e isso geralmente vem com um alto preço computacional: essas lógicas podem ser dedutivamente muito complexas e tipicamente são altamente indecidíveis (*cf.* Merz, 1992; Gabby *et al.* 1994; Hodkinson *et al.* 2002). A lógica temporal de primeira-ordem com semântica de domínio constante sobre os números naturais, por exemplo, com somente duas variáveis e símbolos de relações unárias, não somente é indecidível, mas nem mesmo recursivamente axiomatizável (*cf.* Börger *et al.* 1997; Hodkinson *et al.* 2000).

Poucos fragmentos naturais axiomatizáveis, e também poucos decidíceis, de lógicas temporais de primeira-ordem foram identificados e investigados até hoje. Esses incluem lógicas temporais de primeira-ordem com *Desde que* e *Até que* sobre a classe de todos os fluxos lineares do tempo e sobre a ordem dos racionais (Merz, 1992; Reynolds, 1996), o fragmento $T(FOs)$ de FOTL, onde operadores temporais podem não ocorrer dentro do escopo de um quantificador (Gabbay *et al.*, 1994, Capítulo 14), bem como o fragmento monádico, permitindo apenas fórmulas com no máximo uma variável livre no escopo de um operador temporal (ver Hodkinson *et al.* 2000; 2001; 2002 e Wolter e Zakharyaschev, 2002). Porém, como mostrado no último artigo, já o fragmento monádico com igualdade não é mais recursivamente axiomatizável. Para mais resultados da decidibilidade para fragmentos adequadamente restritos de FOTL, ver Hodkinson *et al.* (2000). Referências técnicas adicionais

[96]N.T.: “*framework*”.
[97]N.T.: “*framework*”.

são dadas em Gabbay *et al.* (1994, Capítulo 14) e Kröger e Merz (2008). Para resultados de completude para lógicas modais de primeira-ordem ver também Fitting e Mendelsohn (1998) e o verbete sobre lógica modal.

Para mais discussão filosófica sobre lógicas modais e temporais de primeira-ordem, ver Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XX); McArthur (1976); Garson (1984): Linsky e Zalta (1994); van Benthem (1995, Seção 7); Fitting e Mendelsohn (1998); Wölfl (1999); Cocchiarella (2002); bem como Lindström e Segerberg (2006).

9. Combinando lógicas temporais e outras

Lógicas podem ser usadas para raciocinar sobre aspectos dinamicamente mutáveis do mundo, e o tempo desempenha um papel em muitos domínios. Por exemplo, a noção de conhecimento estudada em lógica epistêmica, a ideia de uma ação subjacente às lógicas de agência, ou o conceito físico de espaço em lógicas espaciais, todas suportam uma íntima relação com o tempo. É natural, portanto, adicionar uma dimensão temporal a essas lógicas e equipar as linguagens correspondentes com operadores temporais que são adequados para capturar a noção relevante de mudança.

De um ponto de vista filosófico, existem muitas maneiras de combinar modelos e sistemas lógicos: produtos, fusões, etc. (ver o verbete sobre combinação de lógicas). Essas construções fornecem mecanismos diferentes para temporalizar uma lógica e levantam questões genéricas sobre a transferência de propriedades lógicas, tais como as axiomatizações, completude, decidibilidade. Decidibilidade, por exemplo, é geralmente preservada em fusões, enquanto é frequentemente perdida em produtos de sistemas lógicos. Para uma discussão geral de temporalizar sistemas lógicos e propriedades de lógicas temporalizadas, ver Finger e Gabbay (1992; 1996); Finger *et al.* (2002); e Gabbay *et al.* (2003). Aqui somente apresentamos e discutimos brevemente alguns dos casos mais populares de sistemas lógicos temporalizados.

9.1 Lógicas epistêmico-temporais

Lógicas epistêmico-temporais reúnem lógicas temporais e lógicas do conhecimento (multi-agente). Algumas propriedades interessantes podem ser naturalmente expressas combinando a modalidade epistêmica K ("o agente sabe que") com operadores temporais, *e.g.*

recordação perfeita[98]: $K\varphi \to GK\varphi$ (Se o agente conhece φ agora, então o agente sempre conhecerá φ no futuro) e *não-aprendizagem*[99]: $FK\varphi \to K\varphi$.

Várias lógicas epistêmico-temporais foram desenvolvidas durante os anos 80, com um estudo unificador de Halpern e Vardi (1989). Eles consideram uma variedade de 96 lógicas epistêmico-temporais nos chamados *sistemas interpretados*, *i.e.* conjuntos de execuções em um sistema de transição com relações epistêmicas de indistinguibilidade no espaço de estados para cada agente. A variedade é baseada em diversos parâmetros: *número de agentes* (algum ou muitos), *a linguagem* (com ou sem conhecimento comum), *o modelo formal de tempo* (linear ou ramificado), *habilidades de recordação*[100] (sem recordação, recordação limitada, ou recordação perfeita), *habilidades de aprendizagem* (aprendizagem ou sem aprendizagem), *sincronia* (sícrona ou assíncrona), *estado inicial único*. Dependendo da escolha particular desses parâmetros, a complexidade computacional do problema de decisão para essas lógicas varia amplamente desde PSPACE-completo até altamente indecidível (Π^1_1-completo). Para detalhes, ver Halpern e Vardi (1989); Fagin *et al.* (1995); bem como mais recentemente van Benthem e Pacuit (2006), que examinam uma série de resultados de decidibilidade e indecidibilidade para lógicas epistêmico-temporais e ilustram como a combinação do tempo com outras modalidades influencia na complexidade computacional.

9.2 Lógicas Temporais e Lógicas de Agência

O raciocínio temporal é um aspecto importante do raciocínio sobre os agentes e suas ações. A família provavelmente mais influente de lógicas de agência nos estudos filosóficos é a família das assim-chamadas lógicas *stit*, originárias do trabalho de Belnap e Perloff (1988). Essas lógicas contém fórmulas da forma *stit*φ, lendo-se "O agente cuida para que φ", que permitem raciocinar sobre como as escolhas de um agente para agir afetam o mundo. As versões originais da lógica *stit* não envolve operadores temporais. No entanto, sua semântica é baseada em modelos de tempo ramificado ockhamista, onde um conjunto de escolhas de um agente em um dado instante de tempos é representado por uma partição do conjunto das histórias passando por esse instante. Intuitivamente, a fórmula *stit*φ é verdadeira em um dado instante de tempo t em relação a uma dada história h sse a escolha do agente em um instante t em relação à história h garante que φ, *i.e.* se φ é verdadeira em t em

[98]N.T.: "*perfect recall*".
[99]N.T.: "*no learning*".
[100]N.T.: "*recall*".

relação a todas as histórias na respectiva célula de escolha. Para uma discussão detalhada das variedades de lógica *stit* e seu desenvolvimento histórico, ver Belnap *et al.*(2001) e o verbete sobre a lógica da ação. Extensões temporais das lógicas *stit* foram propostas em Broersen (2011) e Lorini (2013): em Broersen (2011) o operador *stit* é combinado com o operador *Próxima Vez* X em um único operador que requer que o objetivo seja atingido no próximo passo, enquanto em Lorini (2013) o operador *stit* e os operadores temporais são separadamente tratados.

Uma outra família importante de lógicas temporais de agência são as *lógicas de tempo alternado*[101] ATL e ATL*, introduzidas em Alur *et al.* (2002). ATL e ATL* são extensões multi-agente das lógicas de árvore de computação CTL e CTL*, e se tornaram uma estrutura[102] para o raciocínio estratégico em sistemas de multi-agente. Lógicas temporais de tempo alternado enriquecem a linguagem com quantificadores de caminho estratégico $\langle\langle C\rangle\rangle\varphi$, que intuitivamente dizem "a coalizão C tem uma estratégia coletiva para garantir que o objetivo φ seja alcançado em todos os caminhos permitidos por essa estratégia coletiva", onde o objetivo φ é uma fórmula temporal. Enquanto as lógicas *stit* são construídas sobre a noção abstrata de uma história, ATL e ATL* são interpretadas sobre as assim-chamadas estruturas de jogos concorrentes, nas quais os caminhos são vistos como sequências de estados sucessores que são gerados por transições discretas causadas por ações coletivas de todos os agentes. Uma combinação de ATL e teoria *stit* foi desenvolvida em Broersen *et al.* (2006). As lógicas de tempo ramificado CTL e CTL* podem ser consideradas como versões de agente único[103] de ATL e ATL*. Muito embora os últimos sejam muito mais expressivos, eles geralmente preservam as boas propriedades computacionais das preliminares. Uma introdução geral para ATL a partir de uma perspectiva lógica temporal é fornecida em Demri *et al.* (2016, Capítulo 9).

9.3 Lógicas espaço-temporais

Espaço e tempo estão intimamente relacionados no mundo físico, e se tornaram inseparáveis em teorias físicas modernas. Enquanto as primeiras teorias físicas, que culminaram na mecânica clássica de Newton, pressupunham uma noção absoluta de tempo independente do espaço, a teoria da relatividade de Einstein vê o tempo e o espaço como inextrincavel-

[101]N.T.: "*alternating-time logics*"
[102]N.T.: "*framework*".
[103]N.T.: "single-agent versions".

mente entrelaçados, como modelado pela variedade quadrimensional do espaço-tempo de Minkowski.

O raciocínio lógico combinado sobre o espaço-tempo é discutido em Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XVI). Em Goldblatt (1980), a lógica modal diodoreana de Minkowski de espaço-tempo foi estudada e provada em Uckelman e Uckelman (2007). Foram realizadas também investigações lógicas na teoria da relatividade, ver *e.g.* Andréka *et al.* (2007).

Em Inteligência Artificial, o raciocínio do espaço-tempo evoluiu ativamente nas décadas passadas, particularmente no contexto de bancos de dados espaço-temporais[104], ontologias, e redes de restrição. O principal foco aqui está sobre a caracterização lógica dos modelos espaço-temporais, expressividade e complexividade computacional (Gabelaia *et al.*, 2005; Kontchakov *et al.*, 2007).

Uma outra linha interessante de pesquisa é desencadeada pela teoria do espaço-tempo ramificado desenvolvida em Belnap (1992). Essa teoria refere-se ao espaço-tempo tal como a teoria do tempo ramificado de Prior refere-se ao tempo linear, isso é, combina o raciocínio de espaço-tempo com o indeterminismo. Ver *e.g.* Müller (2013) e Placek (2014), onde a topologia do espaço-tempo ramificado é estudada no pano-de-fundo da teoria da relatividade.

9.4 Lógicas de descrição temporal

Lógicas de descrição são essencialmente variações de lógicas modais. Elas envolvem *conceitos* (predicados unários) e *papéis* (predicados binários) e são usadas para descrever várias ontologias e as relações entre os conceitos delas (ver *e.g.* Baader e Lutz, 2006). Lógicas de descrição podem ser temporalizadas de várias maneiras. Para detalhes, ver Artale e Franconi (2000); Wolter e Zakhryaschev (2000); e Lutz *et al.* (2008).

9.5 Lógicas temporais e outras lógicas não-clássicas

O raciocínio temporal pode naturalmente ser combinado com vários sistemas lógicos não-clássicos, resultando, por exemplo, em lógicas temporais multivaloradas (Rescher e Urquhart, 1971, Capítulo XVIII), lógicas temporais intuicionistas (Ewald, 1986), lógicas temporais construtivas e paraconsistentes (Kamide e Wansing, 2010; 2011), lógicas temporais probabilísticas (Hart e Sharir, 1986; Konur, 2013), etc.

[104] N.T.: "*spatio-temporal databases*".

10. Dedução lógica e métodos de decisão para lógicas temporais

Extensas pesquisas e numerosas publicações nos últimos 50 anos desenvolveram uma variedade de sistemas de dedução lógica e métodos de decisão para as lógicas temporais aqui mencionadas e muito mais. Os *sistemas axiomáticos ao estilo de Hilbert* são os sistemas de dedução lógica mais comuns para lógicas temporais, mas muitos sistemas completos de *tableaux semânticos*, *cálculos sequenciais*, e *sistemas baseados em resolução* foram propostos também. Algumas referências gerais sobre sistemas dedutivos para lógicas temporais (além das referências mais específicas mencionadas em outras partes desse texto) incluem: Rescher e Urquhart (1971); McArthur (1976); Burgess (1984); Emerson (1990); Goldblatt (1992); Gabbay *et al.* (1994); van Benthem (1995); Bolc e Szalas (1995); Gabbay e Guenthner (2002); Gabbay *et al.* (2003); Fisher *et al.* (2005); Blackburn *et al.* (2006); Baier e Katoen (2008); Kröger e Merz (2008); Fisher (2011); Demri *et al.* (2016).

Um dos problemas de decisão lógica mais importantes é o de determinar se uma dada fórmula de uma dada lógica é válida (ou satisfatória[105]) na semântica fornecida por essa lógica. Particularmente eficientes e praticamente úteis para decidir a satisfatibilidade são os *métodos baseados em tableaux*, originários do trabalho pioneiro de Beth, Hintikka, Smullyan, e Fitting. Esses métodos são baseados em uma pesquisa sistemática da um modelo satisfatório (ou de falsificação de contra-modelos[106]) se uma fórmula de entrada que é testada para satisfatibilidade é fornecida, e eles garantem a detecção desse modelo sempre que exista[107]. Métodos baseados em tableaux foram desenvolvidos com sucesso para testes construtivos de satisfiabilidade para uma variedade de lógicas temporais. Ver Goré (1999) para uma pesquisa sobre sistemas de tableaux para muitas lógicas temporais e mais especificamente: Ben-Ari *et al.* (1983) para a lógica de tempo ramificado UB; Emerson e Halpern (1985) para a lógica de árvore de computação CTL; Wolper (1985) para a lógica temporal de tempo linear LTL; Kontchakov *et al.* (2004) sobre tableaux temporalizantes; Reynolds (2007) para CTL com semântica de árvores ramalhentas[108]; Goranko e Shkatov (2010) para ATL; Reynolds (2011) para a lógica de árvore de computação total CTL*; Reynolds (2014) para a lógica temporal de tempo real RTL, etc.

[105] N.T.: "*restp. satisfiable*".
[106] N.T.: "*restp. falsifying countermodel*".
[107] N.T.: "*they are guaranteed to find such a model whenever it exists*".
[108] N.T.: "*bundled tree semantics*".

Outros métodos que se provaram praticamente frutíferos para decisão de satisfatibilidade bem como para checagem de modelo de lógicas temporais em ciência da computação são os *métodos baseados em autômatos*, os quais foram ativamente desenvolvidos desde o início dos anos 1990. Esses métodos transformam fórmulas temporais em autômatos nas palavras infinitas[109] (para lógicas de tempo linear) ou árvores infinitas (para lógicas de tempo ramificado) e representam modelos para as lógicas como objetos de entrada (árvores ou palavras infinitas) para seus autômatos associados. Assim, a satisfatibilidade de uma fórmula torna-se equivalente à linguagem do autômato associado não ser vazia. Os métodos são baseados em resultados clássicos sobre decidibilidade das teorias monádicas de segunda-ordem dos números naturais (de Büchi) e das árvores binárias infinitas (de Rabin). Por exemplo, em Emerson e Sistla (1984), autômatos em árvores infinitas e o teorema de Rabin foram usados para obter um procedimento de decisão para CTL*. Para mais detalhes, ver Vardi (2006).

Referências importantes sobre resultados de decidibilidade e procedimentos de decisão para várias lógicas temporais incluem: Burgess (1980) e Gurevich e Shelah (1985) para lógicas de tempo ramificado; Burgess e Gurevich (1985) para lógicas temporais lineares; Goldblatt (1992) para lógicas temporais métricas e em camadas[110]; French (2001) para algumas lógicas de tempo ramificado proposicionais quantificadas.

Embora a maioria das lógicas temporais sejam decidíveis, a adição de alguns recursos sintáticos ou semânticos podem fazê-las explodir computacionalmente e tornarem-se indecidíveis. As causas mais comuns de indecidibilidade de lógicas temporais, além de combinações com outras lógicas expressivas, incluem: modelos em grade[111]; operadores temporais ao longo de múltiplas linhas do tempo; produtos de lógicas temporais; lógicas baseadas em intervalos sem nenhuma suposição de localidade; mecanismos de referência de tempo, tais como ponteiros de referência híbridos e quantificadores de congelamento; recursos aritméticos, tais como adição de tempo, restrição exata de tempo, etc. Contudo, existem várias maneiras de domar as lógicas temporais e restaurar a decidibilidade, tais como a adição de restrições sintáticas e paramétricas (*e.g.* sobre o número de variáveis proposicionais ou a profundidade do aninhamento[112]), a imposição de restrições semânticas adequadas (*e.g.* lo-

[109]N.T.: "*on infinite words*".
[110]N.T.: "*metric and layered temporal logics*".
[111]N.T.: "*grid-like models*".
[112]N.T.: "*the depth of nesting*".

calidade pra lógicas intervalares), a identificação de fragmentos decidíveis (*e.g.* os fragmentos de duas variáveis FO_2 da lógica clássica de primeira-ordem, fragmentos guardados[113], fragmentos monádicos), etc.

11. Aplicações de lógicas temporais

A lógica temporal é um campo cujo desenvolvimento foi pesadamente movido por considerações filosóficas. Ao mesmo tempo, os formalismos lógicos e os sistemas técnicos desenvolvidos ao longo dos anos encontraram aplicação em várias disciplinas diferentes, abrangendo desde ciência da computação, inteligência artificial e linguística até ciências naturais, cognitivas e sociais. Nessa seção, discutimos brevemente algumas aplicações pertinentes de lógicas temporais em ciência da computação, inteligência artificial e linguística.

11.1 Lógicas temporais em Ciência da Computação

A ideia de aplicar o raciocínio temporal à análise de sistemas de transição determinísticos e estocásticos estava já presente na teoria de processos e eventos em Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XIV). Contudo, foi com o artigo seminal de Pnueli (1977) que a lógica temporal tornou-se realmente proeminente em ciência da computação. Pnueli propôs a aplicação de lógicas temporais para a especificação e verificação de *programas e sistemas reativos e concorrentes*. A fim de assegurar o comportamento correto de um programa reativo, no qual as computações são não-terminais (*e.g.* um sistema operacional), é necessário especificar e verificar formalmente as execuções infinitas aceitáveis desse programa. Além disso, para assegurar a correção de um programa concorrente, onde dois ou mais processadores estão trabalhando em paralelo, é necessário especificar e verificar formalmente sua interação e sincronização.

As propriedades-chave de computações infinitas que podem ser capturadas por padrões[114] temporais são vivacidade, segurança e equidade[115] (ver Manna e Pnueli, 1992):

- As propriedades ou eventualidades de *vivacidade* envolvem padrões temporais das formas Fp, $q \to Fp$, ou $G(q \to Fp)$, os quais asseguram que se uma condição

[113] N.T.: “guarded fragments”.
[114] N.T.: “*patterns*”.
[115] N.T.: “*liveness, safety, and fairness*”.

prévia específica (q) é inicialmente satisfeita, então um estado desejável (satisfazendo p) vai eventualmente ser alcançado no curso da computação. Exemplos são "Se uma mensagem é enviada, será eventualmente entregue" e "Sempre que um trabalho de impressão for ativado, será eventualmente completado".

- As propriedades de *segurança* ou *invariância* envolvem padrões temporais das formas Gp, $q \to Gp$, ou $G(q \to Gp)$, que asseguram que se uma condição prévia específica (q) for inicialmente satisfeita, então estados indesejáveis (violando a condição de segurança de p) nunca ocorrerão. Exemplos são: "Não haverá mais de um processo em sua seção crítica em qualquer momento de tempo", "Um recurso nunca será usado por dois ou mais processos simultaneamente" ou, para dar exemplos mais práticos: "Os semáforos nunca mostram verde em ambas direções", "Um trem nunca passará em um semáforo vermelho".

- As propriedades de *equidade* envolvem combinações de padrões temporais das formas GFp ("infinitamente frequentemente p") ou FGp ("eventualmente sempre p"). Intuitivamente, a equidade requer que sempre que vários processos que compartilham recursos sejam executados concorrentemente, eles sejam tratados 'de maneira equânime[116]' pelo sistema operacional, escalonador, etc. Um requerimento típico de equidade diz que se um processo é persistente suficiente no envio de uma solicitação (*e.g.* mantém-se enviando-o outra e outra vez novamente), sua solicitação será eventualmente concedida.

Uma computação infinita é formalmente representada pelo modelo da lógica temporal de tempo linear LTL. Sistemas não-determinísticos são modelados em estruturas de tempo ramificado. Assim, ambos, LTL e as lógicas de árvore de computação CTL e CTL*, foram muito importantes para a especificação e a verificação de sistemas reativos e concorrentes.

O exemplo a seguir combina as propriedades de vivacidade e segurança de uma única computação: "Sempre que um estado de alerta é alcançado, o alarme é ativado e permanece ativado até um estado seguro seja eventualmente alcançado". Essa propriedade é exprimível em LTL como

$$G(\text{alerta} \to (\text{alarme}\, U\, \text{estado seguro})).$$

[116]N.T.: "*fairly*".

Um outro exemplo, referindo-se a todas as computações no sistema, é: "Se o processo σ for eventualmente ativado em alguma computação partindo do estado atual, então em toda computação partindo de lá sempre que σ for ativado permanecerá ativado até que o processo τ esteja desativo". Essa propriedade pode ser formalizada em CTL* como

$$\Diamond F\, \mathsf{ativado}_\sigma \to \Box G(\mathsf{ativado}_\sigma \to (\mathsf{ativado}_\sigma\, U\, \mathsf{desativado}_\tau)).$$

11.2 Lógicas temporais em Inteligência Artificial

Inteligência Artificial (IA) é uma das áreas principais da aplicação das lógicas temporais. Relacionar o raciocínio temporal à IA foi sugerido já na discussão filosófica inicial em IA por McCarthy e Hayes (1969), a teoria de eventos e processos em Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XIV), e as teorias baseadas em períodos de Hamblin (1972); ver Øhrstrøm e Hasle (1995) para um panorama desses desenvolvimentos iniciais. Nos anos 1980, a representação e o raciocínio temporais tornaram-se um tema progressivamente proeminente em IA com muitos trabalhos influentes, incluindo a lógica temporal de McDermott para o raciocínio sobre processos e planos (McDermott, 1982); a teoria geral de ação e tempo de Allen (Allen, 1984); o cálculo de eventos de Kowalski e Sergot (1986); a lógica temporal reificada de Shoham (1987); a lógica da representação do tempo de Ladkin (1987); e o trabalho sobre gerenciamento de banco de dados temporal de Dean e McDermott (1987). Galton (1987) fornece uma abordagem sistemática desse e de outros desenvolvimentos importantes nesse período, ver também Vila (1994) e Pani e Bhattacharjee (2001) para revisões abrangentes. Trabalhos influentes nos anos 1990 incluem a introdução das lógicas temporais baseadas em intervalos de Helpern e Shoham (1991) e de Allen e Ferguson (1994), com a representação de ações e eventos; o Cálculo de Situação de Pinto e Reiter (1995); e a Teoria da Ação de Lamport (Lamport, 1994), etc. Mais desenvolvimentos importantes relacionados ao raciocínio temporal e à IA desde então incluem: o raciocínio temporal em linguagem natural, ontologias temporais, banco de dados temporais e resolução de restrições[117], planejamento temporal, lógicas temporais executáveis, raciocínio espaço-temporal, raciocínio temporal em sistemas baseados em agentes, etc. O campo tem gradualmente se tornado rico e amplo — como testemunhado pelo manual de 20 capítulos editado por Fisher *et al.* (2005) — que é impossível inspecionar mesmo que brevemente aqui, então somente marcamos uns poucos

[117] N.T.: "*constraint solving*".

de seus principais tópicos de relevância filosófica que estiveram no foco das lógicas e do raciocínio temporal em IA.

- A abordagem lógica prevalente para a representação temporal e o raciocínio em IA, especialmente nos anos 1980-1990, tem sido tradicionalmente baseadas em variações temporais da lógica de primeira-ordem, e não na lógica temporal ao estilo de Prior. A abordagem é melhor ilustrada pelo assim-chamado *método dos argumentos temporais*[118] (McCarthy e Hayes, 1969; Shoham, 1987; Vila, 1994). De acordo com esse método, a dimensão temporal é capturada pelo aumento de proposições e predicados com argumentos de 'registro de data e hora'[119], como, por exemplo, "Publicar(A. Prior, *Tempo e Modalidade*, 1957)"[120]. Uma alternativa, ainda que uma abordagem intimamente relacionada, é a de uma *lógica temporal reificada*[121] (McDermott, 1982; Allen, 1984; Shoham, 1987; ver Ma e Knight, 2001 para uma pesquisa). Essa abordagem faz uso de meta-predicados reificadores, tais como 'VERDADEIRO' e 'FALSO', mas também 'MANTÉM', 'OCORRE', 'ANTES', 'DEPOIS', relações intervalares tais como 'ENCONTRA', 'SOBREPÕE-SE', etc., as quais são aplicadas para proposições de algumas linguagens lógicas padrões (*e.g.* a lógica clássica de primeira-ordem). Um exemplo de uma expressão reificada é "OCORRE (Nascido (A. Prior), 1914)". Associada às teorias do tempo estão as teorias de *incidência temporal*[122] (*cf.* Vila 2005). Ainda, a proeminência da abordagem baseada em lógica modal foi sempre forte, e mais recentemente ressurgiu, *e.g.* no contexto do raciocínio temporal baseado em agente (*cf.* Fisher e Wooldridge, 2005).

- As teorias do raciocínio temporal em IA distinguem entre *fluentes*[123], que são proposições que descrevem estados do mundo que podem mudar ao longo do tempo, e *eventos*[124], representando o que acontece no mundo e causa mudanças entre estados. Tópicos filosóficos que surgem aqui dizem respeito à natureza dos fluentes e

[118] N.T.: "*method of temporal arguments*".
[119] N.T.: "'*time stamp*'".
[120] N.T.: "*Publish(A. Prior, Time and Modality, 1957)"*".
[121] N.T.: "*reified temporal logics*".
[122] N.T.: "*temporal incidence*".
[123] N.T.: "*fluents*".
[124] N.T.: "*events*".

eventos, o significado de eventos instantâneos, a distinção entre estados homogêneos e eventos não-homogêneos, o *problema de um instante em divisão*[125], o *problema de estrutura*[126], etc. Para mais discussão, ver Shoham (1987); Galton (1990); e Vila (2005). Ver também a discussão mencionada no raciocínio sobre ação e mudança na Seção 4 do verbete sobre lógica e inteligência artificial.

- Ambos: fluentes e eventos, podem ser considerados em tempo discreto ou contínuo e podem ser duradouros ou instantâneos. Isso mantém vivo o debate sobre modelos formais baseados em instantes *versus* baseados em intervalos, com várias teorias seguindo e comparando ambas abordagens, incluindo van Benthem (1983); Allen (1983); Allen e Hayes (1989); Allen e Ferguson (1994); Galton (1995); Vila (2005); etc.

Para mais leituras e discussões sobre raciocínio temporal e lógicas em IA, ver Vila (1994); Galton (1995); o manual abrangente de Fisher *et al.* (2005); e o capítulo mais conciso do manual de Fisher (2008).

11.3 Lógicas temporais em Linguística

Tempo verbal[127] é uma característica importante das linguagens naturais. É um dispositivo linguístico que permite especificar uma localização relativa dos eventos no tempo, geralmente com relação ao tempo de fala. Na maioria das linguagens, incluindo o Inglês, o tempo verbal torna-se manifesto em um sistema de diferentes tempos verbais. O Inglês permite uma distinção entre tempo verbal passado, presente e futuro ('*will*' futuro) e, tradicionalmente, as respectivas formas perfeitas e progressivas são também referidas como tempos verbais.

Conforme dito acima, a invenção da lógica de tempo verbal de Prior foi largamente motivada pelo uso do tempo verbal em linguagem natural. Uma abordagem lógica alternativa ao tempo para tempo verbal foi fornecida por Reichenbach (1947), que sugeriu uma análise dos tempos verbais em inglês em termos de três pontos no tempo: tempo de fala, tempo

---

[125] N.T.: "*dividing instant problem*".
[126] N.T.: "*frame problem*".
[127] N.T.: "*Tense*".

de evento, e tempo de referência, onde o tempo de referência é um ponto contextualmente saliente no tempo, o qual, intuitivamente, captura a perspectiva da qual o evento é visto. Usando a noção de tempo de referência, Reichenbach foi capaz de distinguir, por exemplo, entre o passado simples ("Eu escrevi uma carta")[128] e o presente perfeito ("Eu escrevi uma carta")[129], que são conflitantes na abordagem de Prior. Em ambos os casos, de passado simples e de presente perfeito, o tempo de evento precede o tempo de fala; mas, no caso preliminar o tempo de referência coincide com o tempo de evento enquanto no último caso o tempo de referência é simultâneo ao tempo de fala.

Nem a estrutura[130] de Prior nem a de Reichenbach pode dar conta da diferença entre, por exemplo, o passado simples ("Eu escrevi uma carta") e o passado progressivo ("Eu estava escrevendo uma carta"). A distinção relevante aqui é de aspecto em vez de tempo verbal e naturalmente requer que uma configuração baseada em intervalos ou baseada em eventos seja adequadamente tratada. Para abordagens nessas linhas, ver *e.g.* Dowty (1979); Parsons (1980); Galton (1984); e van Lambalgen e Hamm (2005).

Enquanto a análise de Reichenbach faz referência a um ponto no tempo contextualmente saliente, na abordagem de Prior os tempos verbais são construídos como operadores temporais, os quais são interpretados como quantificadores sobre instantes no tempo. Isso levanta a questão geral: os tempos verbais em linguagem natural devem ser tratados como quantificadores, ou eles se referem a pontos específicos no tempo? Em um artigo influente, Partee (1973) forneceu o seguinte contra-exemplo contra um tratamento quantificador de tempos verbais: a sentença "Eu não desliguei o fogão" significa nem que (1) não há um instante anterior no qual eu não desligo o fogão, nem isso significa que (2) não existe um instante anterior no qual eu desligo o fogão. O primeiro requisito é muito fraco, o segundo é muito forte. Partee sugeriu uma analogia entre tempos verbais e pronomes referenciais. Com essa proposta, tempos verbais referem-se a pontos específicos contextualmente dados no tempo (*e.g.* 8 horas dessa manhã) que sejam pressupostos para se manter relações temporais apropriadas com o tempo de fala. Consecutivamente, as abordagens que restringem a quantificação a um intervalo de tempo contextualmente dado (*e.g.* essa manhã)

---

[128]N.T.: "*I wrote a letter*".

[129]N.T.: "*I have written a letter*". Em português não há diferença sintática entre presente perfeito e passado simples. Contudo, a diferença semântica pode ser percebida em alguns contextos de uso, por exemplo: "Quando eu era adolescente, eu escrevi (*I wrote*) uma carta para o meu ídolo"; "Eu escrevi (*I have written*) uma carta todo mês este ano".

[130]N.T.: "*frameworks*".

tornaram-se populares. Nessas abordagens, a sentença de exemplo de Partee tem o significado intuitivo: não há um instante de tempo anterior no intervalo de tempo contextualmente saliente no qual eu desliguei o fogão. Formalmente, essa ideia é compatível com ambos: um quantificador e um tratamento referencial de tempos verbais; para detalhes, ver Kuhn e Portner (2002) e Ogihara (2011).

Outras questões pertinentes em linguística relacionadas ao tempo dizem respeito ao significado dos advérbios temporais e conectivos, a interação de tempo verba e quantificação, a interpretação de tempos verbais incorporados e sequência de tempo, bem como a inter-relação de tempo verbal e modalidade. Para um panorama e uma discussão adicional na aplicação das lógicas temporais em linguística, ver *e.g.* Steedman (1997); Kuhn e Portner (2002); Mani *et al.* (2005); ter Meulen (2005); Moss e Tiede (2006); Ogihara (2007; 2011); Dyke (2013); e o verbete sobre aspecto e tempo verbais.

Leitura adicional

Para referências adicionais sobre lógicas temporais, ver os panoramas em Venema (2001) e Müller (2011), bem como as bibliografias detalhadas em Rescher e Urquhart (1971); Øhrstrøm e Hasle (1995); Gabbay *et al.* (1994); Fisher *et al.* (2005); Baier e Katoen (2008); e Demri ete al. (2016).

12. Apêndice

12.1 Suplemento: O Sistema Axiomático de Burgess-Xu para Desde que e Até que e Algumas Extensões

O sistema axiomático de Burgess-Xu para versões reflexivas de S e U estende a lógica proposicional clássica com os seguintes esquemas de axiomas e suas imagens espelhadas, com U e S bem como G e H trocados:

- $G\varphi \to \varphi$
- $G(\varphi \to \psi) \to \varphi U \chi \to \psi U \chi$
- $G(\varphi \to \psi) \to \chi U \varphi \to \chi U \psi$
- $\varphi \wedge \chi U \psi \to \chi U(\psi \wedge \chi S \varphi)$

- $\varphi U\psi \to (\varphi \wedge \varphi U\psi)U\psi$

- $\varphi U(\varphi \wedge \varphi U\psi) \to \varphi U\psi$

- $\varphi U\psi \wedge \chi U\theta \to (\varphi \wedge \chi)U(\psi \wedge \theta) \vee (\varphi \wedge \chi)U(\psi \wedge \chi) \vee (\varphi \wedge \chi)U(\varphi \wedge \theta)$

e as regras de inferência NEC$_G$ e NEC$_H$. Essa axiomatização, traduzida pelas versões estritas de S e U, foi estendida por Venema (1993) para completar sistemas axiomáticos para:

- todas as *ordenações lineares discretas*, por adição de $F\top \to \bot U\top$ e seu dual $P\top \to \bot S\top$;

- todas as *boas-ordenações*, por adição também de $H\bot \vee PH\bot$ e $F\varphi \to (\neg\varphi)U\varphi$;

- $\langle \mathbf{N}, < \rangle$, por adição de $F\top$ ao sistema prévio.

12.2 Suplemento: Algumas variações do Sistema Axiomático para LTL

Note que (GFP$_G$) generaliza o axioma de indução (IND): $\varphi \wedge G(\varphi \to X\varphi) \to G\varphi$. De fato, o axioma (GFP$_G$) pode ser substituído pela seguinte regra de indução, a qual é dedutível no sistema acima:

- Se $\vdash \psi \to \varphi \wedge X\psi$, então $\vdash \psi \to G\varphi$.

Da mesma forma, (LFP$_U$) pode ser substituída pela seguinte regra derivável:

- Se $\vdash (\psi \vee (\varphi \wedge X\theta)) \to \theta$, então $\vdash \varphi U\psi \to \theta$.

Além disso, após definir Gp como $\neg(\top U \neg p)$, os axiomas (FP$_G$) e (GFP$_G$) tornam-se dedutíveis a partir do resto.

12.3 Suplemento: O Sistema Axiomático de Reynolds para OBTL

Reynolds (2003) propôs sistemas axiomáticos completos para OBTL para ambos: a validade de árvore remalhenta e a validade ockhamista, assumindo proposições atômicas baseadas em instantes. O sistema preliminar estende a lista de axiomas e regras de inferência para G e H em um fluxo de tempo linearmente ordenado com os axiomas de S5 para $\Box$, o axioma $G\bot \to \Box G\bot$ implicando maximalidade de histórias, o esquema de axioma

(HN) $P\varphi \to \Box P\Diamond\varphi$,

dizendo que todas as histórias que passam pelo instante atual compartilham o mesmo passado, e a assim-chamada Regra da Irreflexividade de Gabbay, usada para forçar a irreflexividade da relação de precedência temporal:

(IRR) Se $\vDash (p \wedge H\neg p) \to \varphi$, então $\vDash \varphi$, fornecido que p não ocorra em φ.

Para axiomatizar completamente a validade ockhamista, Reynolds adiciona o seguinte esquema infinito de "axiomas de fechamento limite"[131]:

(LC) Se $\Box G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (\Diamond\varphi_i \to \Diamond F \Diamond \varphi_{i+1}) \to \Diamond G_{\leq} \bigwedge_{i=0}^{n-1} (\Diamond\varphi_i \to F\Diamond\varphi_{i+1})$

onde $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ são quaisquer fórmulas de OBTL, $\varphi_n = \varphi_0$, e $G_{\leq}\theta := \theta \wedge G\theta$.

12.4 Suplemento: Semântica de Transição

A semântica de transição, introduzida em Rumberg (2016), define uma lógica temporal de tempo ramificado em que os cursos possíveis de eventos são modelados por cadeias de possibilidades locais futuras, *i.e.* pelos conjuntos de *transições*[132] linearmente ordenadas, e não por histórias. Enquanto histórias representam cursos possíveis completos de eventos, conjuntos de transições podem também representar cursos possíveis incompletos de eventos, que podem, então, ser estendidos para o futuro, assim viabilizando uma imagem dinâmica da inter-relação da atualidade, da possibilidade e do tempo (para uma introdução intuitiva da semântica de transição nessas linhas, ver Rumberg, 2019).

A noção de transição aqui empregada generaliza a noção de transição prevalente em ciência da computação. Intuitivamente, transições capturam as possíveis continuações futuras imediatas de um ponto de ramificação em uma árvore $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$, e uma transição é formalmente definida como um par $\langle t, H \rangle$ consistindo de um ponto de ramificação $t \in T$ e uma classe de equivalência $H \subseteq \mathcal{H}(t)$ de histórias indivisas em t (onde duas

[131] N.T.: "*limit closure axioms*".

[132] N.T.: "*transitions*".

histórias $h, h' \in \mathcal{H}(t)$ são ditas indivisíveis em t se e somente se $h, h' \in \mathcal{H}(t')$ para algum instante de tempo t' tal que $t \prec t'$). Uma ordenação parcial estrita linear-para-trás entre transições é obtida ao longo das seguintes linhas: $\langle t, H\rangle$ precede $\langle t', H'\rangle$ se e somente se ($t \prec t'$ e $H' \subset H$, e um *curso possível de eventos* C é definido como uma cadeia de transições possivelmente não-maximal e fechada-para-baixo ordenada por essa relação. Note que todo curso possível de eventos C naturalmente corresponde a um conjunto não-vazio de histórias, a saber, o *conjunto das histórias permitidas por* C, definido por $\mathcal{H}(C) := \bigcap_{\langle t,H\rangle \in C} H$.

A linguagem de transição contém, além dos operadores temporais e modais, um assim-chamado operador de estabilidade S, o qual é interpretado como um quantificador universal sobre as possíveis extensões futuras de um dado conjunto de transição. Dado um conjunto de proposições atômicas PROP, o conjunto de fórmulas da linguagem de transição pode ser recursivamente definido como se segue:

$$\varphi := p \in PROP \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid P\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \Diamond\varphi \mid S\varphi.$$

Em semântica de transição, as fórmulas são valoradas em um modelo de uma árvore $\mathcal{T} = \langle T, \prec\rangle$ em pares (t, C) que consistem de um instante de tempo $t \in T$ e um curso possível de eventos C compatível com esse instante, *i.e.* $\mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}(t) \neq \emptyset$. Um *modelo de árvore de transição* é uma tripla $\mathcal{M} = \langle T, \prec, V\rangle$ onde $\mathcal{T} = \langle T, \prec\rangle$ é uma árvore e V é uma valoração que atribui para toda proposição atômica $p \in PROP$ o conjunto dos pares (t, C) em que p é considerado verdadeiro. A *verdade de uma fórmula arbitrária* φ *em um instante* t *relativamente ao curso possível de eventos* C *em uma transição de modelo de árvore* $\mathcal{M}$ é definida indutivamente como se segue:

$\mathcal{M}, t, C \vDash p$ sse $(t, C) \in V(p)$, para $p \in PROP$;
$\mathcal{M}, t, C \nvDash \bot$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, t, C \nvDash \varphi$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, t, C \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, t, C \vDash \psi$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash P\varphi$ sse $\mathcal{M}, t', C' \vDash \varphi$, para algum instante de tempo $t' \in h$ tal que $t' \prec t$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash F\phi$ sse para toda história $h \in \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}(t)$ existe algum $t' \in h$ tal que $t \prec t'$ e $\mathcal{M}, t', C \vDash \varphi$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash G\phi$ sse para toda história $h \in \mathcal{H}(C) \cap \mathcal{H}(t)$ e para todo instante de tempo $t' \in h$ tal que $t \prec t'$, $\mathcal{M}, t', C \vDash \varphi$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash \Diamond\varphi$ sse $\mathcal{M}, t, C' \vDash \varphi$ para algum curso possível de eventos C' tal que $\mathcal{H}(C') \cap \mathcal{H}(t) \neq \emptyset$;
$\mathcal{M}, t, C \vDash S\phi$ sse $\mathcal{M}, t, C' \vDash \phi$ para todo curso possível de eventos $C' \subseteq C$ tal que $\mathcal{H}(C') \cap \mathcal{H}(t) \neq \emptyset$.

Assim, uma fórmula da forma $F\varphi$ é verdadeira em um instante t com relação a um curso possível de eventos C se e somente se toda história que passa por t e é permitida por C contém algum instante posterior t' no qual φ é verdadeiro relativamente a C. Note que, devido à relativização do conjunto das histórias permitidas por C, os valores de verdade das fórmulas sobre o futuro podem mudar sob extensões do conjunto de transição C, e o operador de estabilidade S captura esse comportamento. Uma fórmula φ é dita *estavelmente verdadeira* (estavelmente falsa) em (t, C) se é verdadeira (falsa) em t com relação a todas as extensões possíveis de C, *i.e.* não importa como o futuro se desenrola mais tarde. Fórmulas que não são nem estavelmente verdadeiras e nem estavelmente falsas são *contingentes*.

Uma fórmula da linguagem de transição é *válida* se e somente se é verdadeira em todos os pares (t, C) em todos os modelos de árvore de transição. Enquanto a semântica de transição valida o princípio do terceiro excluído $\varphi \vee \neg\varphi$, ela invalida o princípio do terceiro excluído futuro $F\varphi \vee F\neg\varphi$. Contudo, a última disjunção pode somente ser contingentemente falsa: o esquema $\neg S \neg(F\varphi \vee F\neg\varphi)$ é válido de modo geral.

Ambas as lógicas temporais de tempo ramificado, peirciana e ockhamista, podem ser obtidas como casos limitantes restringindo o alcance de cursos possíveis de eventos ao conjunto vazio de transições e cadeias maximais, respectivamente. Para evocar a ideia formalmente, nós precisamos equipar as árvores $\mathcal{T} = \langle T, \prec \rangle$ com um conjunto primitivo de conjuntos de transição *TS* tais que todo instante de tempo em $\mathcal{T}$ pertença a uma história permitida por algum conjunto das transições em *TS*. O peircianismo equivale ao caso onde *TS* $= \{\emptyset\}$, enquanto o ockhamismo sai como resultado se *TS* $= \{C \mid C$ linear maximal$\}$. As correspondentes classes das estruturas são definíveis pelas fórmulas $\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$ e $F\varphi \vee F\neg\varphi$, respectivamente.

Note que a semântica de transição não é uma genuína semântica à maneira de Kripke, *i.e.*, as fórmulas não são somente avaliadas em instantes de tempo, que formam os elementos primitivos de uma árvore, e a linguagem contém operadores intensionais que não são interpretados na relação de precedência temporal entre instantes de tempo. Em vez disso, a semântica de transição faz uso de um segundo parâmetro definido de verdade, e os conjuntos de transição empregados como esse segundo parâmetro são conjunto-teoreticamente bastante complexos[133]. Em Rumberg e Zanardo (2019) é mostrado que a complexidade conjunto-teorética pode ser evitada: com base em uma correspondência um-a-um entre conjuntos de transição e certas subestruturas de árvore, chamadas *podas*[134], é fornecida uma classe de estruturas de Kripke definíveis em primeira-ordem com uma genuína semântica à maneira de Kripke que preserva a validade, o que, então, naturalmente leva a resultados de axiomatizabilidade.

12.5 Suplemento: Um sistema axiomático para CTL

Para obter uma axiomatização completa de CTL é suficiente substituir os axiomas da lógica temporal de tempo linear LTL por suas versões caminho-quantificadas. Por exemplo, os axiomas que caracterizam os operadores temporais G e U como pontos fixados agora tornam-se:

- $\exists G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \exists X \exists G\varphi)$;
- $\forall G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \forall X \forall G\varphi)$;
- $\exists(\varphi U \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge (\varphi \wedge \exists X \exists(\varphi U \psi)))$;

[133] N.T.: "*set-theoretically rather complex*"
[134] N.T.: Originalmente "*prunings*".

- $\forall(\varphi U \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \forall X \forall(\varphi U \psi))$.

As regras de inferência são *modus ponens* e a regra de necessitação-$\forall G$: se $\vdash \varphi$, então $\vdash \forall G \varphi$.

12.6 Suplemento: Inter-definibilidade de Modalidades HS

- Nas semânticas estritas (*i.e.* as semânticas sem intervalos-ponto), as seis modalidades $\langle A \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle E \rangle$, $\langle \overline{A} \rangle$, $\langle \overline{B} \rangle$, $\langle \overline{E} \rangle$ são suficientes para expressar todas as outras, como mostrado pelas seguintes equivalências:

$$\begin{array}{ll} \langle L \rangle \varphi \equiv \langle A \rangle \langle A \rangle \varphi, & \langle \overline{L} \rangle \varphi \equiv \langle \overline{A} \rangle \langle \overline{A} \rangle \varphi, \\ \langle D \rangle \varphi \equiv \langle B \rangle \langle E \rangle \varphi, & \langle \overline{D} \rangle \varphi \equiv \langle \overline{B} \rangle \langle \overline{E} \rangle \varphi, \\ \langle O \rangle \varphi \equiv \langle E \rangle \langle \overline{B} \rangle \varphi, & \langle \overline{O} \rangle \varphi \equiv \langle B \rangle \langle \overline{E} \rangle \varphi. \end{array}$$

- Nas semânticas não-estritas, as quatro modalidades $\langle B \rangle$, $\langle E \rangle$, $\langle \overline{B} \rangle$, $\langle \overline{E} \rangle$ são suficientes para expressar todas as outras, como mostrado pelas seguintes equivalências:

$$\langle A \rangle \varphi \equiv ([E]\bot \wedge (\varphi \vee \langle \overline{B} \rangle \varphi)) \vee \langle E \rangle ([E]\bot \wedge (\varphi \vee \langle \overline{B} \rangle \varphi)),$$
$$\langle \overline{A} \rangle \varphi \equiv ([B]\bot \wedge (\varphi \vee \langle \overline{E} \rangle \varphi)) \vee \langle B \rangle ([B]\bot \wedge (\varphi \vee \langle \overline{E} \rangle \varphi)),$$
$$\langle L \rangle \varphi \equiv \langle A \rangle (\langle E \rangle \top \wedge \langle A \rangle \varphi),$$
$$\langle \overline{L} \rangle \varphi \equiv \langle \overline{A} \rangle (\langle B \rangle \top \wedge \langle \overline{A} \rangle \varphi),$$
$$\langle D \rangle \varphi \equiv \langle B \rangle \langle E \rangle \varphi,$$
$$\langle \overline{D} \rangle \varphi \equiv \langle \overline{B} \rangle \langle \overline{E} \rangle \varphi,$$
$$\langle O \rangle \varphi \equiv \langle E \rangle (\langle E \rangle \top \wedge \langle \overline{B} \rangle \varphi),$$
$$\langle \overline{O} \rangle \varphi \equiv \langle B \rangle (\langle B \rangle \top \wedge \langle \overline{E} \rangle \varphi).$$

E também a constante modal π é definível em termos de $\langle B \rangle$ e $\langle E \rangle$, respectivamente, como $[B]\bot$ e $[E]\bot$.

12.7 Suplemento: Estruturas e Linguagens Relacionais de Primeira-ordem

Uma *estrutura relacional de primeira-ordem* consiste de:

- Um conjunto não-vazio de objetos D, chamado *domínio* (*de discurso*);

- *Objetos* ou *indivíduos* designados em D denotados por *constantes*;
- *Relações* designadas em D denotadas por *predicados*;

Focamos aqui em estrutura puramente relacionais. Isso é, não consideramos estruturas com funções designadas.

Aqui estão alguns exemplos de estruturas relacionais de primeira-ordem:

- a estrutura numérica $\mathcal{N}$ sobre o conjunto dos números naturais **N** com as relações $=$ e $<$, e os objetos designados 0.
- a estrutura $\mathcal{H}$ sobre o conjunto de todos os humanos com as relações unárias (*i.e.* propriedades) homem e mulher, relações binárias de *pai de*, *filho de*, e *ama a*, e indivíduos designados *Adam, Eve, Joe, Mia*, etc.

O vocabulário de uma linguagem de primeira-ordem relacional $\mathcal{L}$ compreende:

- *Símbolos não-lógicos*:
  - *constantes:* $a, b, c, ...$
  - *predicados* (de aridades especificadas): $Q, R, ...$
- *Variáveis individuais*: $x, y, z, ...$
- Símbolos lógicos:
  - *conectivos veri-funcionais*: $x, y, z, ...$
  - *igualdade*: $=$
  - *quantificadores*: $\forall, \exists$
  - *símbolos auxiliares*: $(,)$

Os *termos* em $\mathcal{L}$ são símbolos constantes e variáveis individuais. As *Fórmulas atômicas* em $\mathcal{L}$ são da forma $R(\tau_1, ... , \tau_n)$, onde $\tau_1, ... , \tau_n$ são termos em $\mathcal{L}$ e R é um símbolo de predicado n-ário em $\mathcal{L}$. Em particular, $\tau_1 = \tau_2$ é uma fórmula atômica. O conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}$ podem ser recursivamente definidas como se segue:

$$\varphi \ := \ R(\tau_1, \dots , \tau_n) \mid \tau_1 = \tau_2 \mid \perp \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \forall x\varphi,$$

onde $R(\tau_1, \dots , \tau_n)$ e $\tau_1 \ = \ \tau_2$ são fórmulas atômicas. Os conectivos veri-funcionais $\vee, \rightarrow, e \ \leftrightarrow$ são definíveis em termos de $\neg$ e $/wedge$ como de costume. Além disso, $\exists x\varphi \ := \ \neg\forall x\neg\varphi$. Distinguimos entre ocorrências livres e associadas[135] de variáveis em fórmulas (dependendo se a variável ocorre no escopo de um quantificador ou não). Fórmulas fechadas, *i.e.* fórmulas que não contém qualquer ocorrência livre de variáveis, são chamadas *sentenças*. Para mais pano-de-fundo[136] sobre lógica de primeira-ordem, ver *e.g.* Fitting e Mendelsohn (1998).

12.8 Suplemento: Sistema Axiomático FOTL (CD) para o FOTL Minimal com Semântica de Domínio Constante

O sistema axiomático fornecido aqui é uma adaptação de sistemas axiomáticos semelhantes que podem ser encontrados em Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XX) e McArthur (1976, Capítulo 4).

I. **Esquemas de axioma:**

1. Todos os axiomas da lógica proposicional minimal $\mathbf{K}_t$
2. Instanciação Universal (Eliminação-$\forall$):
   $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau)$, para qualquer termo τ livre para substituir por x em φ
3. Reflexividade da igualdade: $\forall x(x = x)$
4. Extensionalidade: $\forall x\forall y(x = y \rightarrow (\varphi[x/z] \rightarrow \varphi[y/z]))$
5. Necessidade futura da não-igualdade: $\forall x\forall y(x \neq y \rightarrow G(x \neq y))$

II. **Regras de inferência** (onde $\vdash_{\text{CD}}$ denota derivabilidade em **FOTL(CD)**):

1. Modus Ponens: Se $\vdash_{\text{CD}} \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash_{CD}$, então $\vdash_{\text{CD}} \psi$
2. Necessitação-G: Se $\vdash_{CD} \varphi$, então $\vdash_{CD} G\varphi$

[135] N.T.: “*free and bound occurrences*”.
[136] N.T.: “*background*”.

3. Necessitação-H: Se $\vdash_{CD} \varphi$, então $\vdash_{CD} H\varphi$
4. Generalização Universal (Introdução-$\forall$):
   Se $\vdash_{CD} \psi \to \varphi(x)$, então $\vdash_{CD} \psi \to \forall x\varphi$, onde x não ocorre livre em ψ

III. **Alguns teoremas importantes:**

1. Simetria da igualdade: $\vdash_{\text{CD}} \forall x\forall y(x = y \to y = x)$
   Derivada da Extensionalidade, aplicada a $\varphi := (z = x)$
2. Necessidade futura da igualdade: $\vdash_{\text{CD}} \forall x\forall y(x = y \to G(x = y))$
   Derivada da Extensionalidade, aplicada a $\varphi := G(x = z)$
3. Necessidade passada da igualdade: $\vdash_{\text{CD}} \forall x\forall y(x = y \to H(x = y))$
   Igualmente derivada
4. Necessidade passada da não-igualdade: $\forall x\forall y(x \neq y \to H(x \neq y))$
   Derivada da necessidade futura da igualdade
5. Transitividade da igualdade: $\vdash_{\text{CD}} \forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$
6. A fórmula Conversa de Barcan Futura CBF$_G$:
   $\vdash_{\text{CD}} G\forall x\varphi(x) \to \forall xG\varphi(x)$
   Prova:
   (a) $\vdash_{\text{CD}} \forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$ (Instanciação Universal)
   (b) $\vdash_{\text{CD}} G\forall x\varphi(x) \to G\varphi(x)$ (de (a) por NEC$_G$, K$_G$, MP)
   (c) $\vdash_{\text{CD}} G\forall x\varphi(x) \to \forall xG\varphi(x)$ (de (b) por Generalização Univ.)
7. A fórmula Conversa de Barcan Pretérita CBF$_H$:
   $\vdash_{\text{CD}} \forall xH\varphi(x) \to H\forall x\varphi(x)$
   Derivada por substituição de G por H na prova acima
8. $\vdash_{\text{CD}} P\forall x\varphi(x) \to \forall xP\varphi(x)$
   Derivada por substituição de G por P na prova acima e aplicando contraposição.
9. A fórmula de Barcan Futura BF$_G$: $\vdash_{\text{CD}} \forall xG\varphi(x) \to G\forall x\varphi(x)$
   Esquema de prova:
   (a) $\vdash_{\text{CD}} PG\varphi(x) \to \varphi(x)$ (Instância de uma validade TL)

(b) $\vdash_{\text{CD}} \forall x PG\varphi(x) \to PG\varphi(x)$ (Instanciação Universal)

(c) $\vdash_{\text{CD}} \forall x PG\varphi(x) \to \varphi(x)$ (De (a) e (b) por lógica prop.)

(d) $\vdash_{\text{CD}} P\forall x G\varphi(x) \to \forall x PG\varphi(x)$ (Instância do Teorema 8 acima)

(e) $\vdash_{\text{CD}} P\forall x G\varphi(x) \to \varphi(x)$ (De (c) e (d) por lógica proposicional)

(f) $\vdash_{\text{CD}} P\forall x G\varphi(x) \to \forall x\varphi(x)$ (De (e) por Instanciação Universal)

(g) $\vdash_{\text{CD}} GP\forall x G\varphi(x) \to G\forall x\varphi(x)$ (De (f) por NEC$_G$, K$_G$, MP)

(h) $\vdash_{\text{CD}} \forall x G\varphi(x) \to GP\forall x G\varphi(x)$ (Instância de uma validade de TL)

(i) $\vdash_{\text{CD}} \forall x G\varphi(x) \to G\forall x\varphi(x)$ (De (g) e (h) por lógica prop.).

10. A fórmula de Barcan pretérita BF$_H$: $\vdash_{\text{CD}} \forall x H\varphi(x) \to H\forall x\varphi(x)$
Derivada por substituição de P e G por F e H na prova acima.

12.9 Suplemento: Sistema Axiomático FOTL (VD) para FOTL Minimal com Semântica de Domínio Variante

O sistema axiomático abaixo é uma adaptação de sistemas axiomáticos semelhantes que podem ser encontrado em Rescher e Urquhart (1971, Capítulo XX) e McArthur (1976, Capítulo 4).

I. **Esquemas de axioma:**

1. Todos os axiomas da lógica temporal proposicional minimal $\mathbf{K}_t$
2. Instanciação Universal restringida (Eliminação-$\forall$):
$\forall y(\forall x\varphi(x) \to \varphi[y/x])$, para qualquer y livre para substituir por x em φ
3. Generalização Vazia: $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$, se x não ocorre livre em ϕ
4. Distributividade-$_\forall$: $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
5. Permutação-$\forall$: $\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi$
6. Reflexividade da igualdade: $\forall x(x = x)$
7. Extensionalidade: $\forall x\forall y(x = y \to (\varphi[x/z] \to \varphi[y/z]))$
8. Necessidade da não-igualdade: $\forall x\forall y(x \neq y \to A(x \neq y))$
(Lembre-se de que $A\varphi = H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$.)

II. **Regras de Inferência** (onde $\vdash_{\text{VD}}$ denota derivabilidade em **FOTL(VD)**):

1. Modus Ponens: Se $\vdash_{\text{VD}} \varphi \to \psi$ e $\vdash_{\text{VD}} \varphi$, então $\vdash_{\text{VD}} \psi$
2. Necessitação-G: Se $\vdash_{\text{VD}} \varphi$, então $\vdash_{\text{VD}} G\varphi$
3. Necessitação-H: Se $\vdash_{\text{VD}} \varphi$, então $\vdash_{\text{VD}} H\varphi$

12.10 Suplemento: Os axiomas para o FOTL minimal com E: a Versão de Lógica Livre

Aqui abandonamos as regras clássicas para os quantificadores e, em vez delas, adotamos as regras da Lógica Livre, que é uma lógica que permite termos que não se referem a qualquer entidade existente (*cf.* o verbete sobre lógica livre). A aplicação da regra de Instanciação Universal é restringida ao predicado E para 'existência no instante de tempo atual' e a regra da Generalização Universal é modificada em conformidade:

- Instanciação Universal (Eliminação-$\forall$):
  $\vdash \forall x\varphi(x) \to (E(y) \to \varphi[y/x])$, onde y não ocorre livre em φ

- Generalização Universal (Introdução-$\forall$):
  $\vdash \psi \to (E(x) \to \varphi(x))$, onde x não ocorre livre em ψ

Assim, fórmulas como $\exists xG(x = \tau)$, $G\exists x(x = \tau)$, e $\forall yG\exists xG(x = y)$ não são mais deriváveis.

Referências Bibliográficas

J.F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26 (11):832–843, 1983.

J.F. Allen. Towards a general theory of action and time. *Artificial Intelligence*, 23:123–154, 1984.

J.F. Allen and G. Ferguson. Actions and events in interval temporal logic. *Journal of Logic and Computation*, 4(5):531–579, 1994.

J.F. Allen and P. Hayes. Moments and points in an interval-based temporal logic. *Computational Intelligence*, 5(4):225–238, 1989.

R. Alur and T. Henzinger. Logics and models of real-time: A survey. In *Real-Time: Theory in Practice*, volume 600 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 74–106, Berlin, 1992. Springer.

R. Alur and T. Henzinger. Real-time logics: Complexity and expressiveness. *Information and Computation*, 104:35–77, 1993.

R. Alur and T. Henzinger. A really temporal logic. *Journal of the ACM*, 41:181–204, 1994.

R. Alur, T. Henzinger, and O. Kupferman. Alternating-time temporal logic. *Journal of the ACM*, 49(5):672–713, 2002.

H. Andréka, V. Goranko, S. Mikulas, I. Németi, and I. Sain. Effective first-order temporal logics of programs. In Bolc and Szalas (1995), page 51–129.

H. Andréka, J. Madarász, and I. Németi. Logic of space-time and relativity theory. In M. Aiello, J. van Benthem, and I. Pratt-Hartmann, editors, *Handbook of Spatial Logics*, page 607–711. Springer, Dordrecht, 2007.

C. Areces and B. ten Cate. Hybrid logics. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 821–868.

Aristotle. II - On interpretation. https://archive.org/stream/AristotleOrganon/AristotleOrganoncollectedWorks.

A. Artale and E. Franconi. A survey of temporal extensions of description logics. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 30:171–210, 2000.

F. Baader and C. Lutz. Description logic. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 757–819.

C. Baier and J.P. Katoen. *Principles of Model Checking*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2008.

P. Balbiani, V. Goranko, and G. Sciavicco. Two-sorted point-interval temporal logics. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Methods for Modalities*, volume 278 of *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, page 31–45, 2011.

N. Belnap. Branching space-time. *Synthese*, 92(3):385–434, 1992.

N. Belnap and M. Green. Indeterminism and the thin red line. *Philosophical Perspectives*, 8: 365–388, 1994.

N. Belnap and T. Muller. Cifol: Case-intensional first order logic (i): Toward a theory of sorts. *Journal of Philosophical Logic*, 43(2–3):393–437, 2014a.

N. Belnap and T. Muller. Bh-cifol: Case-intensional first order logic (ii): Branching histories. *Journal of Philosophical Logic*, 43(5):835–866, 2014b.

N. Belnap and M. Perloff. Seeing to it that: A canonical form for agentives. *Theoria*, 54: 175–199, 1988.

N. Belnap and M. Perloff. Seeing to it that: A canonical form for agentives. In H. E. Kyberg et al., editor, *Real-Time: Theory in Practice*, page 167–190. Kluwer, Dordrecht, 1990.

N. Belnap, M. Perloff, and M. Xu. *Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterminist World*. Oxford University Press, Oxford, 2001.

P. Blackburn and M. Tzakova. Hybrid languages and temporal logic. *Logic Journal of the IGPL*, 7:27–54, 1999.

P. Blackburn, J. van Benthem, and F. Wolter. *Handbook of Modal Logics*. Elsevier, Amsterdam, 2006.

P. Blackburn, P. Hasle, and P. Øhrstrøm, editors. *Logic and Philosophy of Time: Further Themes from Prior*, volume 2. Aalborg University Press, Aalborg, 2019.

L. Bolc and A. Szalas, editors. *Time and Logic: A Computational Approach*. UCL Press, London, 1995.

S. Boyd. Defending history: Temporal reasoning in genesis 2:7–3:8. *Answers Research Journal*, 7:215–237, 2014.

D. Bresolin, V. Goranko, A. Montanari, and G. Sciavicco. Propositional interval neighborhood logics: Expressiveness, decidability, and undecidable extensions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(3):289–304, 2009.

D. Bresolin, D. Della Monica, V. Goranko, A. Montanari, and G. Sciavicco. Metric propositional neighborhood logics on natural numbers. *Software and Systems Modeling*, 12(2):245–264, 2013.

J. Broersen. Deontic epistemic *Stit* logic distinguishing modes of mens rea. *Journal of Applied Logic*, 9:137–152, 2011.

M. Brown and V. Goranko. An extended branching-time ockhamist temporal logic. *Journal of Logic, Language and Information*, 8(2):143–166, 1999.

R. Bull. An approach to tense logic. *Theoria*, 36:282–300, 1970.

J. Burgess. The unreal future. *Theoria*, 44(3):157–179, 1978.

J. Burgess. Logic and time. *Journal of Symbolic Logic*, 44:566–582, 1979.

J. Burgess. Decidability for branching time. *Studia Logica*, 39:203–218, 1980.

J. Burgess. Axioms for tense logic i: ‘since’ and ‘until’. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 23:367–374, 1982a.

J. Burgess. Axioms for tense logic ii: Time periods. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 23:

375–383, 1982b.

J. Burgess. Basic tense logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, page 89–133. Reidel, Dordrecht, 1984.

E. Börger, E. Grädel, and Y. Gurevich. *The Classical Decision Problem*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

R. Ciuni and A. Zanardo. Completeness of a branching-time logic with possible choices. *Studia Logica*, 96:393–420, 2010.

N. Cocchiarella. Philosophical perspectives on quantification in tense and modal logic. In Gabbay and Guenthner (2002), page 235–276.

F. Correia and F. Iacona, editors. *Around the Tree: Semantic and Metaphysical Issues Concerning Branching and the Open Future*, volume 361 of *Synthese Library*. Springer, Dordrecht, 2013.

T. Dean and D.V. McDermott. Temporal data base management. *Artificial Intelligence*, 32: 1–55, 1987.

D. Della Monica, V. Goranko, A. Montanari, and G. Sciavicco. Interval temporal logics: A journey. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 105:73–99, 2011.

S. Demri, V. Goranko, and M. Lange. *Temporal Logics in Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

D. Dowty. *Word Meaning and Montague Grammar*. Reidel, Dordrecht, 1979.

H. Dyke. Time and tense. In Dyke and Bardon (2013), page 328–344.

H. Dyke and A. Bardon, editors. *A Companion to the Philosophy of Time*. Blackwell Companions to Philosophy. Wiley-Blackwell, Oxford, 2013.

E.A. Emerson. Temporal and modal logics. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B of *Formal Models and Semantics*, page 995–1072. Elsevier, Amsterdam, 1990.

E.A. Emerson and E.C. Clarke. Using branching time temporal logic to synthesise synchronisation skeletons. *Science of Computer Programming*, 2:241–266, 1982.

E.A. Emerson and J. Halpern. Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time. *Journal of Computer and Systems Science*, 30:1–24, 1985.

E.A. Emerson and A. Sistla. Deciding full branching time logic. *Information and Control*, 61: 175–201, 1984.

J. Euzenat and A. Montanari. Time granularity. In *Handbook of Temporal Reasoning in*

Artificial Intelligence Fisher et al. (2005), page 59–118.

W. Ewald. Intuitionistic tense and modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 51(1):166–179, 1986.

Wolter F. and M. Zakharyaschev. Temporalizing description logics. In D.M. Gabbay and M. de Rijke, editors, *Frontiers of Combining Systems II*, page 379–401. Wiley, New York, 2000.

Wolter F. and M. Zakharyaschev. Axiomatizing the monodic fragment of first-order temporal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 118(1–2):133–145, 2002.

R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge*. MIT Press, Boston, 1995.

M. Finger and D.M. Gabbay. Adding a temporal dimension to a logic system. *Journal of Logic, Language and Information*, 1(3):203–233, 1992.

M. Finger and D.M. Gabbay. Combining temporal logic systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(2):204–232, 1996.

M. Finger, D.M. Gabbay, and M. Reynolds. Advanced tense logic. In Gabbay and Guenthner (2002), page 43–204.

M. Fisher. Temporal representation and reasoning. In F. van Harmelen, V. Lifschitz, and B. Porter, editors, *Handbook of Knowledge Representation*, page 513–550. Elsevier, Amsterdam, 2008.

M. Fisher. *An Introduction to Practical Formal Methods Using Temporal Logic*. Wiley, New York, 2011.

M. Fisher and M. Wooldridge. Temporal reasoning in agent-based systems. In *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence* Fisher et al. (2005), page 469–495.

M. Fisher, D.M. Gabbay, and L. Vila. *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence*. Elsevier, Amsterdam, 2005.

M. Fitting and R. Mendelsohn. *First Order Modal Logic*. Kluwer, Dordrecht, 1998.

T. French. Decidability of quantified propositional branching time logics. In *Advances in AI*, volume 2256 of *Lecture Notes in Computer Science*, page 165–176. Springer, Berlin, 2001.

T. French and M. Reynolds. A sound and complete proof system for QPTL. In Balbiani et al., editor, *Advances in Modal Logic*, volume 4, page 127–148. College Publication, London, 2003.

D. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. *Many-Dimensional Modal Logics:*

Theory and Applications. Elsevier, Amsterdam, 2003.

D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*, volume 7. Kluwer, Dordrecht, second edition, 2002.

D.M. Gabbay, A. Pnueli, S. Shelah, and J. Stavi. On the temporal basis of fairness. In *Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, page 163–173, 1980.

D.M. Gabbay, I. Hodkinson, and M. Reynolds. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, volume 1. Clarendon Press, Oxford, 1994.

D.M. Gabbay, M. Reynolds, and M. Finger. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, volume 2. Oxford University Press, Oxford, 2000.

D. Gabelaia, R. Kontchakov, A. Kurucz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Combining spatial and temporal logics: Expressiveness vs. complexity. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 23:167–243, 2005.

A.P. Galton. *The Logic of Aspect*. Clarendon Press, Oxford, 1984.

A.P. Galton. *Temporal Logics and their Applications*. Academic Press, London, 1987.

A.P. Galton. A critical examination of allen's theory of action and time. *Artificial Intelligence*, 42:159–188, 1990.

A.P. Galton. Time and change for ai. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 4, page 175–240. Clarendon Press, Oxford, 1995.

A.P. Galton. Time and continuity in philosophy, mathematics, and artificial intelligence. *Kodikas/Code*, 19(1–2):101–119, 1996.

A.P. Galton. Temporal logic, 2008.

J. Garson. Quantification in modal logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, page 249–307. Reidel, Dordrecht, 1984.

R. Goldblatt. Diodorean modality in minkowski spacetime. *Studia Logica*, 39:219–236, 1980. Reprinted in *Mathematics of Modality* (CSLI Lecture Notes 43), Stanford: CSLI Publications, 1993.

R. Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. CSLI Lecture Notes 7. CSLI Publications, Stanford, second edition, 1992.

V. Goranko. Hierarchies of modal and temporal logics with reference pointers. *Journal of Logic, Language and Information*, 5(1):1–24, 1996.

V. Goranko and D. Shkatov. Tableau-based decision procedures for logics of strategic ability in multi-agent systems. *ACM Transactions of Computational Logic*, 11(1):3–51, 2010.

V. Goranko and G. van Drimmelen. Complete axiomatization and decidablity of the alternating-time temporal logic. *Theoretical Computer Science*, 353:93–117, 2006.

V. Goranko, A. Montanari, and G. Sciavicco. Propositional interval neighborhood logics. *Journal of Universal Computer Science*, 9(9):1137–1167, 2003.

V. Goranko, A. Montanari, and G. Sciavicco. A road map of propositional interval temporal logics and duration calculi. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(1-2):11–56, 2004. Special Issue on Interval Temporal Logics and Duration Calculi.

R. Goré. Tableau methods for modal and temporal logics. In M. D'Agostino, D.M. Gabbay, R. Hahnle, and J. Posegga, editors, *Handbook of Tableau Methods*, page 297–396. Kluwer, Dordrecht, 1999.

E. Grädel and M. Otto. On logics with two variables. *Theoretical Computer Science*, 224 (1–2):73–113, 1999.

Y. Gurevich and S. Shelah. The decision problem for branching time logic. *Journal of Symbolic Logic*, 50:668–681, 1985.

J. Halpern and Y. Shoham. A propositional modal logic of time intervals. In *Proceedings of the 2nd IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, page 279–292, 1986.

J. Halpern and Y. Shoham. A propositional modal logic of time intervals. *Journal of the ACM*, 38(4):935–962, 1991.

J. Halpern and M. Vardi. The complexity of reasoning about knowledge and time i: Lower bounds. *Journal of Computer and System Sciences*, 38(1):195–237, 1989.

C.L. Hamblin. Instants and intervals. In J.T. Fraser, F. Haber, and G. Muller, editors, *The Study of Time*, page 324–331. Springer, Berlin/Heidelberg, 1972.

M.R. Hansen and C. Zhou. Duration calculus: Logical foundations. *Formal Aspects of Computing*, 9:283–330, 1997.

S. Hart and M. Sharir. Probabilistic propositional temporal logics. *Information and Control*, 70(2–3):97–155, 1986.

P. Hasle, P. Blackburn, and P. Øhrstrøm, editors. *Logic and Philosophy of Time: Themes from Prior*, volume 1. Aalborg University Press, Aalborg, 2017.

I. Hodkinson and M. Reynolds. Temporal logic. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 655–720.

I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Decidable fragments of first-order temporal logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 106(1–3):85–134, 2000.

I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Monodic fragments of first-order temporal logics: 2000-2001 a.d. In *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, page 1–23. Springer, 2001.

I. Hodkinson, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Decidable and undecidable fragments of first-order branching temporal logics. In *Proceedings of the 17th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, page 393–402. IEEE Computer Society Press, 2002.

I.L. Humberstone. Interval semantics for tense logic: Some remarks. *Journal of Philosophical Logic*, 8:171–196, 1979.

R.D. Ingthorsson. *McTaggart's Paradox*. Routledge, New York, 2016.

N. Kamide and H. Wansing. Combining linear-time temporal logic with constructiveness and paraconsistency. *Journal of Applied Logic*, 6:33–61, 2010.

N. Kamide and H. Wansing. A paraconsistent linear-time temporal logic. *Fundamenta Informaticae*, 106:1–23, 2011.

J. Kamp. *Tense Logic and the Theory of Linear Order*. PhD thesis, University of California, Los Angeles, 1968.

J. Kamp. Formal properties of 'now'. *Theoria*, 37:227–273, 1971.

J. Kamp. Events, instants and temporal reference. In R. Bäuerle, U. Egli, and A. von Stechow, editors, *Semantics from Different Points of View*, page 376–417. Springer, Berlin, 1979.

Y. Kesten and A. Pnueli. Complete proof system for qptl. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):701–745, 2002.

R. Kontchakov, C. Lutz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Temporalising tableaux. *Studia Logica*, 76(1):91–134, 2004.

R. Kontchakov, A. Kurucz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Spatial logic + temporal logic = ? In M. Aiello, J. van Benthem, and I. Pratt-Hartmann, editors, *Handbook of Spatial Logics*, page 497–564. Springer, Berlin, 2007.

S. Konur. A survey on temporal logics for specifying and verifying real-time systems. *Frontiers of Computer Science*, 7(3):370–403, 2013.

R.A. Kowalski and M.J. Sergot. A logic-based calculus of events. *New Generation Computing*, 4:67–95, 1986.

R. Koymans. Specifying real-time properties with metric temporal logic. *Real-Time Systems*, 2(4):55–299, 1990.

F. Kröger and S. Merz. *Temporal Logic and State Systems*. EATCS Texts in Theoretical Computer Science Series. Springer, Berlin, 2008.

S.T. Kuhn and P. Portner. Tense and time. In Gabbay and Guenthner (2002), page 277–346.
P. Ladkin. *The Logic of Time Representation*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1987.
L. Lamport. The temporal logic of actions. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 16(3):872–923, 1994.
S. Lindström and K. Segerberg. Modal logic and philosophy. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 1149–1214.
B. Linsky and E. Zalta. In defense of the simplest quantified modal logic. *Philosophical Perspectives*, 8:431–458, 1994.
E. Lorini. Temporal stit logic and its application to normative reasoning. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 23(4):372–399, 2013.
K. Lutz, F. Wolter, and M. Zakharyaschev. Temporal description logics: A survey. In *Proceedings of TIME 2008*, page 3–14, 2008.
Ben-Ari M., A. Pnueli, and Z. Manna. The temporal logic of branching time. *Acta Informatica*, 20(3):207–226, 1983.
J. Ma and B. Knight. Reified temporal logics: An overview. *Artificial Intelligence Review*, 15 (3):189–217, 2001.
J. MacFarlane. Future contingents and relative truth. *The Philosophical Quarterly*, 53(212): 321–336, 2003.
J. MacFarlane. *Assessment Sensitivity: Relative Truth and Its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2014.
I. Mani, J. Pustejovsky, and R. Gaizauskas. *The Language of Time: A Reader*. Oxford University Press, Oxford, 2005.
Z. Manna and A. Pnueli. *The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems*, volume 1 of *Specification*. New York, Springer, 1992.
M. Marx and M. Reynolds. Undecidability of compass logic. *Journal of Logic and Computation*, 9(6):897–914, 1999.
R. McArthur. Tense logic, 1976.
J. McCarthy and P.J. Hayes. Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence. In D. Michie and B. Meltzer, editors, *Machine Intelligence 4*, page 463–502. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1969.
D. McDermott. A temporal logic for reasoning about processes and plans. *Cognitive Science*, 6:101–155, 1982.

E.J. McTaggart. The unreality of time. *Mind*, 17(68):457–472, 1908.

S. Merz. Decidability and incompleteness results for first-order temporal logics of linear time. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 2(2):139–156, 1992.

U. Meyer. *The Nature of Time.* Oxford University Press, Oxford, 2013.

A. Montanari. *Metric and Layered Temporal Logic for Time Granularity*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1996.

A. Montanari and A. Policriti. Decidability results for metric and layered temporal logics. *Notre Dame Journal Formal Logic*, 37(2):260–282, 1996.

S.L. Moss and H.J. Tiede. Applications of modal logic in linguistics. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 1003–1076.

B. Moszkowski. *Reasoning about Digital Circuits*. PhD thesis, Department of Computer Science, Stanford University, 1983. Technical Report STAN-CS-83–970.

T. Muller. Tense or temporal logic. In R. Pettigrew, editor, *The Continuum Companion to Philosophical Logic*, page 324–350. Continuum, London, 2011.

T. Muller. A generalized manifold topology for branching space-times. *Philosophy of Science*, 80:1089–1100, 2013.

T. Muller. *Nuel Belnap on Indeterminism and Free Action*, volume 2 of *Outstanding Contributions to Logic*. Springer, 2014.

H. Nishimura. Is the semantics of branching structures adequate for non-metric ockhamist tense logics? *Journal of Philosophical Logic*, 8:477–478, 1979.

T. Ogihara. Tense and aspect in truth-conditional semantics. *Lingua*, 117:392–418, 2007.

T. Ogihara. Tense. In C. Maienborn, K. von Heusinger, and P. Portner, editors, *Semantics: An International Handbook of Natural Language Meaning*, page 1463–1484. de Gruyter, 2011.

A.K. Pani and G.P. Bhattacharjee. Temporal representation and reasoning in artificial intelligence: A review. *Mathematical and Computer Modelling*, 34:55–80, 2001.

T. Parsons. *Events in the Semantics of English: A Study in Subatomic Semantics*. MIT Press, Cambridge, 1990.

B. Partee. Some structural analogies between tenses and pronouns in english. *The Journal of Philosophy*, 70(18):601–609, 1973.

S. Passy and T. Tinchev. Quantifiers in combinatory pdl: Completeness, definability, incompleteness. In *Fundamentals of Computation Theory FCT 85*, volume 199 of *Lecture Notes in Computer Science*, page 512–519. Springer, Berlin, 1985.

J. Pinto and R. Reiter. Reasoning about time in the situation calculus. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 14(2–4):251–268, 1995.

T. Placek. Branching for general relativists. In *Nuel Belnap on Indeterminism and Free Action* Muller (2014), pages 191–221.

T. Ploug and P. Øhrstrøm. Branching time, indeterminism, and tense logic: Unveiling the prior-kripke letters. *Synthese*, 188(3):367–379, 2012.

A. Pnueli. The temporal logic of programs. In *Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 44–67, 1977.

A.N. Prior. *Time and Modality*. Oxford University Press, Oxford, 1957.

A.N. Prior. Thank goodness that's over. *Philosophy*, 34(128):12–17, 1959.

A.N. Prior. *Past, Present and Future*. Oxford University Press, Oxford, 1967.

A.N. Prior. *Papers on Time and Tense*. Oxford University Press, Oxford, 1968.

A.N. Prior. *Papers on Time and Tense*. Oxford University Press, Oxford, 2003. new edition.

H. Reichenbach. *Elements of Symbolic Logic*. Macmillan, New York, 1947.

N. Rescher and A. Urquhart. *Temporal Logic*. Springer, Berlin, 1971.

M. Reynolds. Axiomatizing U and S over integer time. In D.M. Gabbay and H.J. Ohlbach, editors, *Temporal Logic*, volume 828 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, page 117–132, Berlin/Heidelberg, 1994. Springer.

M. Reynolds. Axiomatising first-order temporal logic: Until and since over linear time. *Studia Logica*, 57(2–3):279–302, 1996.

M. Reynolds. An axiomatization of full computation tree logic. *Journal of Symbolic Logic*, 66: 1011–1057, 2001.

M. Reynolds. Axioms for branching time. *Journal of Logic and Computation*, 12(4):679–697, 2002.

M. Reynolds. An axiomatization of prior's ockhamist logic of historical necessity. In Balbiani et al., editor, *Advances in Modal Logic*, volume 4, page 355–370. College Publications, London, 2003.

M. Reynolds. An axiomatization of PCTL*. *Information and Computation*, 201(1):72–119, 2005.

M. Reynolds. A tableau for bundled CTL. *Journal of Logic and Computation*, 17(1):117–132, 2007.

M. Reynolds. The complexity of temporal logic over the reals. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(8):1063–1096, 2010.

M. Reynolds. A tableau-based decision procedure for CTL*. *Formal Aspects of Computing*, 23(6):739–779, 2011.

M. Reynolds. A tableau for temporal logic over the reals. In Goré et al., editor, *Advances in Modal Logic*, volume 10, page 439–458. College Publications, London, 2014.

A. Rumberg. Transition semantics for branching time. *Journal of Logic, Language and Information*, 25(1):77–108, 2016.

A. Rumberg. Actuality and possibility in branching time: The roots of transition semantics. In Blackburn et al. (2019), page 145–161.

A. Rumberg and A. Zanardo. First-order definability of transition structures. *Journal of Logic, Language and Information*, 28(3):459–488, 2019.

P. Röper. Intervals and tenses. *Journal of Philosophical Logic*, 9:451–469, 1980.

K. Segerberg. Modal logics with linear alternative relations. *Theoria*, 36:301–322, 1970.

Y. Shoham. Temporal logic in ai: Semantical and ontological considerations. *Artificial Intelligence*, 33:89–104, 1987.

M. Steedman. Temporality. In J. van Benthem and A. ter Meulen, editors, *Handbook of Logic and Language*, page 925–969. Elsevier, Amsterdam, 1997.

C. Stirling. Modal and temporal logics. In *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 2 of *Computational Structures*, page 477–563. Clarendon Press, Oxford, 1992.

A. ter Meulen. Temporal reasoning in natural language. In *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence* Fisher et al. (2005), page 559–585.

R.H. Thomason. Indeterminist time and truth-value gaps. *Theoria*, 36(3):264–281, 1970.

R.H. Thomason. Combinations of tense and modality. In D.M. Gabbay and F. Guenther, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2 of *Extensions of Classical Logic*, page 135–165. Reidel, Dordrecht, 1984.

M. Tkaczyk and T. Jarmuzek. Jerzy los positional calculus and the origin of temporal logic. *Logic and Logical Philosophy*, (28):259–276, 2019.

S.L. Uckelman and J. Uckelman. Modal and temporal logics for abstract space-time structures. *Studies in History and Philosophy of Science*, 38(3):673–681, 2007. Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics.

J. van Benthem. *The Logic of Time*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, and London, 1983.

J. van Benthem. *The Logic of Time*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, and London, second edition, 1991.

M. van Lambalgen and F. Hamm. *The Proper Treatment of Events*. Blackwell, Malden, 2005.

M. Vardi. Automata-theoretic techniques for temporal reasoning. In *Handbook of Modal Logics* Blackburn et al. (2006), page 971–989.

M. Vardi and P. Wolper. Reasoning about infinite computations. *Information and Computation*, 115:1–37, 1994.

Y. Venema. Expressiveness and completeness of an interval tense logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31:529–547, 1990.

Y. Venema. A modal logic for chopping intervals. *Journal of Logic and Computation*, 1(4): 453–476, 1991.

Y. Venema. Completeness via completeness: Since and until. In M. de Rijke, editor, *Diamonds and Defaults*, page 279–286. Kluwer, Dordrecht, 1993.

Y. Venema. Temporal logic. In L. Goble, editor, *Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, Oxford, 2001.

L. Vila. A survey on temporal reasoning in artificial intelligence. *AI Communications*, 7:4–28, 1994.

L. Vila. Formal theories of time and temporal incidence. In *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence* Fisher et al. (2005), page 1–24.

P. Wolper. The tableau method for temporal logic: An overview. *Logique et Analyse*, 28 (110–111):119–136, 1985.

S. Wölfl. Combinations of tense and modality for predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 28:371–398, 1999.

M. Xu. On some U,S-tense logics. *Journal of Philosophical Logic*, 17:181–202, 1988.

A. Zanardo. A finite axiomatization of the set of strongly valid ockhamist formulas. *Journal of Philosophical Logic*, 14:447–468, 1985.

A. Zanardo. Axiomatization of ‘peircean’ branching-time logic. *Studia Logica*, 49:183–195, 1990.

A. Zanardo. A complete deductive system for since-until branching time logic. *Journal of Philosophical Logic*, 20:131–148, 1991.

A. Zanardo. Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 61:1–39, 1996.

A. Zanardo. Undivided and indistinguishable histories in branching-time logics. *Journal of Logic, Language and Information*, 7(3):297–315, 1998.

A. Zanardo. Indistinguishability, choices, and logics of agency. *Studia Logica*, 101(6):1215–

1236, 2013.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. Axiomatization of ‘peircean’ branching-time logic. *Studia Logica*, 49:183–195, 1990.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. A complete deductive system for since-until branching time logic. *Journal of Philosophical Logic*, 20:131–148, 1991.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 61:1–39, 1996.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. Undivided and indistinguishable histories in branching-time logics. *Journal of Logic, Language and Information*, 7(3):297–315, 1998.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. Non-definability of the class of complete bundled trees. *Logic Journal of the IGPL*, 7(1):125–136, 1999. Special Issue on Temporal Logic.

A. Zanardo, B. Barcellan, and M. Reynolds. Indistinguishability, choices, and logics of agency. *Studia Logica*, 101(6):1215–1236, 2013.

P. Øhrstrøm. In defense of the thin red line: A case for ockhamism. *Humana Mente*, 8:17–32, 2009.

P. Øhrstrøm. A critical discussion of prior’s philosophical and tense-logical analysis of the ideas of indeterminism and human freedom. *Synthese*, 196(1):69–85, 2019.

P. Øhrstrøm and P. Hasle. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

P. Øhrstrøm and P. Hasle. Modern temporal logic: The philosophical background. In *Handbook of the History of Logic*, volume 7, pages 447–498. 2006.

P. Øhrstrøm and P. Hasle. The significance of the contributions of a.n. prior and jerzy Łoś in the early history of modern temporal logic. In Blackburn et al. (2019), page 31–40.

(IV) Lógica Deôntica[1]

Título Original: Deontic Logic
Autor: Paul McNamara
Tradução: Silvio Kavetski
Revisão: Vítor M. Costa e Kherian Gracher

A lógica deôntica[2] é o ramo da lógica simbólica que mais tem se preocupado com a contribuição que as seguintes noções fazem para ”o que se segue de que”(ou o que suporta o que, de modo mais geral):

- permissível (permitido)
- impermissível (proibido)
- obrigatório (dever [*duty*], requerido)
- omissível (não-obrigatório)
- opcional
- não-opcional
- dever [*ought*]
- dever [*must*]

[1]MCNAMARA, Paul; “Deontic Logic”, In: ZALTA, E. N. (ed.). Stanford Encyclopedia of Philosophy. Summer Edition. Stanford, CA: The Metaphysics Research Lab, 2019. Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-deontic/. Acesso em: 21 de mar. 2022.
A seguir está a tradução da entrada sobre Lógica Deôntica de Paul McNamara na Stanford Encyclopedia of Philosophy. A tradução segue a versão da entrada nos arquivos da SEP em https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-deontic/. Esta versão traduzida pode diferir da versão atual da entrada, que pode ter sido atualizada desde o momento desta tradução. A versão atual está localizada em https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/. Gostaríamos de agradecer aos editores da Stanford Encyclopedia of Philosophy, principalmente o Prof. Dr. Edward Zalta, por concederem permissão para traduzir e publicar esta entrada.

[2]O termo “lógica deôntica” parece ter surgido no inglês como resultado da sugestão de C. D. Broad a von Wright (von Wright, 1951); Mally, mais cedo ainda, usou “Deontik” para descrever o seu trabalho (Mally, 1926). Ambos os termos derivam do termo grego $\delta\epsilon o\upsilon$, para “aquilo que é obrigatório” e $\iota\kappa$, um sufixo grego comum de formação de adjetivos para “ao modo de”, “da natureza de”, “pertencente a”, “de”, sugerindo, assim, a ideia de uma lógica do dever. (O arbitrário “τ” em “$\delta\epsilon o\upsilon\tau\iota\kappa$” é inserido por razões fonética).

- superrogatório (para além do dever)
- indiferente / significante
- o mínimo que alguém pode fazer
- melhor que / melhor / bom / mal
- reivindicação [*claim*] / liberdade / poder / imunidade
- responsabilidade
- culpa / elogio
- agência / ação

Na verdade, algumas dessas noções tem recebido mais atenção na lógica deôntica do que em outras áreas. No entanto, praticamente todos que trabalham nesta área veriam sistemas designados a modelar as contribuições lógicas dessas noções como parte da lógica deôntica propriamente dita.

Como um ramo da lógica simbólica, a lógica deôntica é de interesse *teórico* por algumas das mesmas razões pelas quais a lógica modal o é. Contudo, apesar do fato de que devemos ser cautelosos sobre fazer uma conexão entre a lógica deôntica e o domínio prático, muitas das noções listadas *são* tipicamente empregadas na tentativa de regular e coordenar nossas vidas (mas, também, para avaliar estados de coisas). Por essas razões, a lógica deôntica frequentemente envolve diretamente tópicos de considerável significância prática, tais como moralidade, direito, organizações sociais e empresariais (suas normas, bem como sua constituição normativa) e sistemas de segurança. Neste sentido, estudar a lógica de noções com tal significância prática faz com que a própria lógica deôntica tenha significância prática.[3]

(Para tornar este verbete mais curto a fim de facilitar a leitura, documentos suplementares, tais como o do link da nota de rodapé acima, são usados livremente para explorar questões secundárias ou primárias em maior detalhe.[4] Notas de rodapé destinam-se a considerações menores, explicações notacionais, provas curtas, mas também para entradas com extensão de um parágrafo sobre a literatura associada ao tópico).

[3]Comentários adicionais sobre este tópico podem ser encontrados em Challenges in Defining Deontic Logic: https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/challenges.html.

[4]N. do T.: Os links desses documentos suplementares aparecem no corpo do próprio texto. No entanto, a fim de facilitar a fluidez, optei por colocá-los em notas de rodapé

1. Preliminares Informais e Contexto [*background*]

A lógica deôntica foi fortemente influenciada por ideias da lógica modal. Analogias com noções modais aléticas e noções deônticas foram observadas já no século XIV, onde, podemos dizer, os rudimentos da lógica deôntica moderna começaram (Knuuttila, 1981). Embora o interesse informal no que pode ser argumentativamente chamado de aspectos da lógica deôntica tenha continuado, a tendência para estudar lógica usando as técnicas simbólicas e exatas da matemática se tornou dominante no século XX e a lógica se tornou, em grande parte, lógica simbólica. O trabalho na lógica modal simbólica do século XX forneceu o ímpeto explícito para von Wright (von Wright, 1951), figura inicial central para a emergência da lógica deôntica como um ramo estabelecido [full-fledged branch] da lógica simbólica. Sendo assim, começaremos observando algumas características lógicas básicas [folk-logical features] das noções modais aléticas para dar uma impressão do quão natural era imitar os desenvolvimentos da lógica modal para a lógica deôntica. Passaremos, então, a uma exploração mais direta da lógica deôntica como um ramo da lógica simbólica. No entanto, a ênfase será em questões conceituais e fundacionais, e não em questões técnicas.

No entanto, antes de nos ocuparmos de von Wright e da lógica deôntica como uma área contínua e ativa de estudo acadêmico, precisamos notar que houve um episódio significante, (Mally, 1926), que não teve a influência que poderia ter tido na lógica simbólica deôntica devido, em parte, a problemas técnicos. A despeito dos problemas com o sistema que Mally encontrou (notavelmente, o colapso do que deve ser o caso no que é o caso), ele foi um importante pioneiro da lógica deôntica. Aparentemente, ele não foi influenciado, e portanto não foi beneficiado por desenvolvimentos anteriores da lógica modal alética. Isso se opõe à tendência posterior da década de 1950 em que a lógica deôntica reemergiu, desta vez como uma disciplina estabelecida profundamente influenciada pelos desenvolvimentos anteriores na lógica modal alética. Mally foi o primeiro a encontrar a lógica deôntica na sintaxe do cálculo proposicional explicitamente, uma estratégia a que outros rapidamente se voltaram após ela ter sido desviada no primeiro trabalho de von Wright. Mally foi o primeiro a empregar constantes deônticas na lógica deôntica (que lembra o uso posterior de constantes deônticas por Kanger e Anderson, mas sem a sua "redução"; mais sobre isso abaixo). Ele também foi o primeiro a tentar fornecer uma abordagem integrada de sentenças de dever condicionais e não-condicionais, abordagem esta que forneceu uma análise dos "deves" condicionais através de um operador deôntico monádico juntamente com um condicional material (que faz lembrar as tentativas falhas de von Wright (1951) de analisar a noção diádica de comprometimento [commitment]) e permitiu uma forma de desapego factual (mais sobre isso abaixo). Isso parece ser uma conquista notável em retrospecto. Para mais informação sobre o sistema de Mally, incluindo um diagnóstico da origem do seu principal problema técnico e um rascunho de um modo pelo qual ele o poderia ter evitado, veja o verbete Mally's Deontic Logic.[5]

1.1 Algumas Noções Informais da Lógica Modal Alética

A lógica modal alética é, grosso modo, a lógica da verdade necessária e noções relacionadas. Considere cinco categorias [statuses] modais aléticas básicas, expressas como operadores sentenciais - construções que, quando aplicadas a uma sentença, produzem [yield] uma sentença (tal como "não é o caso que"):

- é necessário (necessariamente verdadeiro) que ($\Box$)
- é possível que ($\Diamond$)
- é impossível que
- é não-necessário que
- é contingente que[6]

Embora todos os operadores acima sejam geralmente considerados definíveis em termos de qualquer um dos quatro primeiros, o operador de necessidade é tipicamente tomado como básico e o restante é definido a partir dele:

- É possível que p $(\Diamond p) =_{df} \neg\Box\neg p$
- É impossível que $p =_{df} \Box\neg p$

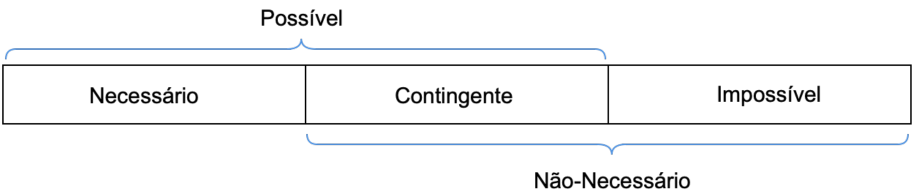
[5] N. do T.: https://plato.stanford.edu/entries/mally-deontic/.

[6] Em acordo com tendências da lógica bastante amplas ao longo do século passado, mais ou menos, iremos tratar as noções modais e deônticas como operadores sentenciais (ou proposicionais), salvo indicações do contrário. Embora seja controverso se as noções modais e deônticas mais fundamentais (se há tais noções) tenham a forma e operadores proposicionais, focar nessas formas permite integração perfeita dessas lógicas com as lógicas proposicionais.

- É não-necessário que $p =_{df} \neg\Box p$

- É contingente que $p =_{df} \neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p$

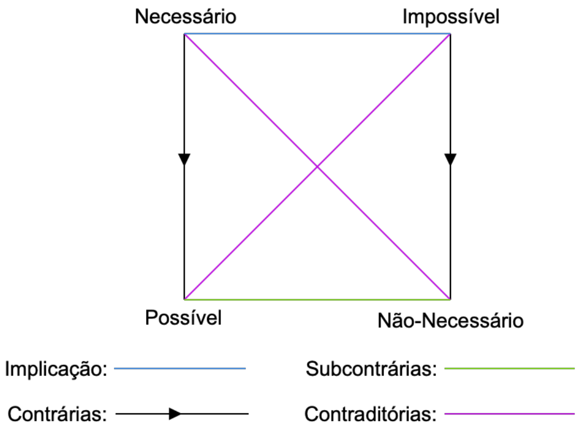
Normalmente, assume-se que a seguinte repartição tripla de proposições é válida [holds]:



As três células retangulares são conjuntamente exaustivas e mutuamente exclusivas: toda proposição é ou necessária ou contingente ou impossível, mas nenhuma é algo além dessas três opções. As proposições possíveis são aquelas que são ou necessárias ou contingentes e as proposições não-necessárias são aquelas que são ou impossíveis ou contingentes.

Outro elemento da lógica básica [piece of folk logic] para essas noções é o seguinte quadrado modal das oposições:[7]

[7] O traço colorido usado na partição anterior e no seguinte quadrado será usado no decorrer do texto para diagramas similares (com linhas azuis para itens secundários externos às partições e linhas cinza claro puramente estéticas para completar a figura). Lembre que proposições são contrárias se não podem ambas serem verdadeiras, sub-contrárias se não podem ambas serem falsas, e contraditórias se elas sempre têm valores de verdade opostos. O quadrado pode ser facilmente aumentado como um hexágono ao incluir pontos para a contingência. (Cf. o hexágono deôntico abaixo).



Além disso, geralmente assume-se que o seguinte é válido [holds]:

- Se $\Box p$, então p (se é necessário que p, então p é verdadeiro).
- Se p, então $\Diamond p$ (se p é verdadeiro, então p é possível).

Isso reflete a ideia de que aqui estamos interessados na necessidade alética (e, assim, implicando a verdade [and thus truth-implicating]) necessidade e expressões próximas [siblings].

Passemos agora a algumas das analogias envolvidas no que corresponde a um pouco da lógica deôntica básica: "O Esquema Tradicional" (McNaamra, 1996a). Esta é uma elaboração mais simples do que pode ser encontrado em von Wright (1953) e nas duas edições de Prior (1962, 1955).

1.2 O Esquema Tradicional e as Analogias Modais

As cinco noções [statuses] normativas do Esquema Tradicional são:[8]

- é obrigatório que (OB)
- é permissível que (PE)
- é impermissível que (IM)
- é omissível que (OM)
- é opcional que (OP)

As três primeiras são familiares, mas a quarta é amplamente ignorada e a quinta tem sido regularmente confundida com "é uma questão de indiferença que p" (sendo definida em termos de uma das três primeiras), o que, na verdade, não é parte do esquema tradicional (mais sobre isso abaixo). Tipicamente, uma das duas primeiras é tomada como básica e as outras são definidas em termos dela, mas qualquer uma das quatro primeiras pode desempenhar o mesmo papel definidor. A abordagem mais predominante é tomar a primeira como básica e definir as restantes do seguinte modo:

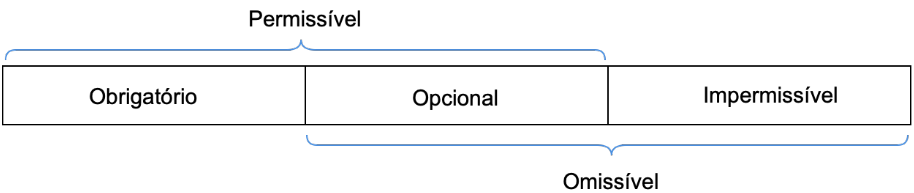
- $PEp \leftrightarrow \neg OB \neg p$

[8]Apenas operadores deônticos aparecerão em negrito. Essas abreviações não são padrão. "O" normalmente é usado ao invés de "OB", e "O" frequentemente é lido como "Deve ser o caso que". "P" normalmente é usado ao invés de "PE" e, se usado, "F" (para "proibido" [forbidden]) ao invés de "IM" e "I" (para "indiferente") ao invés de "OP". Não-necessidade deôntica, denotada aqui por "OM" é raramente nomeada e mesmo em inglês é difícil encontrar termos para esta condição. A escolha das letras duplas aqui para expressar todas as cinco condições básicas (as quais, de um ponto de vista lógico, estão em pé de igualdade) é facilmente memorizável e irá facilitar a discussão futura envolvendo quais noções devem modeladas pela LDP e similares e como podem ser enriquecidas para lidar com outras noções normativas relacionadas. A lógica deôntica assim como a teoria ética estão repletas de dificuldades quando se trata de intercambiar expressões supostamente equivalentes entre uma e outra. Aqui, escolhemos ler o operador básico como "é obrigatório que" de modo que toda a continuidade com a permissibilidade, impermissibilidade e indiferença não é perdida tal como seria com a leitura "deve ser o caso que". Uma escolha deve ser feita. "É obrigatório que" também pode ser lida pessoalmente, mas não agencialmente como "é obrigatório para Jones que" (Krogh e Herrestad, 1996). Retornaremos a essas questões no que se segue.

- $IMp \leftrightarrow OB\neg p$
- $OMp \leftrightarrow \neg OBp$
- $OPp \leftrightarrow (\neg OBp \wedge \neg OB\neg p)$[9]

Isso significa que algo é permissível sse (se e somente se) a sua negação não é obrigatória, impermissível sse a sua negação é obrigatória, omissível sse não é obrigatório e opcional sse nem a sua afirmação e nem a sua negação são obrigatórias. Chamemos isso de "O Esquema Definicional Tradicional (EDT)". Se alguém começasse com OB apenas e considerasse as fórmulas da direita, poderia facilmente ser levado a considerá-las ao menos como candidatas a condições definidoras para as fórmulas da esquerda. Embora não sejam incontestáveis, são naturais e esse esquema ainda é amplamente empregado. Agora, se o leitor olhar para o nosso uso do operador de necessidade para definir os quatro operadores modais aléticos restantes, estará claro que o esquema definicional é perfeitamente análogo ao esquema deôntico acima. Do ponto de vista formal, um é meramente uma variação sintática do outro: apenas substitui OB por $\Box$, PE por $\Diamond$, etc.

Além do EDT, comumente assumiu-se que a seguinte, denominemos "A Classificação Tradicional Tríplice (CTT)" é válida [holds]:

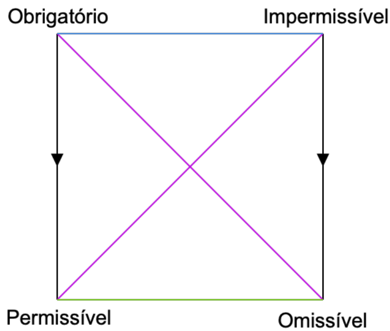


Também aqui todas as proposições são divididas em três classes conjuntamente exaustivas e mutuamente exclusivas: toda proposição é obrigatória, opcional ou impermissível, mas nenhuma proposição recai em mais do que uma dessas três categorias. Além disso,

[9]Neste ensaio, denominaremos tais equivalências de "definições", ignorando a distinção entre definições abreviadas dos operadores que não estão oficialmente na linguagem formal e sistemas axiomáticos com linguagens contendo esses operadores juntamente com axiomas codificando diretamente a força de tais definições como equivalências.

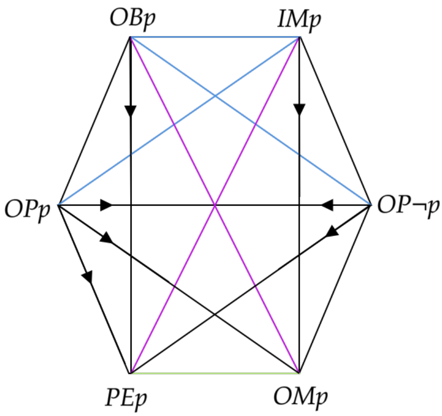
as proposições permissíveis são aquelas que são ou obrigatórias ou opcionais e as proposições omissíveis são aquelas que são impermissíveis ou opcionais. O leitor pode facilmente confirmar que este esquema natural também é perfeitamente análogo com a classificação tríplice dada acima para as noções modais aléticas.

Além disso, o "Quadrado Deôntico" (QD) é parte do Esquema Tradicional:



Os operadores lógicos nas extremidades devem ser interpretados tal como no quadrado modal das oposições. Os dois quadrados também são perfeitamente análogos. Se ligarmos os pontos, teremos um hexágono deôntico:[10]

[10]Note o uso de $OP\neg p$ ao invés de $\neg OPp$ e a relação de co-implicação ao invés da própria implicação (sub-alternância). Isso quebra com as simetrias do quadrado tradicional das oposições no intuito de representar uma característica deôntica fundamental deste operador, sua indiferença à negação, que não é tautológica. Mais tarde, faremos o mesmo com o operador de indiferença, que não deve ser confundido com o operador de opcionalidade. (Veja A Framework for Common Sense Morality [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/aframework.html]). Para trabalhos recentes sobre a representação geométrica das relações lógicas, assim como sobre a história fascinante a respeito disso, veja Moretti (2004, 2009) sobre a Teoria da Oposição-N (TON) [N-Opposition Theory - NOT], uma teoria que oferece uma generalização estrita e poderosa do quadrado tradicional das oposições. Veja também o verbete sobre o Quadrado Tradicional das Oposições [https://plato.stanford.edu/entries/square/].



Dadas essas correspondências, é esperado que o nosso operador básico, lido aqui como "é obrigatório que", seja frequentemente referido como "necessidade deôntica". No entanto, há também desanalogias óbvias. Anteriormente, vimos que esses dois princípios são parte da concepção tradicional da modalidade alética:

- Se $\Box p$, então p (se é necessário que p, então p é verdadeiro)
- Se p, então $\Diamond p$ (se p é verdadeiro, então p é possível)

Seus análogos deônticos são:

- Se OBp, então p (se é obrigatório que p, então p é verdadeiro)
- Se p, então PEp (se p é verdadeiro, então é permissível)

Os dois últimos são transparentemente falsos, pois obrigações podem ser violadas e coisas impermissíveis são verdadeiras [hold].[11] Entretanto, quando os pesquisadores se

[11] A lógica de Mally (1926) foi confundida com o T-análogo [T-analog] acima como um teorema: $OBp \rightarrow p$. Mally abraçou-o com relutância, dado que ele parecia se seguir de premissas que não conseguia encontrar problemas. Veja o verbete Mally's Deontic Logic. [https://plato.stanford.edu/entries/mally-deontic/].

voltaram para generalizações da lógica modal alética, eles começaram considerando classes mais amplas das lógicas modais, incluindo aquelas em que o operador de necessidade não era [truth implicating]. Isso também encorajou a ver a necessidade deôntica, e, por conseguinte, a lógica deôntica, enquanto recaindo na lógica modal assim-generalizada [so-generalized]. E reconhecer possibilidades como essa, ajudou, de fato, a incentivar generalizações do que começou com um foco na lógica modal alética (Lemmon, 1957 e Scott, 1977).

1.3 Em Direção à Lógica Deôntica Propriamente

Neste ponto, será conveniente introduzir um pouco mais de arregimentação. Vamos assumir que temos uma linguagem proposicional simples com suas características usuais, um conjunto infinito de variáveis proposicionais (digamos, P1,...,Pn,...) e um conjunto completo (por sua interpretação padrão) de operadores com funções de verdade (digamos, $\neg$ e $\rightarrow$), assim como o operador deôntico unitário OB.[12]

Salvo indicação do contrário, estaremos interessados apenas nas lógicas deônticas que contêm cálculo proposicional clássico (CP). Assim, vamos assumir que adicionamos isso como o primeiro ingrediente para especificar qualquer lógica deôntica, de modo que, por exemplo, $OBp \rightarrow \neg\neg OBp$ pode ser derivado em qualquer sistema a ser considerado aqui.

Quando tratamos do Esquema Definicional Tradicional acima, notamos que, das cinco noções normativas primárias listadas como básicas, poderíamos ter tomado qualquer uma das quatro primeiras e definido o restante em termos dela. Assim, queremos ser capazes de gerar as equivalências correspondentes derivativamente a partir do esquema que estabelecemos, onde OB é básica. Mas até agora não podemos. Por exemplo, é obviamente desejável ter $OBp \rightarrow \neg PE\neg p$ como um teorema do ponto de vista tradicional. Afinal, esta fórmula bem formada (fbf) expressa apenas metade da equivalência entre o que teria sido definiens e definiendum caso tivéssemos escolhido o esquema alternado de definição em que “PE”, ao invés de “OB”, foi tomado como básico. No entanto, $OBp \rightarrow \neg PE\neg p$ até agora não é derivável. Pois $OBp \rightarrow \neg PE\neg p$ é definicionalmente equivalente a $OBp \rightarrow \neg\neg OB\neg\neg p$, o que, pelo CP se reduz a $OBp \rightarrow OB\neg\neg p$, mas a última fór-

[12]Uma definição mais formal pode ser encontrada no documento suplementar Deontic Wffs. [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/deontic.html].

mula não é tautológica, de modo que não podemos completar a prova. Até agora temos fbf deônticas e lógica proposicional, mas não lógica deôntica. Para isso, precisamos de alguns princípios distintivos governando o nosso operador deôntico e, em particular, para gerar as equivalências alternativas que refletem os esquemas definicionais alternativos aludidos acima, precisamos o que talvez seja a mais fundamental e menos controversa regra de inferência na lógica deôntica e característica das "lógicas modais clássicas" (Chellas, 1980):

- OB-RE: Se $p \leftrightarrow q$ é um teorema, então $OBp \leftrightarrow OBq$ também é.

Esta regra nos diz (grosso modo) que se duas fórmulas são demonstravelmente equivalentes, então os resultados de precedê-las com o nosso operador básico OB também são. Com este auxílio (e com o Esquema Definicional Tradicional), agora é fácil provar as equivalências correspondentes aos esquemas definicionais alternativos. Por exemplo, dado $\vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$, pela OB-RE, temos $\vdash OBp \leftrightarrow OB\neg\neg p$, *i.e.*, $\vdash OBp \leftrightarrow \neg\neg OB\neg\neg p$, o que gera $\vdash OBp \leftrightarrow \neg PE\neg p$, dado o nosso esquema definicional. À medida que as equivalências definicionais alternativas sejam deriváveis, podemos ver RE como pressuposta no Esquema Tradicional.

Todos os sistemas que considerarmos aqui irão conter a RE (seja como básico ou derivável). Eles também irão conter (salvo indicação contrária) outro princípio, uma tese que afirma que uma contradição lógica (convencionalmente denotada por "$\perp$"é sempre omissível:

- OD: $\neg OB \perp$

Assim, por exemplo, OD implica que é uma verdade lógica que não é obrigatório que os meus impostos sejam pagos e não pagos. Embora OD não seja completamente incontestável,[13] é plausível e, assim como a RE, tem sido amplamente pressuposta no trabalho sobre lógica deôntica. Neste artigo, iremos focar em sistemas que endossam ambas RE e OD.

Antes de irmos para o nosso primeiro sistema completo de lógica deôntica, notemos um princípio muito importante que não está contido em todas as lógicas deônticas e que tem gerado muita controvérsia na lógica deôntica e teoria ética.

[13]Se Romeo solenemente prometesse a Julieta quadrar o círculo, isso se tornaria obrigatório?

1.4 A Pressuposição Fundamental do Esquema Tradicional

Retornando ao Esquema Tradicional por um momento, sua Classificação Tríplice e Quadrado Deôntico das Oposições podem ser expressos formalmente do seguinte modo:

- QD: $(OBp \leftrightarrow \neg OMp) \wedge (IMp \leftrightarrow \neg PEp) \wedge \neg(OBp \wedge IMp) \wedge \neg(PEp \wedge \neg OMp) \wedge (OBp \rightarrow PEp) \wedge (IMp \rightarrow OMp)$

- CTT: $(OBp \vee OPp \vee IMp) \wedge [\neg(OBp \wedge IMp) \wedge \neg(OBp \wedge OPp) \wedge \neg(OPp \wedge IMp)]$

Dado o Esquema Definicional Tradicional, verifica-se que QD e CTT são tautologicamente equivalentes com o princípio de que obrigações não podem conflitar (e, assim, um ao outro):

- NC: $\neg(OBp \wedge OB\neg p)$ [14]

Assim, o Esquema Tradicional depende [rests] diretamente da solidez [soundness] do NC (e das definições tradicionais dos operadores). Na verdade, o Esquema Tradicional não é nada mais do que uma versão mascarada [disguised] do NC, dado o componente definicional de tal esquema.

NC não deve ser confundido em conteúdo com o princípio previamente mencionado, OD: ($\neg OB \perp$). OD afirma que nenhuma contradição lógica pode ser obrigatória enquanto que NC afirma que nunca pode haver duas coisas que são separadamente obrigatórias em que uma é negação da outra. A presença ou ausência de NC, argumentativamente, representa uma das divisões mais fundamentais entre esquemas deônticos. Assim como até recentemente na ética normativa moderna (ver Gowans, 1987), as lógicas deônticas iniciais pressupunham essa tese. Antes de irmos aos desafios a NC, iremos considerar vários

[14] QD se torna $(OBp \leftrightarrow \neg\neg OBp) \wedge (OB\neg p \leftrightarrow \neg\neg OB\neg p) \wedge \neg(OBp \wedge OB\neg p) \wedge \neg(\neg\neg OB\neg p \wedge \neg\neg OBp) \wedge OBp \rightarrow \neg OB\neg p) \wedge (OB\neg p \rightarrow \neg OBp)$ e, embora os dois primeiros conjuntos sejam tautologias, os quatro restantes são cada um tautologicamente equivalentes a NC. Similarmente, CTT se torna $(OBp \vee (\neg OBp \wedge \neg OB\neg p) \vee OB\neg p) \wedge [\neg(OBp \wedge OB\neg p) \wedge \neg(OBp \wedge (\neg OBp \wedge \neg OB\neg p)) \wedge \neg((\neg OBp \wedge \neg OB\neg p) \wedge OB\neg p)]$ e a cláusula da exaustividade é tautológica, assim como os dois últimos conjuntos da cláusula da exclusividade, mas o primeiro conjunto de tal cláusula é apenas NC novamente. Da mesma forma para as suposições de que o omissível é a disjunção do permissível e do obrigatório e que o permissível é a disjunção do obrigatório e do opcional.

sistemas que o endossam, começando com o que passou a ser normalmente chamado de "Lógica Deôntica Standard", o sistema de referência da lógica deôntica.

2. Lógica Deôntica Standard

2.1 Sintaxe Standard

A Lógica Deôntica Standard (LDS) é o sistema de lógica deôntica mais citado e estudado e uma das primeiras lógicas deônticas especificadas axiomaticamente. Ela tem como base a lógica proposicional e é, de fato, apenas um membro distinto da classe mais estudada das lógicas modais, as "lógicas modais normais". É uma lógica deôntica monádica, dado que seu operador deôntico básico é um "operador de um lugar"[is a one-place operator] (tal como $\neg$, e diferente de $\rightarrow$): sintaticamente, aplica-se a uma única sentença para formar uma sentença composta.[15]

Suponha, novamente, que tenhamos uma linguagem da lógica proposicional clássica com um conjunto infinito de variáveis proposicionais, os operadores $\neg$ e $\rightarrow$ e o operador OB. A LDS é, então, axiomatizada do seguinte modo:

LDS:	A1. Todas as fbf tautológicas da linguagem	(TAUT)
	A2. $OB(p \rightarrow q) \rightarrow (OBp \rightarrow OBq)$	(OB-K)
	A3. $OBp \rightarrow \neg OB \neg p$	(OB-D)
	R1. Se $\vdash p$ e $\vdash p \rightarrow q$, então $\vdash q$	(MP)
	R2. Se $\vdash p$, então $\vdash OBp$	(OB-NEC)[16]

A LDS é simplesmente a lógica modal normal "D" ou "KD" com uma notação sugestiva expressando a interpretação desejada.[17] TAUT é padrão para sistemas modais normais. OB-K, que é o axioma K presente em todas as lógicas modais normais, nos diz que se um condicional material é obrigatório, e o seu antecedente é obrigatório, então o seu conse-

[15]Num sistema monádico pode-se facilmente definir operadores deônticos diádicos de tipos (Hintikka, 1971). Por exemplos, podemos definir "implicação deôntica" do seguinte modo: $p \rightarrow_d q =_{df} OB(p \rightarrow q)$. Iremos considerar sistemas não-monádicos adiante.

[17]Note que esta axiomatização, e todas as outras apresentadas aqui, usa o "esquema axioma": especificações esquemáticas por padrão sintático de axiomas (ao invés de axiomas particulares generalizados através de uma regra de substituição). Não obstante, iremos minimizar a distinção aqui.

quente também o é.[18] OB-D nos diz que é obrigatório somente se a sua negação não é obrigatória. É apenas "NC" novamente, mas também é denominado "D" (para "Deôntico") nas lógicas modais normais. MP é simplesmente o Modus Ponens nos dizendo que se um condicional material e o seu antecedente são teoremas, então o seu consequente também é. TAUT combinado com MP nos dá todo o poder inferencial do Cálculo Proposicional (frequentemente referido como CP). Como notado anteriormente, o CP não tem uma importação deôntica distinta. OB-NEC nos diz que se algo é um teorema, então a afirmação de que aquilo é obrigatório é, também, um teorema. Note que isso garante que algo sempre é obrigatório (mesmo que apenas verdades lógicas).[19] Cada um dos princípios deônticos distintivos, OB-K, OB-D e OB-NEC são contestáveis e, adiante, iremos considerar algumas críticas a eles. No entanto, para evitar confusão imediata para aqueles que são leigos em lógica deôntica, talvez valha a pena notar que OB-NEC geralmente é considerado uma conveniência que, entre outras coisas, assegura que a LDS seja de fato uma das lógicas modais normais bastante estudadas com uma interpretação deôntica Poucos tem se esforçado para defender a sua cogência substantivamente e esses compromissos práticos podem ser estratégicos, especialmente nos estágios iniciais de pesquisa.[20]

A respeito dos potenciais expressivos da LDS, os defensores tipicamente endossam o Esquema Definicional Tradicional.

Abaixo, listamos alguns teoremas e duas importantes regras derivadas da LDS.[21]

Discutiremos vários desses teoremas adiante. Agora, vamos mostrar, brevemente, que RM é uma regra derivada da LDS. Observamos, também, alguns corolários simples.

(Show): Se $\vdash p \rightarrow q$, então $\vdash OBp \rightarrow OBq$. (OB-RM)

Prova: Suponha $\vdash p \rightarrow q$. Então, por OB-NEC, $\vdash OB(p \rightarrow q)$ e por K $\vdash OBp \rightarrow OBq$.

[18]Também justifica uma versão do Destacamento Deôntico [Deontic Detachment], de OBp e OB ($p \rightarrow q$) deriva OBq, um padrão de inferência que será discutido mais tarde.

[19]Compare com a regra de que contradições não são permissíveis: se $\vdash \neg p$, então $\vdash \neg PEp$. Usualmente se diz que R2 é equivalente a "nem tudo é permissível" e, assim, exclui apenas "sistemas normativos" que não tem nenhuma força normativa.

[20]Uma comparação rápida entre a LDS com o sistema seminal de von Wright (1951) pode ser encontrada no documento suplementar von Wright's 1951 System and SDL. [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/von.html].

[21]Ignoramos a maioria das equivalências definicionais simples mencionadas acima, assim como QD e CTT.

$OB\top$	(OB-N)
$\neg OB\top$ [22]	(OB-OD)
$OB(p \wedge q) \rightarrow (OBp \wedge OBq)$	(OB-M)
$(OBp \wedge OBq) \rightarrow OB(p \wedge q)$	(OB-C / Agregação)
$OBp \vee OPp \vee IMp$	(OB-Exaustão)
$OBp \rightarrow \neg OB\neg p$	(OB-NC ou OB-D)
Se $\vdash p \rightarrow q$, então $\vdash OBp \rightarrow OBq$	(OB-RM)
Se $\vdash p \leftrightarrow q$, então $\vdash OBp \leftrightarrow OBq$	(OB-RE)

Corolário 1: $\vdash OBp \rightarrow OB(p \vee q)$ [Weakening]

Corolário 2: Se $\vdash p \leftrightarrow q$, então $\vdash OBp \leftrightarrow OBq$ (OB-RE)[23][24]

A LDS pode ser fortalecida de vários modos. Em particular, podemos considerar a adição de axiomas onde os operadores deônticos estão incorporados um no outro. Por exemplo, suponha que adicionamos a seguinte fórmula como um axioma da LDS. Para facilitar a referência, denominemos o resultado "LDS+":

- A4. OB $(OBp \rightarrow p)$

Esta fórmula diz (grosso modo) que é necessário que as obrigações sejam cumpridas.[25] Ela não é um teorema da LDS (como veremos na próxima seção), portanto LDS+ é um fortalecimento da LDS. Além disso, ela torna uma proposição lógica contingente (i. e., que OBp → p) obrigatória como uma questão de lógica deôntica. A LDS não tem essa característica substantiva. Com essa adição a LDS é fácil provar OBOBp → OBp, uma fórmula envolvendo uma ocorrência repetida do nosso principal operador.[26] Essa fórmula afirma que se é obrigatório que p seja obrigatório, então p é obrigatório. (Cf. "as únicas coisas que devem

[23] RE é a regra fundamental para os "Sistemas Clássicos de Lógica Modal", uma classe que inclui lógica modal normal como um subconjunto próprio. Veja Chellas (1980).

[24] Uma formulação alternativa da LDS pode ser encontrada no documento suplementar Alternative Axiomatization of SDL. [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/alternative.html].

[25] De forma equivalente, é requerido que somente coisas permissíveis sejam verdadeiras: OB $(p \rightarrow PEp)$.

[26] Pois OB $(OBp \rightarrow p) \rightarrow (OBOBp \rightarrow OBp)$ é apenas uma instância especial de OB-K. Assim, usando A4 acima e MP, temos $OBOBp \rightarrow OBp$ diretamente.

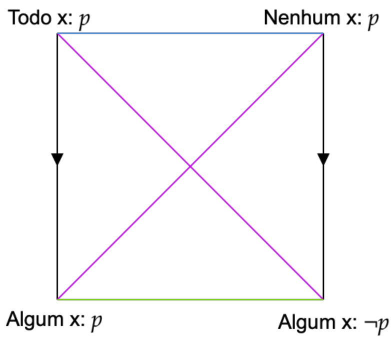
ser obrigatórias são aquelas que realmente são).[27] Deve-se notar que frequentemente se faz uma leitura de dever impessoal dessas fórmulas, de modo que A4 seria lido como “Deve ser o caso que (se deve ser o caso que p, então é o caso que p)”.[28]

2.2 Semântica Standard

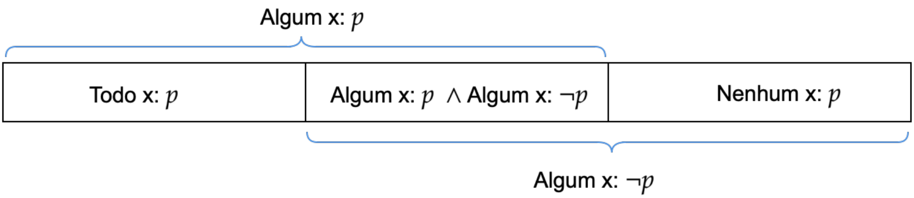
O leitor familiarizado com os manuais de lógica elementar talvez tenha notado que o quadrado deôntico e o quadrado modal ambos têm análogos ainda mais conhecidos para os quantificadores tal como interpretados na lógica de predicados clássica (“todo x: p” é lido como todo objeto x satisfaz a condição p; similarmente “nenhum x: p” e “algum x: p”):

[27] Veja Chellas (1980, p. 193-194) para uma discussão crítica concisa da plausibilidade comparativa dessas duas fórmulas sob a sua interpretação padrão em termos de mundos possíveis. (Note que os ricos capítulos de Chellas sobre lógica deôntica nesse livro excepcional e seminal são jóias raras [gems]). No entanto, é enganoso onde Chellas afirma que se há quaisquer obrigações não cumpridas (i.e., em que OBp e $\neg p$ são verdadeiras [hold]) então “o nosso é um dos piores dos mundos possíveis”, dado que a semântica não classifica os mundos para além de aceitáveis e não aceitáveis (relativos a um mundo). O ponto esclarecedor fundamental é que para todo mundo j cujas alternativas são todas mundos-p, mas em que p é falso, se segue não apenas que j não pode ser uma alternativa aceitável a si próprio, mas também que não pode ser uma alternativa aceitável para nenhum outro mundo i. De forma mais simples, A4 implica que todo mundo-($OBp \wedge \neg p$) é universalmente inaceitável. Todavia, esta qualificação, embora significante, não expressa o grau ou extensão de maldade: dado algum princípio de classificação que permite mundos indefinidamente melhores e piores relativos a algum mundo i (tal como na semântica de preferência para versões diádicas da LDS e similares - veja abaixo), j pode estar entre os absolutamente melhores dos mundos i-inaceitáveis (i.e., classificado em segundo lugar apenas em relação àqueles que são inteiramente i-aceitáveis), para todos os mundos que A4 implica.

[28] Para uma discussão crítica anterior sobre a interação deôntica, veja Marcus (1996).



Embora seja menos notado nos manuais, há também uma classificação tríplice para os quantificadores clássicos:



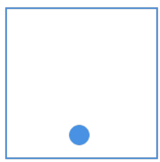
Aqui, todas as condições são divididas em três classes conjuntamente exaustivas e mutuamente exclusivas: aquelas que valem [hold] para todos os objetos, aquelas que não valem para nenhum objeto e aquelas que valem para uns e não para outros objetos, onde nenhuma condição recai em mais de uma dessas três categorias. Essas profundas analogias quantificacionais refletem muito da inspiração por trás do que é frequentemente chamado de "semântica de mundos possíveis" para tais lógicas, para as quais dedicaremos atenção a partir de agora.[29] Uma vez que as analogias são notadas, este tipo de semântica se torna inevitável.

Agora, forneceremos uma semântica de mundos possíveis standard no "estilo-Kripke" para a LDS. Informalmente, assumimos que temos um conjunto de mundos possíveis W e

[29]von Wright (1953) e a edição anterior (e primeira) de Prior (1962) [1955].

uma relação A relacionando os mundos com a intenção de que Aij sse j é um mundo em que tudo o que é obrigatório em i é verdadeiro [holds] (i. e., nenhuma violação das obrigações que valem [holding] para i ocorre em j). Para abreviar, chamaremos todos os mundos assim relacionados a i como mundos “i-Aceitáveis” e os denotaremos por A^i.[30] Adicionamos, então, que a relação de aceitabilidade é “serial”: para todo mundo i há pelo menos um mundo i-aceitável. Finalmente, em um mundo possível as proposições são ou verdadeiras ou falsas, e nunca verdadeiras e falsas, e quando uma proposição p é verdadeira num mundo, indicaremos isso se referindo a tal mundo como um “mundo-p”. Os operadores de verdade funcionais [truth functional operators] tem o seu comportamento usual em cada mundo. Nosso foco será na contribuição que os operadores deônticos fazem [are taken to make].

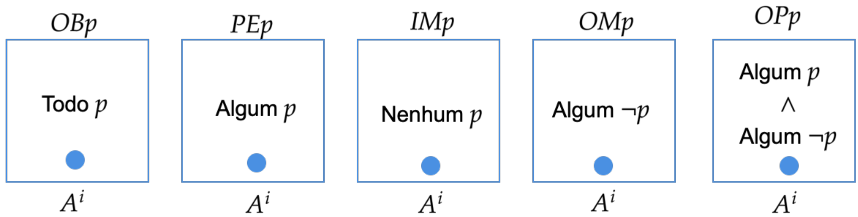
A ideia fundamental aqui é que o status normativo de uma proposição a partir de um mundo i pode ser acessado olhando para como tal proposição se comporta [fairs] nos mundos i-aceitáveis. Vejamos como. Para qualquer mundo i, podemos facilmente imaginar os mundos i-aceitáveis todos juntos [all coralled together] no espaço lógico, como segue (em que a serialidade é refletida por um pequeno ponto representando a presença de pelo menos um mundo):



A^i

As condições de verdade pretendidas para os nossos cinco operadores deônticos, relativas a i, podem ser colocadas do seguinte modo:

[30]Os mundos relacionados a i por A também são frequentemente chamados de “mundos ideais”. Esta linguagem não é gratuita (McNamara, 1996b).



Assim, p é obrigatório sse é válido [holds] em todos os mundos i-aceitáveis, permissível sse é válido em algum mundo i-aceitável, impermissível sse não é válido em nenhum mundo i-aceitável, omissível sse sua negação é válida em algum mundo i-aceitável e opcional sse p e $\neg p$ é válido em algum mundo i-aceitável. Quando uma fórmula deve ser verdadeira em todo mundo em qualquer um desses modelos de mundos serialmente-relacionados, então a fórmula é válida.[31]

Para ilustrar o funcionamento dessa abordagem [framework], considere NC (OB-D), $OBp \to \neg OB\neg p$. Nesta abordagem, [framework] isso é válido. Pois suponha que OBp vale [holds] em qualquer mundo i em qualquer modelo. Então, cada mundo i-acessível é um mundo em que p é válido [holds] e, pela serialidade da acessibilidade, deve haver pelo menos um tal mundo. Denominemos j. Agora, podemos ver que $\neg OB\neg p$ também deve ser válido [holds] em i, senão $OB\neg p$ seria válido [hold] em i, caso em que $\neg p$ teria que ser válido [hold] em todos os mundos i-acessíveis, incluindo j. Mas, então, p, assim como $\neg p$, seriam válidos [hold] em j, o que é impossível (pela semântica para "$\neg$"). A validade dos outros axiomas e regras da LDS pode ser demonstrada de maneira similar, assim como todos os princípios listados acima como deriváveis na LDS.

No entanto, A4, o axioma que adicionamos a LDS para chegar a LDS+, não é válido nos modelos seriais standard. Para validar A4, OB $(OBp \to p)$, precisamos da condição adicional da "reflexividade secundária": que todo mundo i-aceitável, j, deve, por sua vez, ser aceitável para si mesmo. Podemos ilustrar isso da seguinte maneira:

[31] Uma caracterização mais formal dessa abordagem semântica pode ser encontrado no documento suplementar Kripke-Style Semantics for SDL [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/kripke.html].

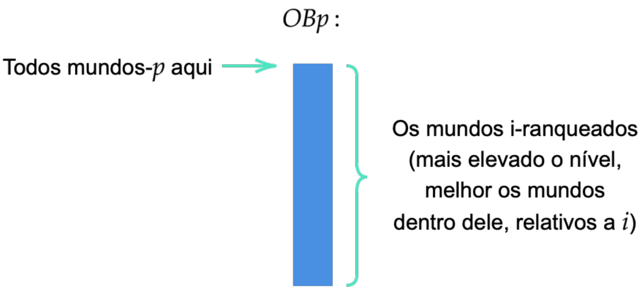
A seta indica a aceitabilidade relativa, de modo que j (e somente j) é aceitável para i e j (e somente j) é aceitável para j. Se, em todos os modelos elegíveis, todos os mundos que são aceitáveis para qualquer outro mundo tenham essa propriedade da auto-aceitabilidade, então nosso axioma é válido. Pois suponha que essa propriedade seja válida [holds] nos nossos modelos e que para algum mundo arbitrário i OB $(OBp \to p)$ seja falsa em i. Então, nem todos os mundos i-aceitáveis são mundos onde $OBp \to p$ é verdadeiro. Portanto, deve haver um mundo i-aceitável, digamos j, onde OBp é verdadeiro, mas p é falso. Dado que OBp é verdadeiro em j, então p deve ser verdadeiro em todos os mundos i-aceitáveis. Mas, por estipulação, j é aceitável a si mesmo, de modo que p deve ser verdadeiro em j. Mas isso contradiz a nossa suposição de que p era falso em j. Portanto, OB $(OBp \to p)$ deve ser verdadeiro em todos os mundos.[32]

Também devemos notar que uma semântica alternativa para a LDS é uma em que temos um conjunto de relações de ordenação mundo-relativas para cada mundo i em W, onde $j \geq_i k$ sse j é tão bom quanto k (e talvez melhor) relativo a i [world-relative ordering relations one for each world i in W, where $j \geq_i k$ iff j is as good as k (and perhaps better) relative to i.]. Assumimos, então, que do ponto de vista de todo mundo i, a) cada mundo é tão bom quanto si próprio, b) se um mundo é tão bom quanto um segundo mundo, e o segundo é tão bom quanto um terceiro, então o primeiro é tão bom quanto o terceiro e c) para dois mundos, ou o primeiro é tão bom quanto o segundo ou vice-versa (i.e., cada $\geq_i$ é reflexivo, transitivo e conectado em W, respectivamente). É amplamente reconhecido que essa abordagem também irá determinar a LDS, mas provas disso não estão amplamente disponíveis.[33] Se adicionarmos, então, a “Suposição Limite” [“The Limit Assumption”] de que para cada mundo i sempre há pelo menos um mundo tão bom quanto todos os mundos (i.e., um mundo i-melhor), podemos facilmente gerar, derivativamente, a nossa semântica anterior para a LDS.

[32]Dois contra-modelos que mostram que A4 não é derivável na LDS e que a $LDS + OBOBp \to OBp$ não implica A4 podem ser encontrados no documento suplementar Two Counter-Models Regarding Additions to SDL [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/twocounter.html].

[33]Mas veja Goble (2003).

Precisamos apenas adicionar o análogo natural às nossas condições de verdade anteriores para OB: OBp é verdadeiro em um mundo i sse p é verdadeiro em todos os mundos i-melhores.



Essencialmente, a relação de ordenação juntamente com a Suposição Limite nos dão simplesmente um modo de gerar o conjunto de mundos i-aceitáveis ao invés de tomá-los como primitivos na semântica: j é i-aceitável sse j é i-melhor. Uma vez gerado, olhamos apenas para o que está acontecendo nos mundos i-aceitáveis para interpretar as condições de verdade para os vários operadores deônticos, assim como nossa semântica Estilo-Kripke simples. O análogo à serialidade da nossa relação anterior de i-aceitabilidade também é assegurada pela Suposição Limite, já que ela implica que para cada mundo i sempre há um mundo i-aceitável (agora, i-melhor). Embora esta abordagem de semântica ordenada pareça um pouco exagerada aqui, ela se torna bastante importante mais tarde no esforço para desenvolver lógicas deônticas expressivamente mais ricas (lógicas que vão além dos recursos linguísticos da LDS). Retornaremos a isso mais tarde.

Agora, passamos à segunda abordagem mais conhecida da lógica deôntica monádica. Abordagem esta em que a LDS emerge de forma derivada.

3. A Redução Anderson-Kangeriana

A redução Anderson-Kangeriana é nomeada de forma dupla em reconhecimento às formulações independentes de Kanger e Anderson à mesma época.[34] Como aponta Hilpinem

[34] Kanger (1971) [1957] (circulando datilografado em 1950) e Anderson (1967) [1956] e Anderson (1958).

(2001a), a abordagem é delineada muito antes em Leibniz. Aqui, seguimos o desenvolvimento de Kanger dando atenção ao trabalho de Anderson na parte final.

3.1 Sintaxe Standard

Assumamos que temos uma linguagem da lógica proposicional modal clássica com uma constante proposicional (deôntica) distinta:

"d" para "todas as demandas normativas (relevantes) são cumpridas".

Agora, considere o seguinte sistema axiomático "Kd":

Kd:	A1: Todas as Tautologias	(TAUT)
	A2: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	(K)
	A3: $\Diamond d$	($\Diamond d$)
	R1: Se $\vdash p$ e $\vdash p \to q$, então $\vdash q$	(MP)
	R2: Se $\vdash p$, então $\vdash \Box p$	(NEC)

Kd é simplesmente a lógica modal normal K com a adição de A3.[35] A3 é interpretado como: é possível que todas as demandas normativas sejam cumpridas. Quando adicionado ao sistema K, é similar ao axioma "NC", A3, da LDS. Todos os operadores deônticos do Esquema Tradicional são operadores definidos em Kd:

$$OBp =_{df} \Box(d \to p)$$

$$PEp =_{df} \Diamond(d \wedge p)$$

$$IMp =_{df} \Box(p \to \neg d)$$

[35]K é a lógica modal normal básica (fraca). (Veja o verbete Modal Logic [https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/]). Tradicionalmente, e em consonância com a interpretação pretendida, a lógica modal fundamental tinha T como um teorema, indicando que a necessidade estava "implicando verdade" [truth-implicating]. Começamos com K porque T gera um sistema mais forte do que a LDS. Abordaremos a adição de T adiante. Aqvist (2002) [1948] é uma fonte excelente sobre a meta-teoria da relação entre as lógicas deônticas e as lógicas modais Anderson-Kangerianas correspondentes, assim como as principais versões diádicas (operador condicional primitivo) dessas lógicas. Smiley (1963) é um ponto e referência no estudo comparativo de tais sistemas deônticos. McNamara (1999) dá resultados de determinação [determination results] para várias lógicas deônticas que empregam três constantes deônticos.

$$OMp =_{df} \Diamond(d \wedge \neg p)$$

$$OPp =_{df} \Diamond(d \wedge p) \wedge \Diamond(d \wedge \neg p)$$

Desse modo, em Kd, p é obrigatório sse p é tornado necessário [necessitated] por todas as demandas normativas sendo cumpridas, permissível sse p é compatível com todas as demandas normativas sendo cumpridas, impermissível sse p é incompatível com todas as demandas normativas, omissível sse a negação de p é compatível com todas as demandas normativas e opcional sse p, assim como $\neg p$, é compatível com todas as demandas normativas. Dado que nenhum dos operadores do Esquema Tradicional é tomado como primitivo, e a lógica básica é uma lógica modal com necessidade e possibilidade como operadores modais básicos, isso é chamado de "redução" (da lógica deôntica para a lógica modal).[36][37]

Além de conter todos os teoremas da LDS, observamos alguns teoremas que são específicos para Kd devido aos ingredientes sintáticos não-convergentes d, $\Box$ e $\Diamond$:

$\vdash OBd$

$\vdash \Box(p \to q) \to (OBp \to OBq)$ (RM')

$\vdash \Box p \to OBp$ (NEC')

$\vdash OBp \to \Diamond p$ ("Lei de Kant")[38]

$\vdash \neg\Diamond(OBp \wedge OB\neg p)$ (NC')

Esses teoremas são facilmente provados.[39]

[36] Provas das fbf da LDS são apenas provas-K das fórmulas modais correspondentes envolvendo "d". Duas dessas provas simples podem ser encontradas no documento suplementar Two Simple Proofs in Kd ([https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/twosimple.html].

[37] Uma prova de que a LDS está realmente contida em Kd pode ser encontrada no documento suplementar SDL Containment Proof [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/sdl.html].

[38] Aspas porque a lei de Kant é interpretada de forma mais precisa como envolvendo agência (se Doe é obrigada a fazer algo então Doe é capaz de fazer algo), mas o rótulo é frequentemente usado na lógica deôntica para quase toda implicação de algo ser obrigatório para algo ser possível. Grosso modo, qualquer fórmula no sistema está próxima de Kant. Vou seguir o exemplo aqui.

[39] Provamos o primeiro acima e, dada a nossa definição de OB, RM' e NEC' se seguem a partir de características standards da lógica modal K apenas, mas a Lei de Kant e NC' dependem também do axioma deôntico distintivo $\Diamond d$.

Embora o nosso sistema modal básico seja apenas K, adicionar o esquema de axiomas não-deônticos (i.e., aqueles que não são nem abreviáveis através das fbf da LDS e nem envolvem d especificamente) pode, não obstante, ter um impacto deôntico. Para ilustrar, suponha que adicionamos um quarto axioma no qual a necessidade é [truth-implicating]. Denominemos axioma T:

- T: $\Box p \to q$

Denominemos o sistema que resulta da adição desta fórmula ao nosso sistema corrente de KTd. O axioma T certamente é plausível o suficiente aqui, já que, como mencionado acima, esta abordagem da lógica deôntica é mais sensível se a necessidade é interpretada como [truth-implicating], pois ela toma as obrigações como sendo necessitadas pelo cumprimento de todas as demandas normativas. Mas, que em sentido se não um sentido [truth-implicating] de necessidade?

Agora, com a adição de T a Kd, fomos além da LDS, pois agora podemos provar coisas expressáveis na linguagem da LDS que já mostramos não serem teoremas da LDS. A adição de T torna derivável o nosso axioma A4 da LDS+, o qual mostramos não ser derivável na própria LDS:

- $\vdash OB(OBp \to p)$ [40]

Assim, ao refletir sobre o fato de a LDS+ ser derivável no KTd, vemos que a redução Anderson-Kangeriana deve ou depender de uma concepção de necessidade [non-truth-implicating] para que o seu fragmento deôntico puro se encaixe na LDS, ou a própria LDS não é suscetível à redução Anderson-Kangeriana. Dito de outra forma, a versão mais plausível da redução Anderson-Kangeriana não pode deixar de ver a "Lógica Deôntica Standard" como sendo muito fraca.[41]

A abordagem de Anderson é praticamente equivalente à de Kanger. Primeiramente, considere o fato de que podemos facilmente definir outra constante em Kd, como segue:

[40]Prova: Por T, $\vdash \Box(d \to p) \to (d \to p)$. Assim, por PC, podemos ter $\vdash d \to [\Box(d \to p) \to p]$. Disso, por NEC, temos $\vdash \Box(d \to [\Box(d \to p) \to p])$, isto é, OB $(OBp \to p)$.

[41]Uma exploração breve das implicações catastróficas para questões deônticas no contexto do KTd pode ser encontrada no documento suplementar Determinism and Deontic Collapse in the Classic A-K Framework [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/determinism.html].

$$s =_{df} \neg d,$$

em que esta nova constante seria lida derivativamente do seguinte modo:

“algumas demandas normativas (relevantes) foram violadas”.

Nosso axioma atual, $\Diamond d$, claramente poderia ser substituído por $\neg\Box s$, asserindo que não é necessário que alguma demanda normativa é violada. Poderíamos, então, definir OB do seguinte modo:

$$OBp =_{df} \Box(\neg p \to s),$$

e similarmente para os outros quatro operadores.

Essencialmente, Anderson tomou esse rumo equivalente a “s” sendo sua constante primitiva (inicialmente estando para algo como “a sanção foi invocada” ou “há uma exigência para a sanção”) e $\neg\Box s$ o axioma adicionado a algum sistema modal (pelo menos tão forte quanto o sistema modal K^T).

Devemos também notar que Anderson era famoso como uma figura fundadora na Lógica da Relevância[42] e, ao invés de usar a implicação estrita $\Box(p \to q)$, ele explorou o uso de um condicional relevante $\Rightarrow$ (e, portanto, nem material nem estrito) para expressar a redução como: $OBp =_{df} \neg p \Rightarrow s$.[43] Essa alternativa reflete o fato de que há um problema nas abordagens sobre necessitação estrita de Kanger e Anderson a respeito de qual noção de “necessidade” podemos dizer que está envolvida ao dizer que cumprir todas as demandas normativas (ou evitar a sanção) torna p necessário.

Como uma questão substantiva, como devemos pensar essas “reduções”? Por exemplo, devemos vê-las como uma análise sobre o que significa para algo o ser obrigatório? Bem, tomando o caminho de Kanger, primeiramente, parece que d deve ser lido como um ingrediente deôntico distintivo se quisermos obter uma leitura deôntica derivativa para os operadores deônticos “reduzidos”. Também, como a nossa leitura sugere, não é claro que d não expressa, a menos por intenção, uma noção quantificacional complexa envolvendo o próprio conceito de obrigação (demanda) como uma parte própria, a saber, que todas as

[42][https://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/].

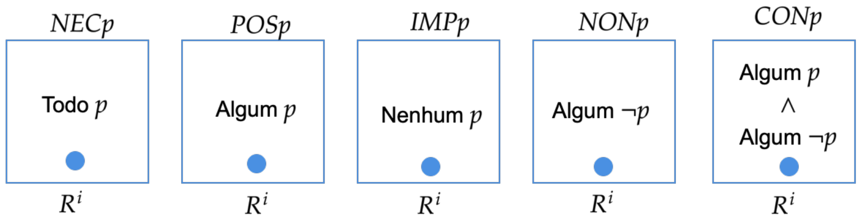
[43]Pode-se encontrar um pouco mais sobre isso no verbete Mally’s Deontic Logic [https://plato.stanford.edu/entries/mally-deontic/]. Ver, também, Mares (1992).

obrigações foram cumpridas, de modo que a "redução", apresentada como uma análise, pareceria circular. Se ao invés disso lermos d como "circunstâncias ideais são válidas" [ideal circunstances obtain], a reivindicação de uma redução substantiva ou análise parece mais promissora até que perguntemos: "são as circunstâncias ideais apenas com respeito a cumprir demandas ou obrigações normativas ou são ideais em outros sentidos (superrogatórios, por exemplo) que vão além de meramente satisfazer demandas normativas? A abordagem da "exigência para a sanção" de Anderson pode parecer mais promissora, já de que a ideia de que algo é obrigatório se (e somente se), e porque, a não-conformidade torna necessária (em algum sentido) a exigência para a (ou, talvez, o merecimento de) punição, não parece ser circular (a menos que a própria noção de "responsabilidade" envolva, em última análise, a ideia da permissibilidade da punição). Mas ainda é controversa (e.g. pensa-se que obrigações imperfeitas incluem obrigações onde ninguém tem o direito de sancioná-lo por violações). Alternativamente, talvez uma norma que é meramente um ideal não pode ser violada, caso em que talvez normas que foram violadas podem ser distinguidas (como um subconjunto) de normas que não foram cumpridas, e, então, a noção de uma obrigação como algo que deve ser o caso [must obtain], a menos que alguma norma seja violada, não será obviamente circular. O ponto aqui é que há uma persistente questão filosófica substantiva que a linguagem de uma "redução" traz naturalmente à tona. A utilidade formal da redução não depende disso, mas a sua significância filosófica sim.

3.2 Semântica Standard

Os elementos semânticos são, em grande parte, análogos aos da LDS. Temos uma relação binária novamente, mas dessa vez ao invés de uma relação interpretada como relacionando mundos aceitáveis a um dado mundo, teremos uma relação R relacionando mundos "acessíveis" a um dado mundo (i.e., possíveis relativamente a um dado mundo). As inovações são apenas duas: (1) adicionamos um elemento semântico simples para se encaixar à nossa constante sintática "d" e (2) adicionamos um elemento um pouco mais complexo análogo à serialidade, que conecta a relação de acessibilidade ao elemento semântico adicionado para modelar d. Introduzimos os elementos em estágios.

Novamente, vamos assumir que temos um conjunto de mundos possíveis W, uma relação R relacionando os mundos com a intensão Rij sse j é acessível para i (e.g., j é um mundo em que tudo o que é verdadeiro em j é possível em relação a i).[44] Para abreviar, chamaremos todos os mundos possíveis em relação a i de “mundos i-acessíveis” e os denotaremos por Ri. Por enquanto, nenhuma restrição é colocada na relação R. Podemos ilustrar essas condições de verdade para os nossos operadores modais com um conjunto de diagramas análogos àqueles usados para dar as condições de verdade para os operadores deônticos da LDS. Usamos abreviações para necessidade, possibilidade, impossibilidade, não-necessidade e contingência:

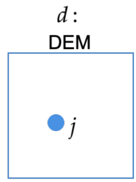


Aqui, nós imaginamos que, para todo mundo i, colocamos todos os mundos i-acessíveis juntos. Assim, simplesmente olhamos para o status quantificacional de p (e/ou $\neg p$) nesses mundos i-acessíveis para determinar o status modal de p em i: em um dado mundo i, p é necessário sse p é válido [holds] ao longo de Ri, possível sse p é válido [holds] em algum lugar de R^i, impossível sse p é válido [holds] em nenhum lugar de R^i, não-necessário sse $\neg p$ é válido [holds] em algum lugar de R^i e contingente sse p e $\neg p$ são válidos [holds] em algum lugar de R^i.

O único elemento deôntico na sintaxe de Kd é a nossa constante distinta d, para expressar o fato de que todas as demandas normativas são cumpridas. Para modelar esta característica, simplesmente assumimos que os mundos são divididos entre aqueles em que todas as demandas normativas são cumpridas e aqueles em que não são. Denotamos o primeiro

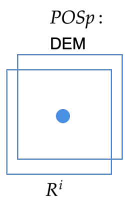
[44]Note que isso significa que, por generalidade, assumimos que o que é possível pode variar de um mundo para outro. Isso é padrão neste tipo de semântica para lógica modal. Por exemplo, se quiséssemos modelar possibilidade física e necessidade, o que é fisicamente possível no nosso mundo pode não ser para algum outro mundo logicamente possível com leis físicas fundamentais diferentes do nosso. Adicionando certas restrições, podemos gerar uma representação onde o que é possível não varia de um mundo para outro. Veja o verbete sobre Lógica Modal [https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/].

subconjunto de mundos em um modelo por “DEM”. Então, d é verdadeiro em um mundo j sse j pertence a DEM. Eis um exemplo em que d é verdadeiro em um mundo arbitrário j:



Dado que j está contido em DEM, isso significa que todas as demandas normativas são cumpridas em j.[45]

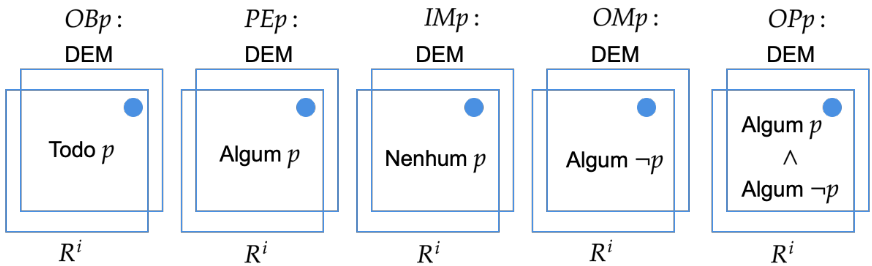
Correspondendo à serialidade simples para a LDS (que há sempre um mundo i-aceitável), assumimos o que irei chamar de “serialidade forte” para Kd: para todo mundo i, há um mundo i-aceitável que está entre aqueles em que todas as demandas normativas são cumpridas. Em outras palavras, para todo mundo i, a intersecção dos mundos i-acessíveis com aqueles em que todas as demandas normativas são cumpridas é não-vazio. Dadas as condições de verdade para d, a serialidade forte valida $\Diamond d$, garantindo que, para todo mundo i, sempre há algum mundo i-acessível em que d é verdadeiro:



Dados esses elementos semânticos, se você aplicá-los às definições dos cinco operadores deônticos de Kd, verá que em cada caso o status normativo de p em i depende da

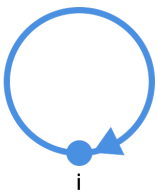
[45]Note que poderíamos adicionar uma semântica de relação-ordenação [ordering-relation], tal como aquela descrita no final da nossa seção sobre LDS, à fim de gerar o componente DEM desses modelos. A principal diferença seria que, ao invés de um conjunto de relações ordenadas mundo-relativas [world-relative ordering relations] para cada mundo (e.g., $\geq i$), haveria apenas uma relação de ordenação $\geq$ pela qual todos os mundos em W (num dado modelo) seriam classificados apenas uma vez. Esta relação seria reflexiva, transitiva e conectada enquanto satisfaria a Suposição Limite em W. DEM seria o conjunto de todos os melhores mundos em W e, assim, as condições de verdade para d e os cinco operadores deônticos seria moldada através de DEM assim gerado.

relação de p com essa intersecção dos mundos i-acessiveis e dos mundos em que todas as demandas normativas são cumpridas:



Se aquela inter-secção é permeada por mundos-p, p é obrigatório; se contém algum mundo-p, p é permissível, se não contém um mundo-p, p é impermissível, se contém algum mundo-$\neg p$, p é omissível e se contém algum mundo-p e algum mundo-$\neg p$, então p é opcional.[46][47]

Se quisermos validar T, $\Box p \rightarrow p$ (e, derivativamente, A4, $OB(OBp \rightarrow p)$), precisamos apenas estipular que a relação de acessibilidade R é reflexiva: que cada mundo i é i-acessível (possível em relação a si próprio):



[46] Mais explicitamente, dado $OBp =_{df} \Box(d \rightarrow p)$, precisamos apenas olhar para $\Box(d \rightarrow p)$. Essa última parte será verdadeira em um mundo i sse $(d \rightarrow p)$ é verdadeiro em todos os mundos i-acessíveis. Mas dadas as condições de verdade para o condicional material "$\rightarrow$", isso significa apenas dizer que p é verdadeiro em todos aqueles mundos i-acessíveis (se algum) em que d é verdadeiro, o que é válido [holds] sse p é verdadeiro em todos os mundos i-acessíveis que recaem em DEM, i.e., em sua intersecção (que é não-vazia pela serialidade forte). O mesmo vale para os outros quatro operadores deônticos.

[47] Uma caracterização mais formalizada dessa ilustração semântica pode ser encontrada no documento suplementar Kripke-Style Semantics for Kd [https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/kripkek.html].

Então, $\Box p \rightarrow p$ deve ser verdadeiro em todo mundo i, pois se $\Box p$ é verdadeiro em i, então p é verdadeiro em cada mundo i-acessível que é auto-acessível, o que inclui i. Isso indiretamente irá gerar o resultado de que $OB(OBp \rightarrow p)$ também é verdadeiro em todos os modelos.

Passamos agora a uma ampla variedade de problemas atribuídos aos sistemas anteriores.

4. Desafios à Lógica Deôntica Standard

Consideremos aqui alguns dos "paradoxos" atribuídos à "Lógica Deôntica Standard". Embora o uso de "paradoxo" seja amplo dentro da lógica deôntica e esteja em conformidade com o uso técnico na lógica filosófica, a saber, a distinção entre "paradoxo" e "antinomia" decorrente do seminal "The Ways of Paradox" de Quine (Quine, 1976 [1962]), irei usar também "puzzle", "problema" e "dilema".

Parafraseando von Wright, o número dos problemas salientes na lógica deôntica é grande e a maior parte deles pode ser enquadrada como problemas ou limitações atribuídas às LDS. Nesta seção iremos listar e descrever brevemente a maioria deles tentando agrupá-los onde for possível sob princípios cruciais da LDS ou temas mais gerais.

4.1 Um Puzzle Para a Própria Ideia de Lógica Deôntica

O Dilema de Jorgensen (Jorgensen, 1937)

Uma ideia ainda defendida por muitos pesquisadores dentro da lógica deôntica e metaética, e particularmente popular nas primeiras décadas seguintes à emergência do positivismo, é de que sentenças avaliativas não são o tipo de sentença que pode ser verdadeira ou falsa. Mas, então, como pode haver uma lógica das sentenças normativas, dado que a lógica é o estudo sobre que se segue de que, e uma coisa pode se seguir de outra somente se as coisas em questão são do tipo que podem ser verdadeiras ou falsas? Portanto, não pode haver lógica deôntica. Por outro lado, algumas sentenças normativas parecem se seguir de outras, portanto a lógica deôntica deve ser possível. O que fazer? Este é o dilema de Jorgensen.[48]

Há uma distinção bastante difundida entre uma norma e uma proposição normativa.[49] A ideia é que uma sentença normativa como “Você pode estacionar aqui por uma hora” pode ser usada por uma autoridade para fornecer permissão ou pode ser usada por um transeunte para informar sobre uma norma existente (e.g., um regulamento municipal permanente). A atividade de usar uma sentença normativa tal como no primeiro exemplo é, às vezes, referida como “normatizar” — ela cria uma norma concedendo permissão por seu próprio uso. Costuma-se dizer que o segundo uso é descritivo, já que a sentença não é usada para fornecer permissão, mas para relatar que a permissão para fazê-lo é um estado permanente. Normalmente, sustenta-se que os dois usos são mutuamente exclusivos e somente o último uso permite verdade ou falsidade. Alguns têm desafiado a exclusividade da divisão combinando semântica e teoria dos atos de fala (especialmente com respeito aos atos performativos) sugerindo, assim, que aquele que está na condição de autoridade para fornecer a permissão, não apenas o faz performando um ato de fala ao enunciar a sentença relevante (como no primeiro exemplo), mas também faz com que aquilo que é dito seja verdadeiro (que a pessoa tem permissão para estacionar).[50]

[48]Deixe-me mencionar que há duas tradições relacionadas que são intimamente associadas com este dilema: uma que tenta fornecer uma lógica para imperativos e outra que rejeita a perspectiva para uma lógica de imperativos, mas enfatiza a importância dos imperativos como componentes semânticos na concepção de uma fundamentação lógica para proposições normativas. Sobre a primeira tradição, Vranas (2010) fornece uma defesa impressionante da cogência de uma lógica de imperativos e (2008) esboça uma nova estrutura para uma lógica de imperativos simples. Sobre a segunda tradição, veja Hansen (2004, 2008) que inclui uma história das duas tradições e uma defesa, assim como contribuições técnicas sistemáticas, da segunda.

[49]von Wright (1963); Hedenius (1963) [1941]; Alchourron e Bulygin (1971); Alchorrun e Bulygin (1981); Makinson (1991). von Wright (1963) atribui a distinção a Ingemar Hedenius (Hedenius (1963) [1041]). Mais recentemente, veja Makinson e van der Torre (2003) para uma tentativa de fornecer uma lógica das normas em uma nova estrutura criada para a “lógica input-output”. Veja também Makinson (1999) para um esboço e motivação para esta nova abordagem.

[50]Veja Lemmon (1962a) e Kamp (1974, 1979). Geralmente se pensa que enunciados performativos funcionam desse modo (Hedenius, 1963 [1941]). Por exemplo, se uma cerimônia de casamento conduzida por uma autoridade legítima requer que tal autoridade termine a cerimônia com “Vocês são agora marido e esposa” à fim de completar o ato do casamento, o ato de fala utilizando esta sentença não apenas casa o casal (em tal contexto), mas parece ser também uma descrição verdadeira do seu estado naquele momento.

4.2 Um Problema Para a NEC[51]

O Problema da Necessidade Lógica das Obrigações.[52]
Considere

(1) Nada é obrigatório.

Uma representação natural disso na linguagem da LDS seria:

(1') $\neg OBq$, para todo q.

Observamos acima que OB-NEC implica $OB - N$:$\vdash OB\top$; mas dado (1'), temos $\neg OB\top$ e, assim, uma contradição. A LDS parece implicar que é uma verdade lógica que algo sempre é obrigatório. Mas parece que o que (1) expressa, uma ausência de obrigações, é possível. Por exemplo, considere a época em que não existia agentes racionais no universo. Por que deveríamos pensar que existiam obrigações?

von Wright (1951) observa que dado que a negação de $\neg OB\top$ é demonstravelmente [provably] equivalente a $PE\bot$ (considerando o esquema definicional tradicional e $OB - RE$) e dado que $OB\top$ e $PE\bot$ são inconsistentes, devemos optar por um "princípio de contingência" que diz que $OB\top$ e $negPE\bot$ são logicamente contingentes. von Wright (1963, p. 152-154) argumenta que $OB\top$ (e $PE\top$) não expressam prescrições reais. Føllesdal e Hilpinen (1971, p. 13) sugerem que excluir $OB - N$ apenas exclui "sistemas normativos vazios" (i.e., sistemas normativos sem obrigações) e, talvez, nem isso, pois já que ninguém pode falhar em cumprir $OB\top$, por que se preocupar? (Cf. Prior, 1958). No entanto, dado que é duvidoso que alguém possa fazer $\top$, parece ser igualmente duvidoso que alguém pode "cumprir" $OB\top$ e, desse modo, a questão não é tão simples. al-Hibri (1978) discute vários pontos anteriores a este problema, rejeita $OB - N$ e desenvolve uma lógica deôntica sem esta fórmula. Jones e Porn (1985) rejeitam explicitamente $OB - N$ para "dever" em seu sistema em que a preocupação é como o que as pessoas devem fazer. Se estamos lendo

[51] O conteúdo desta seção não aparece no corpo do texto do verbete. Há apenas um link direcionando para o documento suplementar em que tal problema se encontra. Neste caso, somente, optei por traduzir o documento suplementar intitulado The Logical Necessity of Obligations Problem para não deixar uma lacuna no texto. [N. do T.].

[52] Não conheço nenhuma denominação padrão para este e para o próximo problema. Portanto, dou apenas nomeação descritiva.

OB simplesmente como "deve ser o caso que", não é claro que há algo contraintuitivo sobre $OB\top$ (agora lido essencialmente como "deve ser o caso que contradições são falsas"), mas também não há mais nenhuma conexão óbvia com o que é obrigatório, permissível ou com o que as pessoas devem fazer.

4.3 Puzzles Para a RM

Paradoxo da Permissão da Escolha Livre (Ross, 1941)
Considere:

(1) Você pode ou dormir no sofá ou dormir na cama do quarto de hóspedes.[53]

(2) Você pode dormir no sofá e você pode dormir na cama do quarto de hóspedes.

A simbolização mais direta disso, na LDS, parece ser:

(1') $PE(s \vee h)$

(2') $PEs \wedge PEh$

É natural ver (2) como se seguindo de (1): se você me permite dormir ou no sofá ou na cama do quarto de hóspedes, parece que estou permitido a dormir no sofá e estou permitido a dormir na cama do quarto de hóspedes (embora talvez não durma em ambos, juntando os dois, por assim dizer). Mas (2') não se segue de (1') e o seguinte não é um teorema da LDS:

$$*PE(p \vee q) \rightarrow (PEp \wedge PEq)$$

Além disso, suponha que $*$ fosse adicionado a um sistema que contém LDS. Resultaria num desastre. Pois, se segue de $OB - RM$ que $PEp \rightarrow PE(p \vee q)$.[54] Portanto, com $*$ se seguiria que $PEp \rightarrow (PEp \wedge PEq)$, para qualquer q. Então, teríamos

$$**PEp \rightarrow PEq,$$

[53]Irei destacar letras chave para servir de pista para esquemas simbólicos deixados implícitos, mas espero, suficientemente claros.

[54]Isso se segue de RM e da definição de PÉ: suponha $\vdash p \rightarrow q$. Então, $\neg q \rightarrow \neg p$. Assim, por RM, $\vdash OB\neg q \rightarrow OB\neg p$, e, portanto, $\vdash \neg OB\neg p \rightarrow \neg OB\neg q$, *i.e.*, $\vdash PEp \rightarrow PEq$. Agora, apenas assuma que q seja $(p \vee q)$.

que se algo é permissível, então tudo é permissível e, assim, também seria um teorema que nada é obrigatório, $\vdash \neg OBp$.[55]

Algumas pessoas têm argumentado por dois sentidos de "permissibilidade"[56].[57]

Considere:

(1) É obrigatório que a carta seja enviada.

(2) É obrigatório ou que a carta seja enviada ou que a carta seja queimada.

Na LDS, isso parece ser naturalmente expresso como:

(1') OBe

(2') $OB(e \vee q)$

Mas $\vdash OBp \rightarrow OB(p \vee q)$ se segue por RM de $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$. Portanto, (2') se segue de (1'), mas parece estranho dizer que uma obrigação para entregar a carta implica uma obrigação que pode ser cumprida queimando a carta (algo presumivelmente proibido) e, além disso, uma obrigação que pareceria ser violada se a carta não fosse queimada, caso eu não entregasse a carta.

O Paradoxo do Bom Samaritano (Prior, 1958)[58]

Considere:

(1) Deve ser o caso que Jones ajude Smith, que foi roubado.

---

[55] Suponha que algo é obrigatório, digamos OBp. Por NC, se segue que PEp. Uma instância de $**$ acima é $PEp \rightarrow PE\neg p$. Assim teríamos $PE\neg p$, que, por RE, PC e a definição de PE, equivale a $\neg OBp$, contradizendo a nossa suposição. Assim, nada poderia ser obrigatório.

[56] Por exemplo, um dos sentidos seria como na LDS (a simples ausência de uma proibição). Outro seria um sentido de permissão mais forte (von Wright, 1968) com uma lógica distinta que iria, ratificar $*$, mas não $**$. Outra abordagem seria dizer que isso é um pseudo-problema, dado que o uso conjuntivo de "ou" no contexto de uma palavra de permissão pode ser expresso como uma conjunção de conjuntos permissíveis, $PEp \wedge PEq$ (Føllesdal e Hilpinen (1971)). Kamp (1974, 1979) fornece uma análise detalhada dessas questões que é sensível tanto à semântica quanto à pragmática da permissão.

[57] Outro puzzle para a RM pode ser encontrado no documento suplementar The Violability Puzzle https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/theviolability.html.

[58] Prior o apresentou usando esta variante de RM: Se $\vdash p \rightarrow q$, então $\vdash IMq \rightarrow IMp$ (a impermissibilidade de Smith ser roubado, aparece incorretamente implicar a impermissiblidade de ajudá-lo, que foi roubado). Veja também Åqvist (1967), que tem sido bastante influente.

(2) Deve ser o caso que Smith foi roubado.

Parece que o seguinte deve ser verdadeiro..

Jones ajuda Smith, que foi roubado, se e somente se Jones ajuda Smith e Smith foi roubado.

Então, parece que uma maneira correta de simbolizar ((1) e (2) na LDS é:

(1') $OB(a \wedge r)$

(2') OBr

Mas, é uma tese do CP que $(a \wedge r) \to r$, portanto, por RM, se segue que $OB(a \wedge r) \to OBr$, e, então, podemos derivar (2') de (1') por MP. Mas dificilmente parece que, se ajudar o homem roubado é obrigatório, se segue que também é obrigatório que ele seja roubado[59].[60]

[59]Este paradoxo pode ser colocado de forma equivalente com apenas um agente via IM: "O Paradoxo da Vítima" nota que a vítima de um crime ajuda a si própria somente se houve um crime. Se é impermissível que haja um crime, se segue, sob simbolização similar que é impermissível, para a vítima do crime, ajudar a si própria, o que dificilmente soa como correto. Similarmente para "O Paradoxo do Ladrão (do Arrependido)" em que agora focamos no ladrão reparando (ou se arrependendo) o seu crime e, novamente, parece que chegamos no resultado de que é impermissível para o ladrão fazer reparos ao seu crime, sugerindo um argumento bastante conveniente contra todas as obrigações de reparar os próprios crimes. Essas primeiras variações foram usadas para mostrar que certas soluções iniciais propostas ao Paradoxo do Bom Samaritano não resolviam o problema realmente. As duas versões são encontradas em Nowell Smith e Lemmon (1960).

[60]Uma variação bastante discutida deste paradoxo pode ser encontrada no documento suplementar The Paradox of Epistemic Obligation https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/theparadox.html.

Tem havido várias respostas aos paradoxos RM-relacionados.[61]

[61]Uma resposta padrão para o Paradoxo de Ross, o Paradoxo do Bom Samaritano e o Paradoxo da Obrigação Epistêmica, é tentar explicá-los. Por exemplo, O Paradoxo de Ross é frequentemente rejeitado como confusão elementar ((Føllesdal e Hilpinen (1971)) ou com o argumento de que a inferência é apenas pragmaticamente estranha em modos que são independentemente previsíveis por qualquer teoria adequada da pragmática da linguagem deôntica (Castañeda, 1981)). De forma similar, argumenta-se que o Paradoxo só Bom Samaritano é, na verdade, um paradoxo da obrigação condicional e, assim, RM não é a origem real do paradoxo (Castañeda, (1981); Tomberlin (1981)). No entanto, dado que todos esses paradoxos pelo menos parecem depender de OB-RM, uma solução natural para os problemas é impedir os paradoxos rejeitando o próprio OB-RM. Dois exemplos acessíveis e intimamente relacionados de abordagens à lógica deôntica que rejeitam OB-RM de uma perspectiva filosófica de princípios são Jackson (1985) e Goble (1990a). Jackson (1985) argumenta a favor de uma abordagem de "dever ser" que a conecta a contrafactuais e explora informalmente sua lógica e semântica; Goble (1990a) defende algo similar para "bom" e "mau" (assim como para "deve"), vinculando-os explicitamente a características lógicas de contrafactuais. (Goble (1990b) contém os principais detalhes técnicos). Interessantemente, suas abordagens também se interrelacionam com a questão do "atualismo" [actualism] e "possibilismo" [possibilism] tal como usados na teoria ética. Grosso modo, o possibilismo é a visão de que devo fazer p se p é parte do melhor resultado geral que eu poderia fazer, mesmo se a bondade deste resultado geral dependa de todas as outras coisas que eu, de fato, não faria se fosse realizar p. O atualismo, em contraste, é a visão de que devo fazer p se fazer isso seria, de fato, melhor do que não fazer p, e isso, obviamente, pode depender crucialmente do que mais eu faria (idealmente ou não) se fosse para realizar p. (Veja Jackson e Pargetter (1986); Jackson (1988) e, para discussões anteriores sobre essa questão, veja Goldman (1976) e Thomason (1981a). S. O. Hansson (1990 e, de forma mais elaborada, 2001) desenvolve sistemas de lógica deôntica em que analisa noções deônticas proibitivas e prescritivas em termos de propriedades abstratas de várias ordenações de preferência [preference orderings] (e.g., um status normativo é proibitivo sempre que algo pior do que algo que tenha este status também o tem). Ele também vê OB-RM como o principal culpado nos paradoxos da lógica deôntica standard e, assim, explora metodicamente estruturas não-standards em que OB-RM não é válido. Hansson (2001) também é importante pelo seu trabalho extenso e original na lógica deôntica (e em outras áreas). Uma fonte geral bastante útil que cobre muito bem alguns dos problemas a respeito de OB-RM, assim como vários outros, é van der Torre (1997).

4.4 Puzzles Para NC, OD e Análogos

O Dilema de Sartre (Lemmon, 1962b)[62]

Um conflito de obrigações é uma situação em que há duas obrigações e não é possível que as duas sejam cumpridas.

Considere o seguinte conflito:

(1) É obrigatório que eu encontre Jones agora (como uma promessa ao meu amigo Jones, digamos).

(2) É obrigatório que eu não encontre Jones agora (como uma promessa ao meu outro amigo, Smith, digamos).[63]

Aqui parece que eu tenho um conflito de obrigações, na verdade um conflito bem direto e explícito, pois se o que eu prometi a uma pessoa for cumprido, o que eu prometi a outra pessoa não será cumprido. As pessoas fazem (e.g., sob pressão ou distração) essas promessas conflitantes e parece que, como resultado, elas incorrem em obrigações conflitantes.[64] Mas considere a representação natural disso na LDS:

(1') OBj

(2') $OB\neg j$

Mas, dado que NC, $OBp \rightarrow \neg OB\neg p$, é um teorema de todas as LDS, podemos rapidamente derivar uma contradição de (1) e (2), o que significa que (1'), em conjunção

[62]Mudei o exemplo para que o conflito seja direto e explícito (i.e., o conteúdo de uma obrigação é a negação da outra). O exemplo bastante citado de Sartre é de um homem obrigado a se juntar à resistência (para vingar a morte de seu irmão e lutar contra a ocupação nazista) e obrigado a ficar em casa e cuidar de sua mãe doente (que está devastada pela perda do seu filho e profundamente ligada ao filho que ainda vive). von Wright (1968) se refere a um conflito de obrigações como uma "situação perplexa" ["predicament"] e ilustra isso com o exemplo bastante citado de Jephthah (do livro Book of Judges), que promete a Deus sacrificar o primeiro ser vivo que ele encontrar ao retornar da guerra, se ele o conceder a vitória (cujo desejo é concedido), mas o primeiro ser vivo que ele encontra após o seu retorno é a sua filha.

[63]Marcus (1980) aponta a possibilidade de tais conflitos de obrigação originários de um princípio.

[64]Se essas obrigaçõe são ou não obrigações não sobrepostas [non-overridden] tudo considerado, é um outro problema. Para nossos propósitos aqui, o ponto é que elas parecem ser obrigações. Veja o puzzle a seguir (O Dilema de Platão) para outras questões.

com (2), representa uma situação logicamente inconsistente. No entanto, a situação original dificilmente parece ser logicamente incoerente[65], [66], [67].

Deixe-me notar que um outro puzzle para obrigações conflitantes, longamente ignorado, denominado "O Puzzle de van Fraassen" (van Fraassen, 1973) tem recebido crescente atenção: Horty, 1994; Horty, 2003; van der Torre e Tan, 2000; McNamara, 2004a; Hansen, 2004 e Goble, 2005.

O Dilema de Platão (Lemmon, 1962b)[68]

(1) Tenho a obrigação de encontrá-lo para um almoço ao meio dia.

(2) Tenho a obrigação de levar meu filho com problemas respiratórios ao hospital ao meio dia.

Aqui, parece que temos um conflito de obrigações indireto e não explícito, se assumirmos que satisfazer as duas obrigações é praticamente impossível. Ainda assim, diferentemente do nosso exemplo anterior em que as duas promessas poderiam naturalmente estar em pé de igualdade, todos concordaríamos que a obrigação de ajudar meu filho se sobrepõe à minha obrigação de almoçar com você, e que a primeira obrigação, a qual tem precedência, é derrotada pela segunda obrigação. Ordinariamente, também assumiríamos que nenhuma outra obrigação se sobrepõe à minha obrigação de levar meu filho para o hospital de modo que esta obrigação é uma obrigação não-sobreposta [all things considered non-overridden obligation], mas isso não se aplica à obrigação de encontrá-lo para o almoço. Além disso, também estamos dispostos a dizer que trata se de uma situação em que a obrigação geral

[65] Lemmon (1962a) aponta que um conflito de obrigações não implica uma contradição. Williams (1965) aponta para a contingência dos conflitos de obrigação e contrasta isso com a inconsistência como irrealizabilidade em qualquer mundo. Marcus (1980) salienta a concepção de consistência mundo-teórica [world-theoretic] mais explicitamente e a aplica a códigos morais por meio da qual a consistência de um código implica somente que há algum mundo elegível em que o código é obedecido, e que isso não implica de modo algum que o código deve ser obedecido em todos os mundos elegíveis. Cf. Marcus (1996).

[66] Um puzzle sobre $OBp \to \Diamond p$ pode ser encontrado no documento suplementar *A Puzzle Surrounding Kant's Law* https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/apuzzle.html.

[67] Outro puzzle associado com NC e OD pode ser encontrado no documento suplementar *Collapse of Conflits and Impossible Obligations* https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/collapse.html.

[68] Aqui também mudei o exemplo. O exemplo de Platão envolve o cumprimento de uma promessa de devolver armas a alguém (agora com raiva) que pretende injustamente matar um amigo com tais armas. Lemmon interpreta os problemas levantados pelo Dilema de Sartre de uma forma um pouco diferente da minha.

que temos de cumprir os nossos compromissos (ou, de maneira mais geral, de cumprir as nossas promessas) tem uma exceção — as circunstâncias são atenuantes. Se definirmos um "dilema de obrigações" como um conflito de obrigações em que nenhuma das obrigações conflitantes se sobrepõe (cf. Sinnott-Armstrong, 1988), então o caso acima envolve um conflito de obrigações, mas não um dilema de obrigações. Uma vez que reconhecemos conflitos de obrigações, há a questão de representar a lógica de raciocinar sobre obrigações conflitantes em que algumas se sobrepõem sobre outras (outras não), algumas são derrotadas (outras não), algumas são obrigações não-sobrepostas [all things considered non-overridden obligations] (outras não) em que algumas talvez são parte dos dilemas de obrigação, em que algumas são válidas em geral, mas não excepcionalmente, em que algumas talvez são absolutas etc. Neste sentido, o problema central aqui é sobre obrigações conflitantes de diferentes pesos e sobre a derrotabilidade das obrigações. Certamente, não há nenhum mecanismo na LDS para isso, já que, para começar, a LDS não permite conflitos, ainda que esse seja um problema que vai muito além de apenas ter uma lógica que permita conflitos. Tem havido várias abordagens sobre esse dilema e sobre a derrotabilidade entre obrigações conflitantes.[69]

4.5 Puzzles Para os Condicionais Deônticos

O Paradoxo da Contrariedade ao Dever (ou *Paradoxo de Chisholm*) (Chisholm, 1963a)[70] Considere o seguinte:

(1) É um dever que Jones vá (para auxiliar os seus vizinhos).

(2) É um dever que, se Jones vai, então ele diga a eles que está indo.

[69] von Wright (1968) afirmou que minimizar o mal é uma abordagem natural para a resolução de conflitos sugerindo, desse modo, que um tipo de minimização (e, assim, de dependência de uma ordenação) está disponível. Alchourron e Makinson (1981) fornecem uma análise formal da resolução de conflitos através de ordenações parciais de regulação e conjuntos de regulações. Chishom (1964), tem sido bastante influente conceitualmente, como foi testemunhado, por exemplo, por Loewer e Belzer (1983). Em teoria ética, o ponto de referência conceitualmente informal é Ross (1939). Horty (1994) apresenta uma discussão bastante influente criando uma conexão entre a lógica default [default logic] desenvolvida em IA (veja Brewka, 1989) e uma influente abordagem anterior para o conflito de obrigação (van Fraassen, 1973) que combina uma ordenação de preferência com uma abordagem de imperativos à lógica deôntica. Prakken (1996) discute a abordagem de Horty e uma abordagem alternativa que separa estritamente o componente derrotável do componente deôntico, argumentando que o tratamento dos conflitos deveria ser deixado para o primeiro componente apenas. Veja também Makinson (1993) para extensa discussão da derrotabilidade e do lugar dos condicionais deônticos neste contexto. Outras abordagens sobre a derrotabilidade na lógica deôntica que tem afinidades com as técnicas semânticas desenvolvidas em inteligência artificial para modelar o raciocínio derrotável sobre condicionais derrotados em geral, são Asher e Bonevac (1996) e Morreau (1996). Ambos tentam representar as noções de obrigação prima facie do tipo-Ross, etc. Também são notáveis as discussões da derrotabilidade e condicionalidade de Alchourron (1993, 1996) em que é postulado um operador de revisão (operando nos antecedentes de condicionais) em conjunção com um operador de implicação estrita e um operador deôntico monádico estrito. Note que Alchourron (1996), Prakken (1996), Asher e Bonevac (1996), Morreau (1996) e Prakken (1996) são todos encontrados em Studia Lógica, 57.1, 1996 (editado por A. Jones e M. Sergot). Nute (1997) é dedicado à derrotabilidade na lógica deôntica e é a melhor fonte sobre o tópico, com artigos de várias figuras chave, incluindo o próprio Nute. Veja Bartha (1999) para uma abordagem de condicionais contrários-ao-dever e de condicionais derrotáveis [layered over a branching time framework with an agency operator]. Smith (1994) contém uma discussão informal interessante das obrigações conflitantes, derrotabilidade, violabilidade e condicionais contrários-ao-dever. Dado que é um assunto de muita controvérsia e dúvida se as noções deônticas contribuem com algo especial para as relações de inferência derrotáveis (tal como opostas aos condicionais derrotáveis), deixamos essa questão de lado aqui e nos voltamos para os condicionais e para o problema que tem recebido mais atenção na lógica deôntica.

[70] Um precursor deste paradoxo pode ser encontrado no documento suplementar *The Paradox of Derived Obligation/Commintment* https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/theparadoxderived.html.

(3) Se Jones não vai, então ele não deve dizer a eles que está indo.

(4) Jones não vai.

Isso certamente parece descrever uma situação possível. Pensa-se amplamente que (1)–(4) constitui um conjunto de sentenças mutuamente consistente e logicamente independente. Tratamos essas duas condições como desiderata.

Note que (1) é uma obrigação primária, que diz o que Jones deve fazer incondicionalmente.[71] (2) é uma obrigação compatível-com-o-dever, aparentemente dizendo (no contexto de (1)) o que mais Jones deve fazer sob a condição de que Jones cumpra a sua primeira obrigação. Em contraste, (3) é uma obrigação contrária-ao-dever ou "imperativa" (CAD) aparentemente dizendo (no contexto de (1)) o que Jones deve fazer condicionalmente à violação da sua obrigação primária. (4) é uma afirmação factual que, em conjunção com (1), implica que Jones viola a sua obrigação primária. Assim, esse puzzle coloca no centro do palco não apenas construções deônticas condicionais, mas a violabilidade das obrigações. Ele levanta a questão: o que constitui um raciocínio adequado sobre o que fazer diante de violações de obrigações?

Como podemos apresentar o quarteto acima na LDS? A simbolização mais direta é:

(1') OBv

(2') $OB(v \to d)$

(3') $\neg v \to OB\neg d$

(4') $\neg v$

No entanto, Chisholm salienta que de (2'), pelo princípio $OB - K$, temos $OBv \to OBd$, e, então, de (1'), por MP, temos OBd; mas por MP apenas temos $OB\neg d$ de (3') e (4'). Dessas duas conclusões, pelo CP, temos $\neg(OBd \to \neg OB\neg d)$, contradizendo assim $OB - NC$ da LDS. Portanto, pela LDS, (1')–(4') leva à inconsistência. Mas (1)–(4) não parece ser inconsistente, de modo que a representação não pode ser fiel.

[71] Aqui, seguimos a tradição (embora auto conscientemente) ao passar por cima das diferenças entre o que deve ser, o que alguém deve fazer e o que é obrigatório.

Várias representações menos plausíveis na LDS são, similarmente, não fiéis. Por exemplo, podemos tentar ler a segunda e terceira premissas de maneira uniforme, ou no modelo de (2') ou no modelo de (3'). Suponha que, ao invés de (3'), usemos (3") $OB(\neg v \rightarrow \neg d)$. O problema é que (3") é derivável de (1') na LDS, mas não há razão para se pensar que (3), de fato, se segue de (1). Portanto, temos uma representação não fiel novamente. Alternativamente, suponha que, ao invés de (2'), usemos (2") $v \rightarrow OBd$. Isso é derivável de (4') no CP (e, portanto, na LDS). Mas não há razão para se pensar que (2) se segue de (4). Então, novamente temos uma representação não fiel.

A representação seguinte mostra em forma tabular as dificuldades em se tentar interpretar o quarteto na LDS:[72]

Primeira tentativa:	Segunda tentativa:	Terceira tentativa:
(1') OBv (2') $OB(v \rightarrow d)$ (3') $\neg v \rightarrow OB\neg d$ (4') $\neg v$	(1') OBv (2') $OB(v \rightarrow d)$ (3") $OB(\neg v \rightarrow \neg d)$ (4') $\neg v$	(1') OBv (2") $v \rightarrow OBd$ (3') $\neg v \rightarrow OB\neg d$ (4') $\neg v$
De (1'), (2'), OBt. De (3'), (4'), $OB\neg t$. Por NC, $OBt \rightarrow \neg OB\neg t$. Portanto $\perp$; a consistência é perdida.	(3") se segue de (1'). Portanto, a independência é perdida.	(2") se segue de (4'). Portanto, a independência é perdida.

Cada leitura do quarteto original viola um dos nossos desiderata: consistência mútua ou independência conjunta.

Se von Wright iniciou a lógica deôntica como uma especialização acadêmica, o Paradoxo de Chisholm foi o que potencializou o escape que ela precisava para fugir da subsunção da lógica modal normal, solidificando, assim, o status de lógica deôntica como uma especialização distinta. Hoje em dia é praticamente universal o reconhecimento de que Chisholm estava certo: o tipo de condicional deôntico expresso em (3) não pode ser fidedignamente representado na LDS e nem, de forma mais geral, por algum tipo de operador deôntico unitário e um condicional material. Essa é uma das poucas áreas em que há acordo quase universal

[72] A combinação remanescente irá substituir (2') por (2") e (3') por (3"), mas isso apenas duplica o problema com a segunda e terceira leituras, de modo que é normalmente ignorada.

na lógica deôntica. Se isso se deve ao fato de algum condicional deôntico primitivo diádico especial estar operando ou apenas porque algum condicional não material é essencial para a compreensão de raciocínios deônticos importantes, ainda é uma questão aberta bastante disputada[73].[74]

O Paradoxo do Assassino Piedoso (Forrester, 1984).[75]

---

[73]von Wright (1956, 1971) adota a abordagem do operador diádico não-componencial para a sintaxe das obrigações CAD. Danielson (1968); Hansson (1969); Lewis (1973, 1974) e Feldman (1986) fornecem modelos da abordagem “next best thing”: a interpretação das obrigações condicionais através de um operador diádico primitivo não-componencial interpretado, por sua vez, via ordenação de preferência dos mundos possíveis onde o antecedente é válido; veja também Åqvist (2002) [1984] para (entre outras coisas) uma apresentação extensiva sistemática deste tipo de abordagem e al-Hibri (1978) para (entre outras coisas) uma discussão sistemática ampla de várias abordagens das obrigações CAD. van Fraassen (1972), Loewer e Belzer (1983) e Jones e Porn (1985) também oferecem discussões influentes das obrigações CAD e propõem soluções formais distintas, cada uma empregando a ordenação de resultados, mas oferecendo algumas mudanças nos modelos mais antigos. Uma importante fonte sobre a meta teoria das lógicas clássica e não-clássicas através de uma ordenação de estruturas clássica e não-clássica para o operador diádico é Goble (2003). Mott (1973) e Chellas (1974, 1980) oferecem uma análise influente desse puzzle combinando um condicional não-material e um operador deôntico unitário para formar um componencial genuíno, $p \Rightarrow OBq$, para representar condicionais como 3) acima; DeCew (1981) é uma resposta crítica importante a este tipo de abordagem. Tomberlim (1983) contém uma discussão informal bastante influente de várias abordagens. Bonevac (1998) é um argumento recente contra considerar a obrigação condicional como sendo um operador primitivo não-componencial, sugerindo, grosso modo, que técnicas para raciocínios derrotáveis, como aquelas desenvolvidas em IA (veja Brewka, 1989), são suficientes para lidar com os problemas das obrigações CAD. Smith (1993, 1994) contém discussões importantes apontando para a diferença entre violabilidade e derrotabilidade e para a relevância da primeira, ao invés da segunda, para as obrigações CAD. Åqvist e Hoepelman (1981) e van Eck (1982) (e, novamente, Loewer e Belzer (1983)) são representantes clássicos de tentativas de resolver o puzzle incorporando noções temporais na lógica deôntica. Jones (1990) contém um argumento influente contra qualquer solução temporal ao puzzle. Castañeda (1981) argumenta que ao se distinguir cuidadosamente proposições e ações no escopo dos operadores deônticos, o puzzle de Chisholm, assim como a maioria dos puzzles para a lógica deôntica, pode ser resolvido; Meyer (1988) apresenta uma versão desta abordagem geral usando a lógica dinâmica. Prakken e Sergot (1996) contém um argumento influente contra qualquer solução do puzzle baseada na ação. Para o trabalho recente sobre as obrigações CAD no contexto de uma estrutura de separação temporal com agência com representação a la Horty-Belnap, veja Horty (1996, 2001), Bartha (1999) e a contribuição de Bartha (capítulo 11) para Belnap (2001). Uma fonte recente que revisa boa parte da literatura sobre as obrigações CAD e propõe sua própria solução é Carmo e Jones (2002); mas veja também Nute (1997) (especialmente van del Torre e Tan (1997) e Prakken e Sergot (1997)).

[74]Discussão adicional sobre esse importante puzzle pode ser encontrada no documento suplementar A Bit More of Chisholm’s Paradox https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/chisholm.html.

[75]Também chamado de “Paradoxo de Forrester”.

Considere:

(1) É obrigatório que John Doe não mate a sua mãe.

(2) Se Doe matar a sua mãe, então é obrigatório que Doe a mate piedosamente.

(3) Doe mata a sua mãe (por sua herança, digamos).

Parece que a maneira correta de simbolizar (1) a (3) na é:

(1') $OB\neg m$

(2') $m \to OBp$

(3') m

Primeiro, de (2") e (3') se segue que OBp por MP. Mas, adicionemos agora a incontestável afirmação:

Doe mata a sua mãe piedosamente somente se Doe mata a sua mãe.

Assumindo que isso, simbolizado como $p \to m$, é uma verdade lógica num sistema expandido, por OB-RM se segue que $OBp \to OBm$, e então, por MP novamente, temos OBm. Isso é bastante ruim, pois dificilmente parece que do fato de que, se eu matar minha mãe então devo matá-la piedosamente, e de que eu irei matá-la (maldoso que sou), podemos concluir que estou, na verdade, obrigado a matar minha mãe. Adicione a isso que de OBm temos $\neg OB\neg m$ por NC da LDS e teremos, também, uma contradição. Portanto, ou devemos construir (2) de tal modo que não satisfaça o modus ponens ou devemos rejeitar OB-RM.[76]

[76] Alguns têm sugerido que este é um problema de dificuldades de escopo e outros têm argumentado que o problema é que OB-RM é inválido e que, ao rejeitá-lo, resolve-se o problema. (Sinnott-Armstrong (1985) argumenta por uma solução de escopo; Goble (1991) critica a abordagem da solução de escopo e argumenta a favor da rejeição de OB-RM). Listamos este puzzle, ao invés do Puzzle do Bom Samaritano, porque, diferentemente do Puzzle Standard do Bom Samaritano, este parece envolver crucialmente um condicional contrário-ao-dever; e frequentemente se assume que uma solução para o Paradoxo de Chisholm deveria ser, também, uma solução para este puzzle (e vice versa). Alternativamente, pode-se ver o puzzle como um problema em que acabamos sendo obrigados a matar a nossa mãe piedosamente devido à nossa decisão de matá-la ([via factual detachment)] e, então, por OB-RM, parece que estaríamos obrigados a matá-la, o que não tem plausibilidade alguma, e ,assim, acabar rejeitando OB-RM. No entanto, isso ainda incluiria uma posição sobre [detachment] os condicionais contrários-ao-dever.

4.6 Problemas Sobre Inadequações Expressivas (Normativas) da LDS

Nesta seção, consideramos algumas noções normativas monádicas que parecem ser inexpressáveis na LDS.

O Puzzle da Lacuna Normativa (von Wright, 1968)[77]

Em alguns sistemas normativos, permissões, proibições e obrigações são explicitamente dadas. Assim, parece possível haver sistemas normativos com lacunas: sistemas em que algo não é explicitamente obrigatório, nem impermissível e nem permissível porque, digamos, não é explicitamente comandado, proibido ou permitido pela autoridade relevante. Ainda assim, $OBp \vee (PEp \wedge PE\neg p) \vee IMp$ é uma tese ("exaustiva") da LDS (dado o Esquema Definicional Tradicional), o que parece fazer com que essas lacunas sejam impossíveis.

O Puzzle de Urmson — Indiferença versus Opcionalidade (Urmson, 1958)

Considere:

(1) É opcional que você participe da reunião, mas não é uma questão de indiferença.

Isso parece descrever algo bastante familiar: questões opcionais que, no entanto, não são questões de indiferença. Mas quando os lógicos deônticos e eticistas fornecem um operador para a condição $(\neg OBp \wedge \neg OB\neg p)$ é quase que invariavelmente "É indiferente que p", "INp". Mas parece que do teorema $OBp \vee (\neg OBp \wedge \neg OB\neg p) \vee IMp$ se segue que $(\neg OBp \wedge \neg IMp) \rightarrow INp$, ou seja, tudo o que não é obrigatório nem proibido é uma questão de indiferença. No entanto, muitas ações, incluindo algumas ações heróicas, não são nem obrigatórias nem proibidas e, ainda assim, dificilmente são uma questão de indiferença. Podemos colocar isso dizendo que a LDS pode representar a opcionalidade, mas não a indiferença, apesar do fato deste último conceito ter sido um objetivo pretendido de representação quase desde seu início.

O Problema Problem da Superrogação (Urmson, 1958)

Algumas coisas são superrogatórias ou estão para além do dever (e.g., se voluntariar para fazer algo custoso e arriscado onde outros são igualmente qualificados e ninguém é obrigado). A LDS não tem capacidade para representar este conceito, que demanda um aumento substancial nos recursos lógicos e expressivos. (Ver também Chisholm, 1963b).

O Dilema [Must] versus [Ought] (McNamara, 1996b)

[77]Veja também Alchourron e Bulygin (1971).

Considere:

(1) Embora você possa ignorar a reunião, você deve ir.

Isso parece perfeitamente possível, mesmo numa situação em que não há obrigações conflitantes, como iremos supor aqui. (1) parece implicar que é opcional que você vá — que você pode ir e que você pode não ir. Parece claro que os dois últimos usos de "pode" expressam permissibilidade. No entanto, na lógica deôntica (e na teoria ética), "deve" frequentemente é a leitura dada para a necessidade deôntica e "permissibilidade" normalmente é apresentada como dual. Mas, se simbolizarmos (1), teremos,

(1') $PE\neg p \wedge OBp$

o que é simplesmente $\neg OBp \wedge OBp$ em outros termos (dado OB-RE e o Esquema Definicional Tradicional). Portanto, dado OB-NC, (1') permite uma contradição. Outra forma de colocar esse problema é dizer que é mais plausível construir o "pode" de permissibilidade como sendo o dual de "deve" [must] do que como o dual de "deve" [ought]. Isso gera um dilema para a lógica deôntica standard (na verdade, para a maioria do trabalho em lógica deôntica).

Ou a necessidade deôntica representa "dever" [ought], caso em que seu dual não representa permissibilidade (e nem qualquer outra construção na LDS o faz), ou a permissibilidade é representada na LDS, mas "dever" [ought] não é expressável nela, apesar da suposição onipresente do contrário.

Que "dever" [ought] é o dual de permissibilidade é realmente uma pressuposição equivocada amplamente ignorada que caracteriza parcialmente a teoria ética e a lógica deôntica do século XX.[78]

O Problema "O Mínimo que Você Pode Fazer" (McNamara, 1996b)

Considere:

[78] Jones e Porn (1986) fornecem uma tentativa para distinguir "dever" [must] e "dever" [ought], embora o primeiro acabe parecendo mais como necessidade prática (aquela que é válida em todos os cenários - permissíveis ou não) do que necessidade deôntica (aquela que é válida em todos os cenários permissíveis). McNamara (1996b) fornece uma série de argumentos a favor de que "deve" [must], e não "deve" [ought], é o dual de permissibilidade e, assim, que é este termo quase que universalmente ignorado, "deve" [must] e não "deve" [ought], que rastreia a preocupação tradicional com a permissibilidade na teoria ética e na lógica deôntica.

(1) Você deveria ter chegado em casa na hora marcada; o mínimo que você poderia ter feito era ter ligado, e você não fez nem mesmo isso.

A expressão na segunda cláusula foi completamente ignorada na literatura da lógica deôntica e da teoria ética. (1) parece expressar a ideia de que há alguma alternativa mínima, e aceitável (e a crítica sugerida na enfática terceira cláusula é de que nem mesmo aquela opção mínima aceitável foi tomada, muito menos a opção preferível identificada na primeira cláusula usando “dever” [ought]). Essa noção sobre o que é minimamente aceitável entre opções permissíveis não é expressável na LDS.[79]

4.7 A Agência em Contextos Deônticos

Normalmente falamos sobre o que deve ser e sobre o que as pessoas devem fazer. Essas expressões não parecem ser iguais (por exemplo, a última expressão exige um agente, a primeira não). Essa questão, assim como a questão mais geral de representar a agência em contextos deônticos, tem sido bastante discutida e continua sendo uma área de ativo interesse.

O Problema Jurisdicional e a Necessidade de Agência[80]

Considere o seguinte:

(1) Jane Doe tem a obrigação de não fazer com que seu filho seja disciplinado.

(2) Jane Doe tem a obrigação de não fazer com que seu filho não seja disciplinado.

[79] A respeito dos quatro últimos problemas, McNamara (1996a, 1996b) fornece uma estrutura lógica e semântica para distinguir “dever” [must] de “dever” [ought], indiferença de opcionalidade, assim como representar o distinto idioma “o mínimo que você pode fazer” e analisar um sentido central de “superrogação”. Uma olhada rápida no esquema resultante, que, por simplicidade, pressupõe uma atmosfera em que não há conflitos, pode ser encontrada no documento suplementar A Framework for Common Sense Morality in Non-Conflict Contexts https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/aframework.html.

[80] A formulação seguinte do problema tem o status reconstrutivo da tradição deôntica na forma de um argumento ou problema mostrando explicitamente a inabilidade da LDS para representar obrigações agenciais. Argumentos explícitos para a necessidade de representar a agência à fim de representar obrigações agenciais são difíceis de encontrar. A referência mais antiga que encontrei que chega perto de formular o problema do modo que vem logo a seguir é Lindahl (1977, p. 94), que usa explicitamente a terminologia “não é da sua conta”. No entanto, tal formulação certamente era conhecida por Kanger e é justo dizer que era pressuposta por ele na sua análise sobre as noções direito-relacionadas assim como em seu artigo seminal (Kanger, 1971 [1957]). Cf. von Wright (1968). Cf. “Jane Doe is obligated to see to it that ___”. von Wright (1971).

Suponha que você tenha um filho. Para quase toda Jane Doe, (1) é verdadeira: ela é obrigada a não fazer com que seu filho seja disciplinado, pois isso não é da sua conta. Similarmente para (2): ela também é obrigada a não fazer com que seu filho não seja disciplinado, pois fazer isso também não é da sua conta. Como podemos representar isso na LDS? Suponha que tentemos ler a OB da LDS como "Jane Doe tem a obrigação de fazer com que"; sendo assim, como expressamos (1) e (2)? O mais perto que podemos chegar é:

(1') $\neg OBp$

(2') $\neg OB\neg p$

Mas isso não funciona. Coletivamente, (1') e (2') equivalem a dizer que duas obrigações estão ausentes: que não é obrigatório que Jane Doe faça com que seu filho seja disciplinado e que não é obrigatório que ela faça com que seu filho não seja disciplinado. Mas isso é compatível com o caso de (1) e (2) serem falsas. Afinal de contas, suponha que você é Jane Doe, a mãe solteira do seu filho. Então, numa dada situação, pode ser o caso que você, a única guardiã da criança, seja tanto permitida a fazer com que o seu filho seja disciplinado quanto permitida a fazer com que seu filho não seja disciplinado, caso em que (1) e (2) são falsas. Essas permissões parecem, de fato, ser equivalentes às negações de (1) e (2). Mas a falsidade de (1) (e a primeira permissão) implica a verdade de (2') na presente leitura, e a falsidade de (2 (e a segunda permissão) implica a verdade de (1) na presente leitura. Portanto, claramente (1) e (1') não são equivalentes, assim como (2) e (2').

Alternativamente, na leitura proposta de OB, mudar os sinais de negação de fora para a direita dos operadores em (1') e (2') nos dará apenas este par conflitante:

(1") $OB\neg p$

(2") $OB\neg\neg p$

que são candidatos incapazes de simbolizar (1) e (2), que não conflitam um com o outro. Considere, também, esta equivalência tradicional:

$$IMp \leftrightarrow OB\neg p$$

Se lermos "OB" como tendo agência incorporada, presumivelmente iremos querer fazer o mesmo para os outros operadores, de modo que IMp será lido como "é impermissível para Jane Doe fazer com que p”. No entanto, isso torna inválida a implicação da esquerda para a direita da equivalência acima, pois pode ser verdadeiro que é impermissível para mim disciplinar o seu filho, mas falso que é obrigatório para mim cuidar para que seu filho seja positivamente disciplinado. A questão deve ser deixada por sua conta.

Diante disso, os “não”s em (1) e (2) não são externos aos operadores deônticos, por assim dizer, e nem estão operando diretamente sobre p; pelo contrário, eles pertencem à agência de Jane Doe em relação a p. Eles vem “entre” um elemento deôntico e um elemento agencial, de modo que ler OB como uma fusão de um operador deôntico e agencial não permite a “inserção” de nenhuma negação. Portanto, se quisermos representar obrigações agenciais como as de (1) e (2), simplesmente parece que devemos ter alguma representação explícita para a agência.

Uma estrutura de agência Kangeriana simples

Introduzamos um operador standard para esse elemento faltante.

FQ: Jane Doe faz com que _.[81]

Assim, as relações seguintes expressando uma posição simples do agente a respeito de uma proposição p, claramente devem ser distinguidas:

FQp: Jane Doe faz com que p

$FQ\neg p$: Jane Doe faz com que $\neg p$

$\neg FQp$: Jane Doe não faz com que p

$\neg FQ\neg p$: Jane Doe não faz com que $\neg p$

Obviamente, se nenhuma das duas primeiras é verdadeira [hold], então a conjunção das duas últimas é verdadeira [holds]. Em tal caso, devemos dizer que Jane Doe é passiva a respeito de p, ou, mais adequadamente, passiva a respeito de ela própria fazer com que p, ou sua negação.[82] Introduzamos tal operador:

[81]“E” é normalmente usada para este operador. Com dois ou mais agentes, precisaríamos representar agentes explicitamente: FQsp, FQs’p, etc.

[82]Esta terminologia de “passividade”, embora seja usada em outros lugares, talvez não seja ideal e não deve ser vista como uma análise séria da passividade per se, pois alguém pode fazer com que x, sendo que x não é nem uma proposição nem a sua negação e, mesmo assim, ser bastante influente a respeito da proposição em questão (e.g., aumentando a probabilidade, intencionalmente e ativamente, sem fazer com que ela realmente aconteça) tornando a expressão mais longa e complicada.

$$PVp =_{def} \neg FQp \wedge \neg FQ\neg p$$

Temos aqui outro conjunto potencial de operadores modais e podemos introduzir análogos ao nosso esquema definicional tradicional para operadores modais aléticos e deônticos do seguinte modo:

$$EXp =_{def} FQ\neg p$$

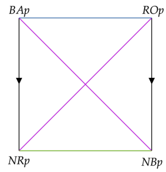
$$NEp =_{def} \neg FQ\neg p$$

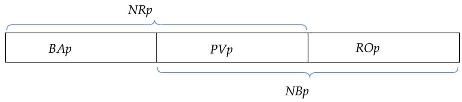
$$NFp =_{def} \neg FQp$$

$$PVp =_{def} \neg FQp \wedge \neg FQ\neg p$$

A primeira diz que é excluído que p, pelo que o nosso agente faz, se, e somente se, nosso agente faz com que $\neg p$. Note que esta noção não se aplica a todas as coisas que são excluídas per se, mas somente àquelas que são especificamente excluídas pelo exercício da agência do nosso agente. Portanto, contradições, negações de leis da natureza e de eventos passados não são excluídos pelo que o agente faz agora. A segunda diz que, não é excluído que p, por nada do que o nosso agente faz se, e somente se, ele não faz com que $\neg p$. Leis da lógica (que são necessariamente não-excluídas) assim como contradições (que são necessariamente excluídas) não são coisas excluídas pelo nosso agente. A terceira diz que nosso agente não faz com que p (p não é não-excluído por nada do que o nosso agente faz) se, e somente se, é falso que o nosso agente faz com que p. Isso, obviamente, é compatível com p ser válido [holding] por alguma outra razão, tal como p ser uma lei da lógica ou da natureza ou porque p é válido devido ao exercício da agência de alguma outra pessoa. A quarta diz que o nosso agente é passivo a respeito de p (não faz nada que determine o status de p) se, e somente se, nosso agente não faz com que p e nem exclui p por aquilo que ele faz (se faz algo). Novamente, isso não se segue do fato de que o nosso agente deixa algo em aberto que o é per se. PVp é consistente com o fato de estar fixado que p e com o fato de estar fixado que $\neg p$, desde que p não seja fixado por nada do que o nosso agente tenha feito. Pretende-se que todas essas noções tenham uma forte leitura agencial.

É bastante plausível pensar que os primeiros cinco operadores agenciais satisfazem a condição do quadrado tradicional e do esquema tríplice de classificação:





Neste último caso, por exemplo, para toda agente Jane Doe e para qualquer proposição p, ou Doe faz com que p ou Doe faz com que $\neg p$ ou Doe não faz nenhuma dessas alternativas e, além disso, não mais do que uma dessas três alternativas pode ser válida [hold] (i.e., as três são mutuamente exclusivas e conjuntamente exaustivas). Voltaremos a isso daqui a pouco.

Praticamente todas as abordagens deste operador satisfazem a regra,

Se $p \leftrightarrow q$ é um teorema, então $FQp \leftrightarrow FQq$ (FQ-RE),

e o esquema,

$FQp \rightarrow p$ (FQ-V)

(se um agente faz com que p, então p é verdadeiro [holds] - cláusula do "sucesso") e o esquema,

$(FQp \wedge FQq) \rightarrow FQ(p \wedge q)$ (FQ-C)[83]

Também é opinião majoritária que este operador satisfaz o esquema:

$\neg FQ\top$ (FQ-NO)

[83] Onde lemos o antecedente como implicando que FQp e FQq, ambos são agora verdadeiros [hold].

Considere novamente:

$$\begin{array}{ll} \text{(1) } FQp & \text{(1') } \neg FQp \\ \text{(2) } FQ\neg p & \text{(2') } \neg FQ\neg p \end{array}$$

e considere emparelhá-los um com o outro. Suprimidos devido à comutatividade da conjunção, temos seis combinações:

a) $FQp \wedge FQ\neg p$	(Contradição, dado o axioma FQ-V)
b) $FQp \wedge \neg FQp$	(Contradição CP)
c) $FQp \wedge \neg FQ\neg p$	(A segunda cláusula é implicada pela primeira)
d) $FQ\neg p \wedge \neg FQp$	(A segunda cláusula é implicada pela primeira)
e) $FQ\neg p \wedge \neg FQ\neg p$	(Contradição CP)
f) $\neg FQp \wedge \neg FQ\neg p$	(i.e., PVp)

Lembre que, devido ao axioma FQ-V, (1) implica (2') e (2) implica (1'). Assim, os três seguintes status, para uma proposição p e um agente s, são os únicos pares que permanecem (redundâncias também são eliminadas):

$$FQp$$

$$FQ\neg p$$

$$PVp$$

Por razões já aludidas anteriormente, usando os princípios acima, é fácil provar que essas três noções (considerando um agente e uma proposição p) são mutuamente exclusivas e conjuntamente exaustivas, como antecipamos.[84]

Está para além do escopo deste ensaio investigar a não-superficialidade na lógica da agência.[85] Aqui, mal tocamos na interação mais complexa dessas lógicas com as lógicas deônticas mantendo o componente agencial extremamente simples.

[84] Outro operador de interesse pré-teórico considerável é brevemente discutido no documento suplementar Inaction versus Refraining/Forebearing https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/inaction.html.

[85] Veja, por exemplo, as seguintes fontes: Segerberg (1982, 1997); Elgesem (1993); Hilpinen (1997a, 1997b); Belnap (2001).

A Redução Meinong-Chisholm: Uma Receita Simples Para Obrigações Agenciais (Chisholm, 1964)[86]

Deixemos de lado o problema jurisdicional como tendo estabelecido a necessidade de se ir além da LDS para representar obrigações agenciais. Retornando às questões deônticas, o seguinte problema se coloca: como nós representamos, não apenas a agência, mas a obrigação agencial? Com um operador de agência em mãos, podemos agora invocar a famosa "Redução Meinong-Chisholm": a ideia de que a obrigação de Jane Doe para fazer alguma coisa é equivalente ao que é obrigatório que Jane faça (cf. what Jane ought to do is what it ought to be that Jane does). Se organizarmos isso usando nosso operador para a agência, teremos a seguinte versão da "redução":

Meinong-Chisholm Reduction: Jane Doe é obrigada a fazer com que p sse é obrigatório que Jane Doe faça com que p.

As vezes isso é tomado como sendo uma redução da obrigação pessoal para a obrigação e agência impessoal (ou é reformulado como uma redução do "deve fazer" pessoal para o "deve ser" impessoal).[87] Embora não seja incontestável (e.g., Horty, 2001), ao fiar-se nesta análise parece que temos um modo de representar as sentenças problemáticas (1) e (2) do problema jurisdicional:

(1") $OB\neg BAp$

(2") $OB\neg BA\neg p$

Isso pode ser interpretado como afirmando que Jane Doe é positivamente obrigada a não fazer com que p e que ela também é positivamente obrigada a não fazer com que $\neg p$. Aqui, podemos expressar propriamente o fato de que ela é positivamente obrigada a ser não-agencial com respeito ao status de p e $\neg p$. Isso é facilmente distinguido das afirmações de que Jane Doe não é obrigada a fazer com que p (i.e., $\neg OBFQp$) e que ela não é obrigada a fazer com que $\neg p$ (i.e., $\neg OBFQ\neg p$). Considerações similares são válidas para a nossa equivalência anterior $IMp \leftrightarrow OB\neg p$.

[86]Meinong (1972 [1917]). Chisholm (1964). Chisholm (1964) também atribui o endosso da ideia a Nicolai Hartman.

[87]De maneira mais geral, isso pode ser visto como uma redução de um operador deôntico agencial para um operador deôntico não-agencial (mas não necessariamente um operador impessoal) e um operador de agência não-deôntico (Krogh e Herrestad (1996)).

De forma geral, se substituirmos "FQp" por p nas equivalências do esquema definicional tradicional, temos:

$$IMFQp \leftrightarrow OB\neg FQp$$

$$PEFQp \leftrightarrow \neg OB\neg FQp$$

$$OMFQp \leftrightarrow \neg OBFQp$$

$$OPFQp \leftrightarrow \neg OBFQp \wedge \neg OB\neg FQp$$

Agora, se lermos cada operador deôntico como "é ___para Jane Doe que", de modo impessoal mas não agencial, o problema anterior com $IMp \leftrightarrow OB\neg p$, juntamente com a tentativa de ler a agência nos operadores deônticos, desaparece. Pois o composto deôntico-agencial capta as coisas corretamente: é impermissível que Jane Doe faça com que seu filho seja disciplinado sse é obrigatório para Jane Doe que ela não faça com que seu filho seja disciplinado. Podemos agora expressar clara e distintivamente a ideia de que algo está simplesmente fora da jurisdição de Jane Doe.

Essa abordagem geral para obrigações tem sido amplamente empregada na lógica deôntica.[88]

Krogh e Herrestad (1996) reinterpretam a análise de tal modo que o operador deôntico é pessoal, mas não agencial. Argumentativamente, isso é um modo mais plausível de preservar uma análise componencial da obrigação agencial. McNamara (2004a) também defende que uma pessoa ser obrigada a ser de modo tal para que certa condição seja verdadeira [holds] (e.g., ser obrigada a estar em casa ao meio dia, como prometido) é o idioma mais

[88]Veja, por exemplo, Porn (1970, 1977, 1989); Kanger, (1971 [1957]); Lindahl (1977); Horty (1986); Jones e Sergot (1996); Santos e Carmo (1996); Belnap (2001). Como indicado anteriormente, Horty (1996, 2001) é interessante (entre outras coisas) pelo seu argumento contra a redução Meinong-Chisholm e por fornecer uma análise não-componencial alternativa da obrigação agencial no contexto de uma análise [branching-time] da agência. McNamara (2004b) fornece uma rápida exposição informal da estrutura básica. Tal exposição contrasta com a abordagem [branching-time] aos contextos deônticos de Belnap (2001) (com Paul Bartha), em que a obrigação agencial é um componente composto de um operador de agência e de um operador de obrigação (operador este analisável através da redução Anderson-Kangeriana). Outra alternativa para a grande tendência acima, que infelizmente iria nos desviar muito do escopo do presente ensaio, é a adaptação da lógica modal para representar programas de computador (e.g., lógica dinâmica) para representar ações na lógica deôntica. Uma fonte clássica aqui é Meyer (1998) que combina uma abordagem da lógica dinâmica à ação com uma adaptação da redução Anderson-Kangeriana para gerar noções deônticas. Veja, também, Segerberg (1982).

básico; e ser obrigado a fazer com que x, é simplesmente ser obrigado ser de modo tal que se faça com que x.

Um Vislumbre da Teoria das Posições Normativas (Kanger, 1971 [1957])

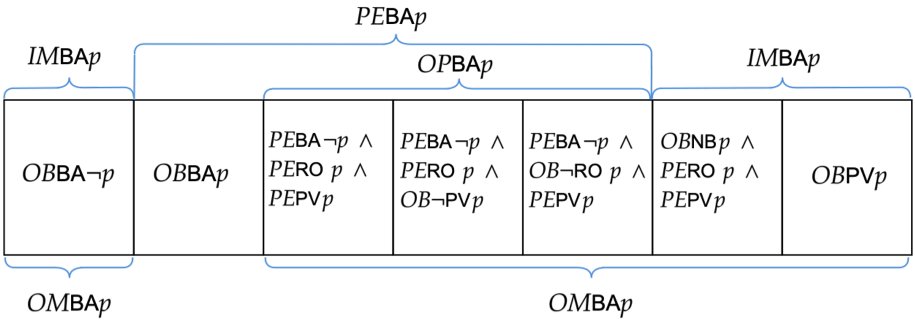
Um modo em que a análise Meinong-Chisholm tem sido empregada de maneira frutífera é no estudo do que é chamado de "posições normativas". Um conjunto de posições normativas pretende descrever o conjunto de todas as posições possíveis mutuamente exclusivas e conjuntamente exaustivas em que uma pessoa, ou conjunto de pessoas, pode estar a respeito de um conjunto seleto de noções normativas primitivas e um conjunto de operadores agenciais. Para uma dada proposição p, relembre da divisão a respeito de como Jane Doe pode ser posicionada agencialmente a respeito de p:

$$(FQp \vee EXp \vee PV) \wedge \neg(FQp \wedge EXp) \wedge \neg(FQp \wedge PVp) \wedge \neg(EXp \wedge PVp)$$

Relembre, também, nossa divisão a respeito das obrigações:

$$(OBp \vee IMp \vee OPp) \wedge \neg(OBp \wedge IMp) \wedge \neg(OBp \wedge OPp) \wedge \neg(IMp \wedge OPp)$$

Podemos "fundir" essas duas divisões, tal como estão, e tentar conseguir uma representação dos modos possíveis pelos quais Jane Doe pode ser posicionada normativamente a respeito da sua agência sobre p. Dadas certas escolhas da lógica para BA e para OB, podemos ter um conjunto de "posições normativas" mutuamente exclusivas e exaustivas para Jane Doe a respeito de p, os status normativos básicos OB e o operador de agência básico BA, tal como aparece abaixo:



Como de costume, a divisão acima tem como objetivo afirmar que as sete classes seguintes são mutuamente exclusivas e conjuntamente exaustivas:

$$
\begin{array}{ll}
OBBA\neg p & \\
OBFQp & \\
PEFQp \wedge PEROp \wedge PEPVp & (\neg OB\neg FQp \wedge \neg OB\neg FQ\neg p \wedge \neg OB\neg PVp) \\
PEFQp \wedge PEEXp \wedge OB\neg PVp & (\neg OB\neg FQp \wedge \neg OB\neg FQ\neg p \wedge OB\neg PVp) \\
PEFQp \wedge OB\neg EXp \wedge PEPVp & (\neg OB\neg FQp \wedge OB\neg FQ\neg p \wedge \neg OB\neg PVp) \\
OBNFp \wedge PEEXp \wedge PEPVp & (OB\neg FQp \wedge \neg OB\neg FQ\neg p \wedge \neg OB\neg PVp) \\
OBPVp & (OBNFp \wedge OBNEp, \text{ dado os axiomas } OB-C \wedge OB-M)
\end{array}
$$

Essa também tem sido uma área dinâmica de pesquisa que abordamos pouco aqui[89].[90]

O Dilema do Cumprimento de Obrigações (McNamara, 2004a)[91]

Obrigações podem ser cumpridas e violadas. Estes estão entre os traços mais característicos das obrigações. Costuma-se pensar que cumprimento e violação daquilo que é obrigatório são noções facilmente representadas na LDS do seguinte modo:

$OBp \wedge p$ (cumprimento)

$OBp \wedge \neg p$ (violação)

Chamemos isso de "Análise Standard". Agora, considere casos em que o próprio p é uma sentença agencial, digamos FQq, lido como Jane Doe faz com que q. A Análise Standard, portanto, implica:

$OBFQq \wedge FQq$ (cumprimento?)

$OBFQq \wedge \neg FQq$ (violação?)

Isso sugere que a obrigação de Doe a fazer com que q é cumprida sse ela faz com que q e é violada sse ela não faz. Mas se esta é a análise apropriada sobre o cumprimento de

[89]A teoria das posições normativas tem sido uma sub área importante e ativa desde a sua aparição no trabalho seminal de Stig Kanger (1971 [1957], 1972), que foi desenvolvida de forma mais abrangente por Lindahl (1977) e é, às vezes, referida como "a teoria Kanger-Lindahl". Ela tem sido usada em tentativas de analisar relações legais, como aquelas tornadas famosas por Hohfeld (1919). A teoria Kanger-Lindahl foi ainda mais desenvolvida por Jones e Sergot (1993), Sergot (1999) Herrestad e Krogh (1995) e Lindahl (2001). Veja também Allen (1996) para uma abordagem um pouco diferente às relações legais Hohfeldianas e Porn (1970 e 1977) para uma estrutura desenvolvida para analisar várias posições e relações sociais normativamente carregadas. Lindahl (2001) fornece uma excelente revisão e orientação sobre o trabalho de Kanger nesta área e vários problemas informando a pesquisa subsequente. (Outras contribuições relevantes de Kanger à lógica deôntica são discutidas por Hilpinen (2001b) do mesmo volume). Sergot (1999) leva o trabalho formal sobre as posições normativas a um novo nível de abstração e precisão, e o último trabalho de Lindahl mencionado acima, assim como Herrestad e Krogh, continua a exploração e o refinamento da estrutura conceitual Kanger-Lindahl para adaptá-la melhor à análise das noções legais.

[90]Um outro problema a respeito da Redução Meinong-Chisholm pode ser encontrado no documento suplementar Deontic Complements https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/deonticcomplements.html.

[91]Embora o puzzle/dilema como tal não esteja em Krogh e Herrestad (1996), o problema deriva desse artigo, em que eles notam que as obrigações podem ser suas e, ainda assim, serem cumpridas por outra pessoa. Eles usam essa distinção para oferecer uma solução para o Problema de Leakage (abaixo).

obrigações, então é difícil ver como alguém mais poderia cumprir nossas obrigações quando nós mesmos não as cumprimos, pois nossas obrigações não seriam cumpridas e violadas de acordo com a Análise Standard. Mas as pessoas certamente podem cumprir obrigações de outras pessoas e quando elas o fazem, parece se seguir que nossas obrigações são cumpridas. Assim, a questão se torna: o que é obrigatório? Parece que não pode ser que o que é obrigatório é que Jane Doe faça com que p, pois isso é incoerente com dizer que alguém outro faz com que p, a menos que digamos que alguém outro faça com que Jane Doe faça com que p; mas esse dificilmente é o modo usual pelo qual cumprimos obrigações de outros. Posso devolver o seu livro na biblioteca por você, cumprindo, desse modo, uma de suas obrigações sem fazer com que você mesmo devolva o livro te apontando uma arma, digamos. Portanto, enfrentamos um dilema:

> Dado que outros às vezes podem cumprir nossas obrigações: ou nossas obrigações não são sempre nossas obrigações, e, assim, obrigações pessoais não precisam ser agenciais, ou o cumprimento de obrigações é mais complexo do que do que se pensava anteriormente; e talvez ambos.[92]

4.8 Desafios Sobre a Obrigação, Mudança e Tempo

Embora tenhamos visto que obrigações podem ser obrigações para ser (i.e., para satisfazer uma condição) assim como obrigações para fazer, e que a primeira pode ser um caso especial da última, é plausível pensar que alguém é obrigado a fazer algo somente se este algo está no futuro. Assim, mesmo se tentativas de resolver o Paradoxo da Contrariedade ao Dever de Chisholm invocando tempo não parecerem muito plausíveis, isso não significa que não há trabalho interessante a ser feito para moldar as relações entre tempo e obrigações. Por exemplo, considere o sistema Kd. Se lermos d atemporalmente como todas as obrigações passadas presentes e futuras cumpridas, então os únicos mundos relevantes são tão ideais que nunca houve uma única violação de uma norma obrigatória. Mas, como pai, posso estar obrigado a trancar a porta da frente a noite mesmo que isso não seja uma norma a menos que tenha havido violações passadas de outras normas (e.g., contra roubo e assassinato). As pessoas também adquirem obrigações ao longo do tempo, criam-nas para

[92] Um problema relacionado pode ser encontrado no documento suplementar The Leakage Peoblem https://plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/theleakage.html.

si mesmas e para outros através de suas ações, desobrigam, etc.[93]

5. Conclusão

Como podemos ver, há uma certa quantia de problemas excepcionais para a lógica deôntica. Alguns vêem isso com um sério defeito; outros vêem isso apenas como um sério desafio, até mesmo atraente. Há alguma razão antecedente para esperar que os desafios serão grandes nesta área. A normatividade é, em geral, desafiadora, não apenas na lógica deôntica. As noções normativas parecem ter características semânticas e pragmáticas marcantes. Noções normativas devem ser combinadas com noções para a agência e com noções temporais para ser de interesse máximo - o que introduz complexidade lógica considerável. Também há razão para pensar que existem complexidades escondidas na interação das noções normativas e condicionais. Finalmente, parece haver uma grande variedade de noções normativas com interações interessantes, algumas facilmente confundidas com outras (por eticistas assim como por lógicos deônticos). Claramente, há muito trabalho a ser feito.

Referências Bibliográficas

Azizah Y al Hibri. Deontic logic: A comprehensive appraisal and a new proposal. 1978.

Carlos E Alchourrón. Philosophical foundations of deontic logic and the logic of defeasible conditionals. In *Deontic logic in computer science: normative system specification*, pages 43–84. 1994.

Carlos E Alchourrón. Detachment and defeasibility in deontic logic. *Studia Logica*, 57(1): 5–18, 1996.

Carlos E.. Alchourron and Eugenio Bulygin. *Normative Systems*. Springer-Verlag, 1971.

[93]Dois clássicos sobre tempo e lógica deôntica são Thomason (1981b) e (1981a), em que interações temporais e deônticas são discutidas, incluindo uma distinção frequentemente invocada entre deveres deliberativos (deveres futuro-orientados / decisão-orientados) versus deveres de juízos (deveres passado, presente ou futuro orientados de uma perspectiva puramente avaliativa ao invés de ação-orientadas). (Cf. a noção de "disposição" [cues] para a ação em van Eck (1982)). Outros trabalhos anteriores importantes são Loewer e Belzer (1983), van Eck (1982) Åqvist e Hoepelman (1981 e Chellas (1969). Para uma amostra de algum trabalho recente, veja Bailhache (1998) e suas referências a trabalhos anteriores, assim como Brown (1966b) para uma tentativa de desenvolver uma lógica diacrônica das obrigações, representando as obrigações que virão a ser, sendo validadas ao longo do tempo, onde, por exemplo, alguém pode ter uma obrigação de fazer com que p somente se p é (agora) falso.

Carlos E ALCHOURRÓN and Eugenio BULYGIN. he expressive conception of norms. new essays in deontic logic. ed. risto hilpinen. dordrecht/boston/london: Reidel. 95–124. porary sociology. eds. *Ann Denis & Deborah Kalekin-Fishman. Londres: SAGE*, pages 58–73, 1981.

Carlos E Alchourrón and David Makinson. Hierarchies of regulations and their logic. In *New studies in deontic logic*, pages 125–148. Springer, 1981a.

CE Alchourrón and David Makinson. New studies in deontic logic. 1981b.

Layman E Allen. From the fundamental legal conceptions of hohfeld to legal relations: Refining the enrichment of solely deontic legal relations. In *Deontic Logic, Agency and Normative Systems*, pages 1–26. Springer, 1996.

Alan Ross Anderson. The formal analysis of normative systems. 1956.

Alan Ross Anderson. A reduction of deontic logic to alethic modal logic. *Mind*, 67(265): 100–103, 1958.

Alan Ross Anderson. Some nasty problems in the formal logic of ethics. *Noûs*, pages 345–360, 1967.

Lennart Åqvist. Good samaritans, contrary-to-duty imperatives, and epistemic obligations. *Noûs*, 1(4):361–379, 1967.

Lennart Åqvist. Deontic logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 147–264. Springer, 2002.

Lennart Åqvist and Jaap Hoepelman. Some theorems about a "tree" system of deontic tense logic. In *New studies in deontic logic*, pages 187–221. Springer, 1981.

Nicholas Asher and Daniel Bonevac. Prima facie obligation. *Studia Logica*, 57(1):19–45, 1996.

Patrice Bailhache. How to mix alethic, deontic, temporal, individual modalities. *Logica trianguli*, 2:3–16, 1998.

Nuel Belnap, Michael Perloff, and Ming Xu. *Facing the future: agents and choices in our indeterminist world*. Oxford University Press, 2001.

Daniel Bonevac. Against conditional obligation. *Noûs*, 32(1):37–53, 1998.

Gerhard Brewka. Nonmonotonic logics–a brief overview. *AI Communications*, 2(2):88–97, 1989.

Mark A Brown. Doing as we ought: Towards a logic of simply dischargeable obligations. In *Deontic logic, agency and normative systems*, pages 47–65. Springer, 1996a.

Mark A Brown. A logic of comparative obligation. *Studia Logica*, 57(1):117–137, 1996b.

Jose Carmo and Mark A Brown. *Deontic Logic, Agency and Normative Systems*. Springer, 1996.

José Carmo and Andrew JI Jones. Deontic logic and contrary-to-duties. In *Handbook of philosophical logic*, pages 265–343. Springer, 2002.

Hector-Neri Castaneda. The paradoxes of deontic logic: the simplest solution to all of them in one fell swoop. In *New studies in deontic logic*, pages 37–85. Springer, 1981.

Brian F Chellas. Conditional obligation. In *Logical theory and semantic analysis*, pages 23–33. Springer, 1974.

Brian F Chellas. *Modal logic: an introduction*. Cambridge university press, 1980.

Brian Farrell Chellas. *The logical form of imperatives*. Stanford University, 1969.

Roderick M Chisholm. Contrary-to-duty imperatives and deontic logic. *Analysis*, 24(2):33–36, 1963a.

Roderick M Chisholm. Supererogation and offence: A conceptual scheme for ethics. *Ratio (Misc.)*, 5(1), 1963b.

Roderick M Chisholm. The ethics of requirement. *American Philosophical Quarterly*, 1(2): 147–153, 1964.

Newton CA Da Costa and Walter A Carnielli. On paraconsistent deontic logic. *Philosophia*, 16(3):293–305, 1986.

Sven Danielsson. *Preference and obligation, studies in theelogic of ethics*. PhD thesis, Filosofiska Färeningen, 1968.

Judith Wagner DeCew. Conditional obligation and counterfactuals. *Journal of Philosophical Logic*, 10(1):55–72, 1981.

Dag Elgesem. *Action theory and modal logic*. PhD thesis, Institut for filosofi, Det historisk-filosofiske fakultetet, Universitetet i ..., 1993.

Dag Elgesem. The modal logic of agency. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1997.

Fred Feldman. *Doing the best we can: An essay in informal deontic logic*, volume 35. Springer Science & Business Media, 1986.

Jens Erik Fenstad, Ivan Timofeevich Frolov, and Risto Hilpinen. *Logic, methodology and philosophy of science VIII*. Elsevier, 1989.

Dagfinn Føllesdal and Risto Hilpinen. Deontic logic: An introduction. In *Deontic logic: Introductory and systematic readings*, pages 1–35. Springer, 1970.

Dagfinn Føllesdal, Risto Hilpinen, and R HILPINEN. Deontic logic: Introductory and systematic readings. d, 1971.

James William Forrester. Gentle murder, or the adverbial samaritan. *The Journal of Philosophy*, 81(4):193–197, 1984.

Dov Gabbay and John Woods. The handbook of the history of logic, vol. 7: Logic and the modalities in the twentieth century. 2006.

Dov M Gabbay and Franz Guenthner. Handbook of philosophical logic. 2002.

Lou Goble. A logic of ”good, should”, and ”would”: Part ii. *Journal of Philosophical Logic*, pages 253–276, 1990.

Lou Goble. Murder most gentle: the paradox deepens. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 64(2):217–227, 1991.

Lou Goble. Preference semantics for deontic logic part i—simple models. *Logique et Analyse*, pages 383–418, 2003.

Lou Goble. A logic for deontic dilemmas. *Journal of Applied Logic*, 3(3-4):461–483, 2005.

Lou Goble. The blackwell guide to philosophical logic. *Studia Logica*, 84(1), 2006.

Lou Goble and John-Jules Ch Meyer. *Deontic Logic and Artificial Normative Systems: 8th International Workshop on Deontic Logic in Computer Science, DEON 2006, Utrecht, The Netherlands, July 12-14, 2006, Proceedings*, volume 4048. Springer, 2006.

Holly S Goldman. Dated rightness and moral imperfection. *The Philosophical Review*, 85(4): 449–487, 1976.

Christopher W Gowans. *Moral dilemmas*. Oxford University Press on Demand, 1987.

Patricia S Greenspan. Conditional oughts and hypothetical imperatives. *The Journal of Philosophy*, 72(10):259–276, 1975.

Jörg Hansen. Problems and results for logics about imperatives. *Journal of Applied logic*, 2 (1):39–61, 2004.

Jörg Hansen. *Imperatives and Deontic Logic: On the Semantic Foundations of Deontic Logic*. PhD thesis, University of Leipzig., 2008.

Bengt Hansson. An analysis of some deontic logics. *Nous*, pages 373–398, 1969.

Sven Ove Hansson. Preference-based deontic logic (pdl). *Journal of Philosophical Logic*, 19 (1):75–93, 1990.

Sven Ove Hansson. *The structure of values and norms*. Cambridge University Press, 2001.

Ingemar Hedenius. *Om rätt och moral*, volume 5. Wahlström & Widstrand, 1963.

Henning Herrestad and Christen Krogh. Obligations directed from bearers to counterparts. In *Proceedings of the 5th international conference on Artificial intelligence and law*, pages 210–218, 1995.

Risto Hilpinen. On action and agency. In *Logic, action and cognition*, pages 3–27. Springer, 1997a.

Risto Hilpinen. On states, actions, omissions and norms. In *Contemporary Action Theory Volume 1: Individual Action*, pages 83–107. Springer, 1997b.

Risto Hilpinen. Stig kanger on deontic logic. In *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work*, pages 131–149. Springer, 2001.

Jaakko Hintikka. Some main problems of deontic logic. In *Deontic logic: Introductory and systematic readings*, pages 59–104. Springer, 1970.

Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka. *Quantifiers in deontic logic*. Societas Scientiarum Fennica, 1957.

Wesley Newcomb Hohfeld. *Fundamental legal conceptions as applied in judicial reasoning: and other legal essays*. Yale University Press, 1923.

Ghita Holmström-Hintikka, Sten Lindström, and Rysiek Sliwinski. *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work*, volume 303. Springer Science & Business Media, 2001.

John F Horty. Moral dilemmas and nonmonotonic logic. *Journal of philosophical logic*, 23(1): 35–65, 1994.

John F Horty. Agency and obligation. *Synthese*, 108(2):269–307, 1996.

John F Horty. *Agency and deontic logic*. Oxford University Press, 2001.

John F Horty. Reasoning with moral conflicts. *Noûs*, 37(4):557–605, 2003.

Pörn Ingmar. The logic of power, 1970.

Frank Jackson. On the semantics and logic of obligation. *Mind*, 94(374):177–195, 1985.

Frank Jackson and JEJ Altham. Understanding the logic of obligation. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, 62:255–283, 1988.

Frank Jackson and Robert Pargetter. Oughts, options, and actualism. *The Philosophical Review*, 95(2):233–255, 1986.

Andrew JI Jones. Deontic logic and legal knowledge representation. *Ratio Juris*, 3(2):237–244, 1990.

Andrew JI Jones and Ingmar Pörn. Ideality, sub-ideality and deontic logic. *Synthese*, pages 275–290, 1985.

Andrew JI Jones and Ingmar Pörn. ’ought’ and ’must’. *Synthese*, pages 89–93, 1986.

Andrew JI Jones and Marek Sergot. A formal characterisation of institutionalised power. *Logic Journal of the IGPL*, 4(3):427–443, 1996.

Andrew JI Jones, Marek Sergot, et al. On the characterisation of law and computer systems: The normative systems perspective. *Deontic logic in computer science: normative system specification*, pages 275–307, 1993.

Jørgen Jørgensen. Imperatives and logic. *Erkenntnis*, 7:288–296, 1937.

Hans Kamp. Semantics versus pragmatics. In *Formal semantics and pragmatics for natural languages*, pages 255–287. Springer, 1978.

Hans Kamp. Free choice permission. In *Meaning and the Dynamics of Interpretation*, pages 169–184. Brill, 2013.

Stig Kanger. New foundations for ethical theory. In *Deontic logic: Introductory and systematic readings*, pages 36–58. Springer, 1970.

Stig Kanger. Law and logic. *Theoria*, 38(3):105–132, 1972.

Ruth M Kempson. *Semantic theory*. Cambridge University Press, 1977.

Simo Knuuttila. The emergence of deontic logic in the fourteenth century. In *New studies in deontic logic*, pages 225–248. Springer, 1981.

Christen Krogh and Henning Herrestad. Getting personal some notes on the relationship between personal and impersonal obligation. In *Deontic logic, agency and normative systems*, pages 134–153. Springer, 1996.

Dana Lemmon, Edward John Scott. *The "Lemmon Notes": An Introduction to Modal Logic*. Basil Blackwell, 1977.

Edward J Lemmon. On sentences verifiable by their use. *Analysis*, 22(4):86–89, 1962a.

Edward John Lemmon. New foundations for lewis modal systems. *The Journal of Symbolic Logic*, 22(2):176–186, 1957.

Edward John Lemmon. Moral dilemmas. *The philosophical review*, 71(2):139–158, 1962b.

David Lewis. *Counterfactuals*. Blackwell, 1973.

David Lewis. Semantic analyses for dyadic deontic logic. In *Logical theory and semantic analysis*, pages 1–14. Springer, 1974.

Lars Lindahl. Position and change, dordrecht and boston: D, 1977.

Lars Lindahl. Stig kanger's theory of rights. In *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work*, pages 151–171. Springer, 2001.

Eva Ejerhed Sten Lindström. Logic, action and cognition: Essays in philosophical logic. 1997.

Barry Loewer and Marvin Belzer. Dyadic deontic detachment. *Synthese*, pages 295–318, 1983.

Alessio Lomuscio and Donald Nute. *Deontic Logic in Computer Science: 7th International*

Workshop on Deontic Logic in Computer Science, DEON 2004, Madeira, Portugal, May 26-28, 2004. Proceedings, volume 3065. Springer, 2004.

Benedikt Löwe, Wolfgang Malzkorn, and Thoralf Räsch. *Foundations of the Formal Sciences II: Applications of Mathematical Logic in Philosophy and Linguistics*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2003.

David Makinson. Five faces of minimality. *Studia Logica*, 52(3):339–379, 1993.

David Makinson and Leendert van der Torre. What is input/output logic? In *Foundations of the Formal Sciences II*, pages 163–174. Springer, 2003.

Ernst Mally. *Grundgesetze des Sollens: Elemente der Logik des Willwns*. Leuschner & Lubensky, 1926.

Ruth Barcan Marcus. Iterated deontic modalities. *Mind*, 75(300):580–582, 1966.

Ruth Barcan Marcus. Moral dilemmas and consistency. *The Journal of Philosophy*, 77(3): 121–136, 1980.

Ruth Barcan Marcus. More about moral dilemmas. 1996.

Edwin D Mares. Andersonian deontic logic. *Theoria*, 58(1):1–2, 1992.

Homer E Mason. *Moral dilemmas and moral theory*. Oxford University Press on Demand, 1996.

P McNamara and H Prakken. On a fundamental problem of deontic logic. *Norms, logics and information systems: New studies in deontic logic and computer science*, 49:29, 1999a.

P McNamara and H Prakken. Moral preference, contrary-to-duty obligation and. *Norms, Logics and Information Systems: New Studies in Deontic Logic and Computer Science*, 49:93, 1999b.

Paul McNamara. Making room for going beyond the call. *Mind*, 105(419):415–450, 1996a.

Paul McNamara. Must i do what i ought?(or will the least i can do do?). In *Deontic logic, agency and normative systems*, pages 154–173. Springer, 1996b.

Paul McNamara. Agency and deontic logic. *Mind*, 113(449):179–179, 2004a.

Paul McNamara. Agential obligation as non-agential personal obligation plus agency. *Journal of Applied Logic*, 2(1):117–152, 2004b.

Paul McNamara. Deontic logic. In *Handbook of the History of Logic*, volume 7, pages 197–288. Elsevier, 2006.

Paul McNamara and Henry Prakken. *Norms, Logics and Information systems: new studies in deontic logic and computer science*, volume 49. IOS press, 1999c.

Alexius Meinong. *On emotional presentation*. Northwestern University Press, 1972.

Abraham Irving Melden. *Essays in moral philosophy*. University of Washington Press, 1958.

John-Jules Ch Meyer and Roel J Wieringa. *Deontic logic in computer science: normative system specification*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.

John-Jules Ch Meyer et al. A different approach to deontic logic: deontic logic viewed as a variant of dynamic logic. *Notre Dame J. Formal Log.*, 29(1):109–136, 1988.

Alessio Moretti. The geometry of standard deontic logic. *Logica Universalis*, 3(1):19–57, 2009.

Michael Morreau. Prima facie and seeming duties. *Studia Logica*, 57(1):47–71, 1996.

Peter L Mott. On chisholm's paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 2(2):197–211, 1973.

PH Nowell-Smith and EJ Lemmon. Escapism: the logical basis of ethics. *Mind*, 69(275): 289–300, 1960.

D Nute. Defeasible deontic logic. synthese library (studies in epistemology, logic, methodology, and philosophy of science) 263. *Springer*, 10:978–94, 1997.

Ingmar Pörn. *Action Theory and Social Science*. Springer Library, 1977.

Ingmar Pörn. On the nature of a social order. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 126, pages 553–567. Elsevier, 1989.

Henry Prakken. Two approaches to the formalisation of defeasible deontic reasoning. *Studia Logica*, 57(1):73–90, 1996.

Henry Prakken and Marek Sergot. Contrary-to-duty obligations. *Studia Logica*, 57(1):91–115, 1996.

Henry Prakken and Marek Sergot. Dyadic deontic logic and contrary-to-duty obligations. In *Defeasible deontic logic*, pages 223–262. Springer, 1997.

A N Prior. Escapism: The logical basis of ethics. In *Essays in moral philosophy*, pages 135–146. University of Washington Press, 1958.

AN Prior. Formal logic, 1962.

Arthur N Prior. The paradoxes of derived obligation. *Mind*, 63(249):64–65, 1954.

Willard V Quine. *The ways of paradox and other essays*. Harvard Univ. Press, 1976.

Nicholas Rescher. *The logic of decision and action*. University of Pittsburgh Press, 1956.

Hilpinen Risto and L Goble. Deontic logic. *The Blackwell Guide to Philosophical Logic Blackwell*, 2001.

Alf Ross. Imperatives and logic. *Theoria*, 7, 1941.

W D Ross. Foundations of ethics. 1939.

Filipe Santos and José Carmo. Indirect action, influence and responsibility. In *Deontic Logic,* *Agency and Normative Systems*, pages 194–215. Springer, 1996.

Peter K Schotch and Raymond E Jennings. Non-kripkean deontic logic. In *New studies in deontic logic*, pages 149–162. Springer, 1981.

Krister Segerberg. A deontic logic of action. *Studia logica*, 41(2):269–282, 1982.

Krister Segerberg. Delta logic and brown's logic of ability. In *Logic, Action and Cognition*, pages 29–45. Springer, 1997.

Marek Sergot. Normative positions. *Norms, logics and information systems*, 49:289–308, 1999.

Walter Sinnott-Armstrong. A solution to forrester's paradox of gentle murder. *The journal of Philosophy*, 82(3):162–168, 1985.

Timothy Smiley. The logical basis of ethics. *Acta Philosophica Fennica*, 16:237–246, 1963.

Tina Smith. Violation of norms. In *Proceedings of the 4th international conference on Artificial intelligence and law*, pages 60–65, 1993.

Tina Smith. *Legal expert systems: discussion of theoretical assumptions*. Faculty of Law. University of Utrecht, 1994.

Sören Stenlund. *Logical theory and semantic analysis: essays dedicated to Stig Kanger on his fiftieth birthday*. Springer, 1974.

Richmond H Thomason. Deontic logic as founded on tense logic. In *New studies in deontic logic*, pages 165–176. Springer, 1981.

James E Tomberlin. Contrary-to-duty imperatives and conditional obligation. *Noûs*, pages 357–375, 1981.

Raimo Tuomela and Ghita Holmström-Hintikka. *Contemporary action theory*. Kluwer Academic, 1997.

James O Urmson. Saints and heroes. In *Essays in moral philosophy*, pages 198–216. 1958.

Leendert Van der Torre and Yao-Hua Tan. Two-phase deontic logic. *Logique et Analyse*, pages 411–456, 2000.

Leendert WN van der Torre and Yao-Hua Tan. The many faces of defeasibility in defeasible deontic logic. In *Defeasible deontic logic*, pages 79–121. Springer, 1997.

LWN van deTorre. *Reasoning about obligations: defeasibility in preference-based deontic logic*. PhD thesis, Tinbergen Institute. Erasmus University Rotterdam, 1997.

Jacobus Adrianus Van Eck. A system of temporally relative modal and deontic predicate logic and its philosophical applications 2. *Logique et analyse*, 25(100):339–381, 1982.

Bas C Van Fraassen. The logic of conditional obligation. In *Exact Philosophy*, pages 151–

172. Springer, 1973a.

Bas C Van Fraassen. Values and the heart's command. *The Journal of Philosophy*, 70(1): 5–19, 1973b.

Georg Henrik Von Wright. Deontic logic. *Mind*, 60(237):1–15, 1951.

Georg Henrik Von Wright. *An essay in modal logic*. Humanities Press, 1953.

Georg Henrik von Wright. A note on deontic logic and derived obligation. *Mind*, 65(260): 507–509, 1956.

Georg Henrik Von Wright. *Norm and action: a logical enquiry*. Humanities Press, 1963.

Georg Henrik Von Wright. *An essay in deontic logic and the general theory of action*. North Holland Publishing Company, 1968.

Georg Henrik Von Wright. A new system of deontic logic. In *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, pages 173–182. Springer, 1971.

Peter Vranas. In defense of imperative inference. *Journal of Philosophical Logic*, 39(1): 59–71, 2010.

Peter BM Vranas. New foundations for imperative logic i: Logical connectives, consistency, and quantifiers. *Noûs*, 42(4):529–572, 2008.

Sinnott-Armstrong Walter. *Moral Dilemmas*. Blackwell, Oxford, 1988.

BAO Williams and WF Atkinson. Ethical consistency. In *Aristotelian Society Supplementary Volume*, volume 39, 1965.

Sobre o Organizador e Tradutores

Organizador

Kherian Galvão Cesar Gracher é Bacharel em Filosofia (2008-12) pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP); Mestre em Filosofia (2014-16), sob orientação do Prof. Dr. Décio Krause; e Doutor em Filosofia (2016-20), também sob orientação do Prof. Dr. Décio Krause e sob coorientação do Prof. Dr. Newton C. A. da Costa, pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGFIL-UFSC). Atualmente, é Professor Colaborador e desenvolve pesquisa de Pós-Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PPGF-UFRJ), sob supervisão do Prof. Dr. Jean-Yves Béziau e financiado pela Fundação *Carlos Chagas Filho* de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).[1]

[1]Programa de Pós-Doutorado *Nota 10* (PDR10) – Processos: E-26/200.129/2022 e E-26/200.130/2022; Matrícula: 2021.04772.0

Tradutores

Mateus Rui é professor substituto na área de Lógica e Epistemologia do departamento de Filosofia na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Doutor em Filosofia pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Mestre em Filosofia pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel). Tem experiência na área de Filosofia, com ênfase em Epistemologia Formal, Bayesianismo, Teoria da Ação e da Escolha Racional. Bolsista CAPES, sob orientação do prof. Dr. Alexandre Meyer Luz, e coorientação do prof. Dr. Jonas Becker Arenhart. Foi membro de corpo editorial do periódico Seara Filosófica (UFPel).

Silvio Kavetski é Doutor em Filosofia na área de Ética e Filosofia Política pela Universidade Federal de Santa Catarina (2022), Mestre em Filosofia pela Universidade Federal de Santa Catarina (2017) e Graduado em Filosofia pela Universidade Estadual do Centro Oeste do Paraná (2014). Foi professor substituto do Instituto Federal do Mato Grosso do Sul (2023). Atua principalmente nas área de metaética e seus interesses de pesquisa incluem: teorias expressivistas, discussões em torno do Argumento da Terra Gêmea Moral, abordagens híbridas e o cognitivismo não-realista de Derek Parfit.

Sofia Abelha Meirelles é Bacharel em Filosofia (2017-2020) pela Universidade Federal de Santa Catarina e Mestre (2021-2022) em Filosofia na linha de Lógica e Filosofia da Ciência pela Universidade Estadual de Campinas. Atualmente é doutoranda em Filosofia pela Universidade de Viena, parte do projeto ”The Formal Turn – The Emergence of Formalism in Twentieth-Century Thought”. O atual foco de pesquisa é filosofia e história da lógica, com interesse também em filosofia da ciência, filosofia da matemática e epistemologia feminista.

Vítor M. Costa é licenciado e bacharel em História (2016) pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Mestre em Filosofia (2019) pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGFIL-UFSC), na área de Ontologia, e atualmente é doutorando em Filosofia pela mesma instituição, na área de Epistemologia e Lógica. Desenvolve pesquisa em Teoria e Filosofia da História, Filosofia da Ciência, Lógicas Modais (em particular lógicas temporais e epistêmicas), História da Filosofia Antiga e História da Historiografia.

Editora
UFPel

DISSERTATIO
FILOSOFIA