Halliday

Fundamentos de Física

Volume 1

gen
Grupo Editorial Nacional

LTC EDITORA

genIO
GEN | Informação Online

www.grupogen.com.br

http://gen-io.grupogen.com.br

O GEN | **Grupo Editorial Nacional** reúne as editoras Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, LTC, Forense, Método, E.P.U. e Forense Universitária

O GEN-IO | **GEN – Informação Online** é o repositório de material suplementar dos livros dessas editoras

www.**grupogen**.com.br

http://**gen-io.grupogen**.com.br

Capítulo 10

Rotação

10.2 As Variáveis da Rotação

Um **corpo rígido** é um corpo que gira com todas as partes ligadas entre si e sem mudar de forma.

Um **eixo fixo** é um eixo de rotação cuja posição não muda.

A patinadora Sasha Cohen em um movimento de rotação pura em torno de um eixo vertical. (*Elsa/Getty Images, Inc.*)

10.2 As Variáveis da Rotação

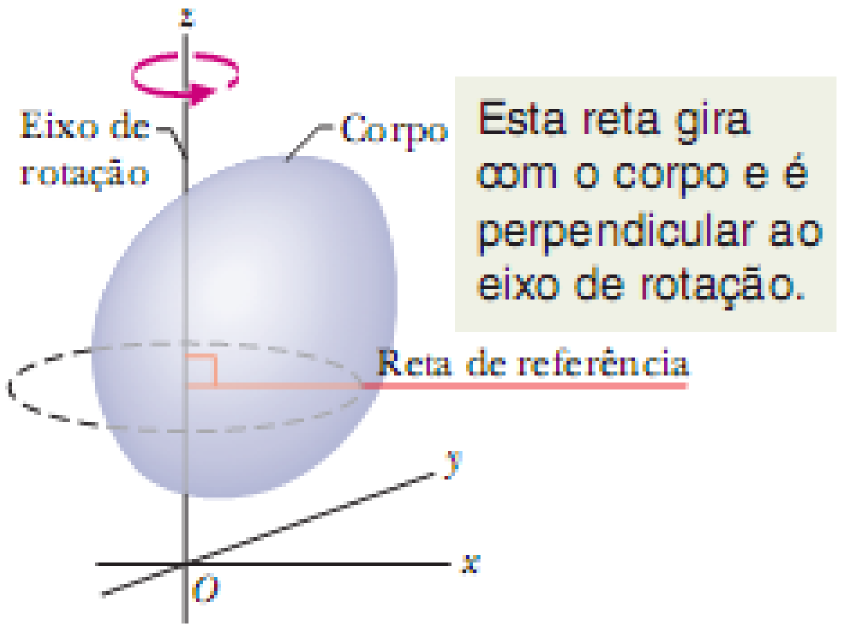


Figura 10-2 Um corpo rígido de forma arbitrária em rotação pura em torno do eixo z de um sistema de coordenadas. A posição da *reta de referência* em relação ao corpo rígido é arbitrária, mas a reta é perpendicular ao eixo de rotação e mantém sempre a mesma posição em relação ao corpo, girando com ele.

10.2 As Variáveis da Rotação: Posição Angular

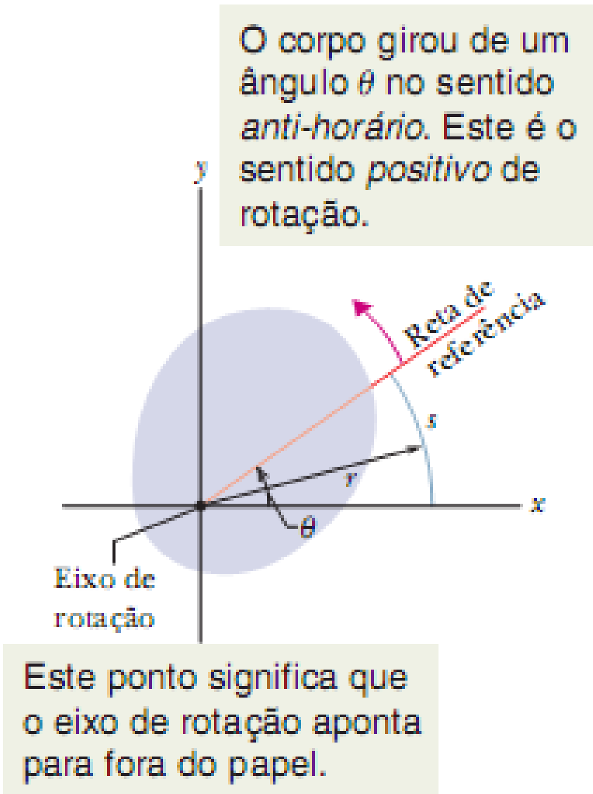


Figura 10-3 Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. O plano da seção transversal é perpendicular ao eixo de rotação, que agora está perpendicular ao plano do papel, saindo do papel. Nesta posição do corpo, a reta de referência faz um ângulo θ com o eixo x.

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

onde s é o comprimento de um arco de circunferência que vai do eixo x (posição angular zero) até a reta de referência, e r é o raio da circunferência.

Um ângulo definido desta forma é medido em **radianos (rad)**.

$$1 \text{ rev} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}3° = 0{,}159 \text{ rev}.$$

10.2 As Variáveis de Rotação: Deslocamento Angular

Se um corpo gira em torno de um eixo de rotação, com a posição angular da reta de referência variando de θ_1 para θ_2, o corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

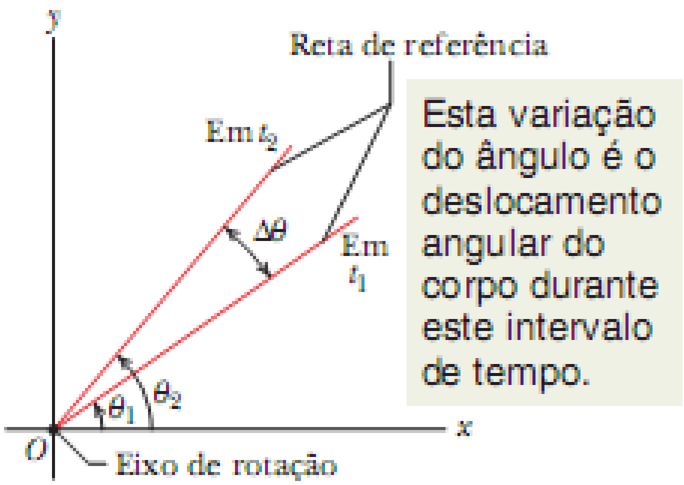


Figura 10-4 A reta de referência do corpo rígido das Figs. 10-2 e 10-3 está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. A grandeza $\Delta\theta$ ($= \theta_2 - \theta_1$) é o deslocamento angular que acontece no intervalo Δt ($= t_2 - t_1$). O corpo propriamente dito não aparece na figura.

Um deslocamento no sentido anti-horário é considerado positivo, e um deslocamento no sentido horário é considerado negativo.

10.2 As Variáveis de Rotação: Velocidade Angular

Suponha que um corpo em rotação está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. Definimos a **velocidade angular média** do corpo no intervalo de tempo Δt como

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

A **velocidade angular instantânea** ω é o limite dessa razão quando Δt tende a zero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

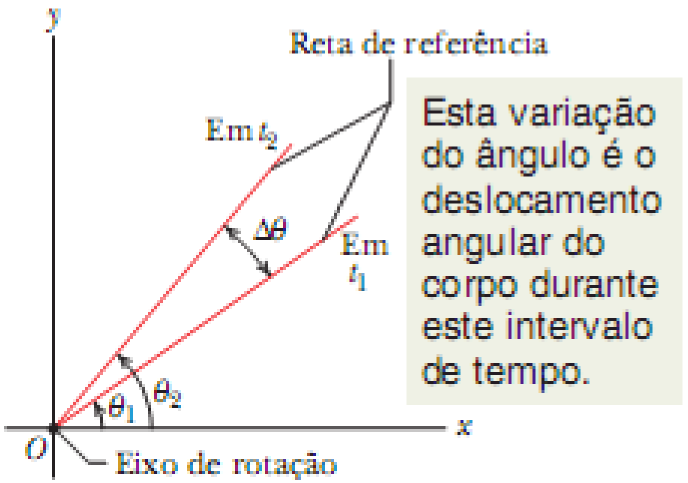


Figura 10-4 A reta de referência do corpo rígido das Figs. 10-2 e 10-3 está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. A grandeza $\Delta\theta$ $(= \theta_2 - \theta_1)$ é o deslocamento angular que acontece no intervalo Δt $(= t_2 - t_1)$. O corpo propriamente dito não aparece na figura.

10.2 As Variáveis de Rotação: Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não é constante, o corpo possui uma aceleração angular.

Se ω_2 e ω_1 são as velocidades angulares nos instantes t_2 e t_1, respectivamente, a **aceleração angular média** do corpo em rotação no intervalo de t_1 a t_2 é definida através da equação

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

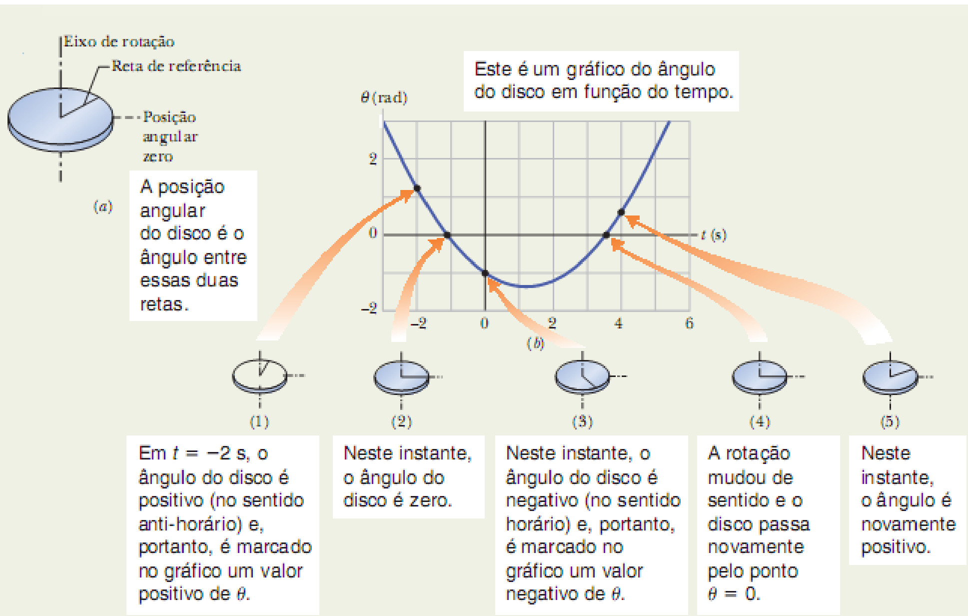
A **aceleração angular instantânea** α é o limite dessa razão quando Δt tende a zero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Essas equações são válidas para todas as partículas do corpo. A unidade de aceleração angular é o radiano por segundo ao quadrado (rad/s^2).

Exemplo

Fig. 10-5



O disco da Fig. 10-5*a* está girando em torno do eixo central como um carrossel. A posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do disco é dada por

$$\theta = -1{,}00 - 0{,}600t + 0{,}250t^2, \qquad (10\text{-}9)$$

com t em segundos, θ em radianos e a posição angular zero indicada na figura.

(a) Plote a posição angular do disco em função do tempo, de $t = -3{,}0$ s a $t = 5{,}4$ s. Desenhe o disco e a reta de referência em $t = -2{,}0$ s, 0 s, 4,0 s e nos instantes em que o gráfico cruza o eixo t.

Cálculos Para desenhar o disco e a reta de referência em um certo instante, precisamos determinar o valor de θ nesse instante. Para isso, substituímos t por seu valor na Eq. 10-9. Para $t = -2{,}0$ s, obtemos

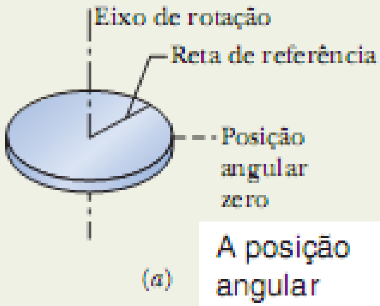
$$\theta = -1{,}00 - (0{,}600)(-2{,}0) + (0{,}250)(-2{,}0)^2$$

$$= 1{,}2 \text{ rad} = 1{,}2 \text{ rad}\,\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 69°.$$

Isso significa que em $t = -2{,}0$ s a reta de referência está deslocada de 1,2 rad = 69° no sentido anti-horário (porque θ é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig. 10-5*b* mostra esta posição da reta de referência.

Da mesma forma, para $t = 0$, obtemos $\theta = -1{,}00$ rad $= -57°$, o que significa que a reta de referência está deslocada de 1,0 rad = 57° no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para $t = 4{,}0$ s, obtemos $\theta = 0{,}60$ rad $= 34°$ (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo t é fácil, pois nesse caso $\theta = 0$ e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).

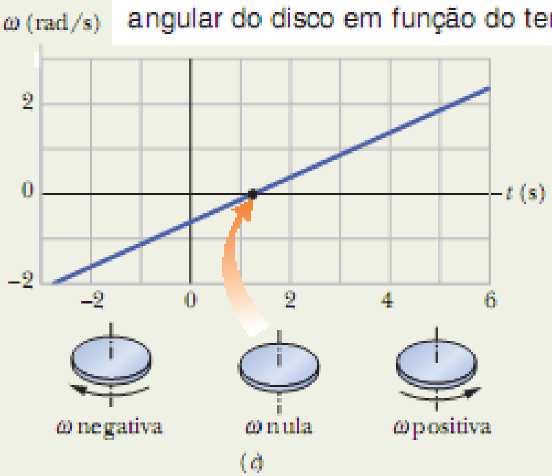
Exemplo (continuação)



A posição angular do disco é o ângulo entre essas duas retas.

Fig. 10-5

Este é um gráfico da velocidade angular do disco em função do tempo.



A velocidade é inicialmente negativa, diminui em módulo até se anular momentaneamente e passa a aumentar indefinidamente.

(b) Em que instante $t_{\text{mín}}$ o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na Fig. 10-5*b*? Qual é esse valor mínimo?

IDEIA-CHAVE

Para determinar o valor extremo (o mínimo, neste caso) de uma função, calculamos a derivada primeira da função e igualamos o resultado a zero.

Cálculos A derivada primeira de $\theta(t)$ é

$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10\text{-}10)$$

Igualando este resultado a zero e explicitando t, determinamos o instante em que $\theta(t)$ é mínimo:

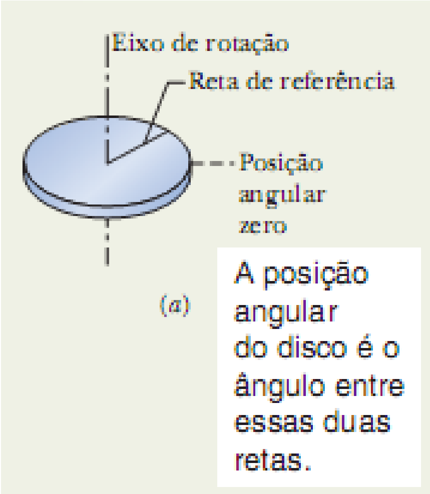
$$t_{\text{mín}} = 1{,}20 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

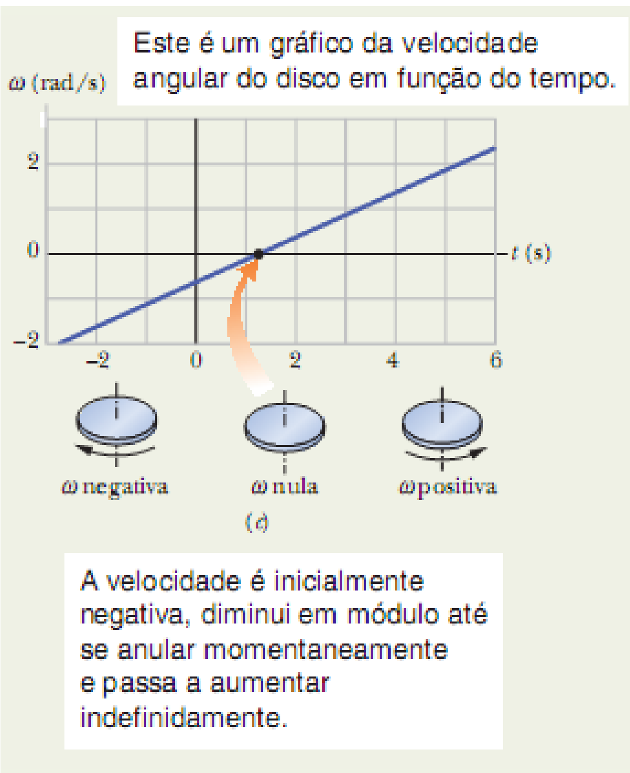
Para obter o valor mínimo de θ, substituímos $t_{\text{mín}}$ na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo (continuação)

Fig. 10-5





(c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em $t = -2{,}0$ s, 4,0 s e $t_{mín}$.

Cálculos Para desenhar o disco em $t = -2{,}0$ s, substituímos este valor de t na Eq. 10-11, obtendo

$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo mostra que em $t = -2{,}0$ s o disco está girando no sentido horário (desenho da esquerda da Fig. 10-5c).

Fazendo $t = 4{,}0$ s na Eq. 10-11, obtemos

$$\omega = 1{,}4 \text{ rad/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal positivo implícito mostra que em $t = 4{,}0$ s o disco está girando no sentido anti-horário (desenho da direita da Fig. 10-5c).

(d) Use os resultados anteriores para descrever o movimento do disco de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s.

Descrição Quando observamos o disco pela primeira vez, em $t = -3{,}0$ s, o disco tem uma posição angular positiva e está girando no sentido horário, com velocidade cada vez menor. Depois de parar momentaneamente na posição angular $\theta = -1{,}36$ rad, o disco começa a girar no sentido anti-horário e o valor de θ aumenta até se tornar novamente positivo.

Exemplo: Cálculo da velocidade angular a partir da aceleração angular

Um pião gira com aceleração angular

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

onde t está em segundos e α em radianos por segundo ao quadrado. No instante $t = 0$, a velocidade angular do pião é 5 rad/s e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular $\theta = 2$ rad.

(a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião, $\omega(t)$, ou seja, escreva uma expressão que descreva explicitamente a variação da velocidade angular com o tempo. (Sabemos que a velocidade angular *varia* com o tempo, já que existe uma aceleração angular.)

IDEIA-CHAVE

Por definição, $\alpha(t)$ é a derivada de $\omega(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\omega(t)$ integrando $\alpha(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

e, portanto,

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt.$$

Assim, temos:

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração C, observamos que $\omega = 5$ rad/s no instante $t = 0$. Substituindo esses valores na expressão de ω, obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

e, portanto, $C = 5$ rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião, $\theta(t)$.

IDEIA-CHAVE

Por definição, $\omega(t)$ é a derivada de $\theta(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\theta(t)$ integrando $\omega(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos Como, de acordo com a Eq. 10-6,

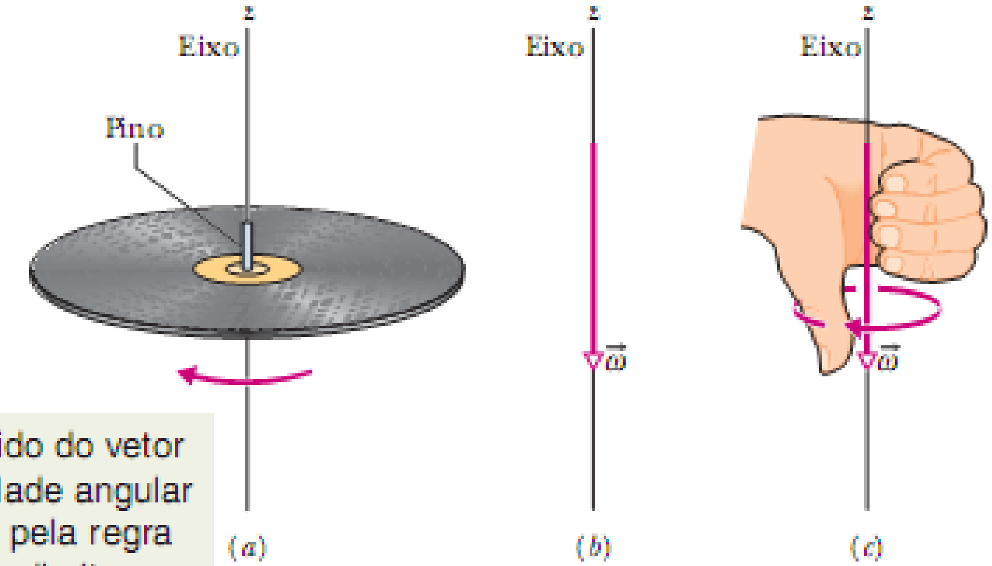
$$d\theta = \omega\, dt,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\, dt = \int \left(\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5\right) dt \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

onde C' foi calculado para que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

10.3 As Grandezas Angulares São Vetores?



O sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita.

Figura 10-6 (*a*) Um disco em rotação em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. (*b*) A velocidade angular do disco pode ser representada por um vetor $\vec{v}$ que coincide com o eixo de rotação e aponta para baixo, como mostra a figura. (*c*) Estabelecemos o sentido do vetor velocidade angular como para baixo pela regra da mão direita. Quando os dedos da mão direita envolvem o disco e apontam no sentido do movimento, o polegar estendido mostra o sentido de $\vec{\omega}$.

10.4 Rotação com Aceleração Angular Constante

Tabela 10-1

Equações de Movimento para Aceleração Linear Constante e Aceleração Angular Constante

Número da Equação	Equação Linear	Variável Ausente		Equação Angular	Número da Equação
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10-12)
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-13)
(2-16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10-14)
(2-17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10-15)
(2-18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-16)

As equações de movimento para aceleração angular constante são análogas às equações de movimento para aceleração linear constante.

Exemplo: Aceleração angular constante

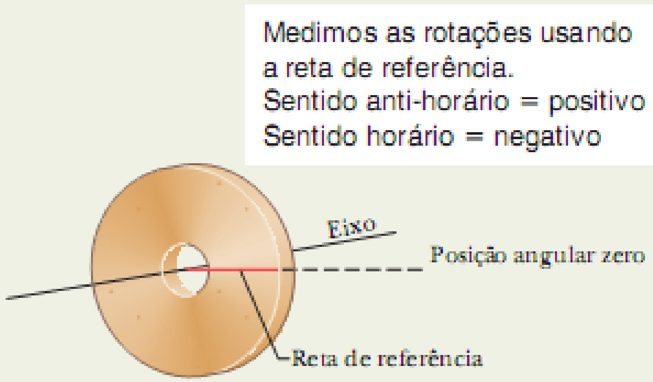


Figura 10-8 Uma pedra de amolar. No instante $t = 0$, a reta de referência (que imaginamos marcada na pedra) está na horizontal.

Uma pedra de amolar (Fig. 10-8) gira com aceleração angular constante $\alpha = 0{,}35\ \text{rad/s}^2$. No instante $t = 0$, a pedra tem uma velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6\ \text{rad/s}$ e uma reta de referência traçada na pedra está na horizontal, na posição angular $\theta_0 = 0$.

(a) Em que instante após $t = 0$ a reta de referência está na posição angular $\theta = 5{,}0\ \text{rev}$?

Como a aceleração angular é constante, podemos usar a equação de rotação:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Substituindo os valores conhecidos e fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5{,}0\ \text{rev} = 10\pi\ \text{rad}$, obtemos

$$10\pi\ \text{rad} = (-4{,}6\ \text{rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\ \text{rad/s}^2)t^2$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em t, obtemos $t = 32$ s.

(b) Descreva a rotação da pedra de amolar entre $t = 0$ e $t = 32$ s.

Descrição A pedra está inicialmente girando no sentido negativo (o sentido dos ponteiros do relógio) com velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, mas a aceleração angular α é positiva.

A oposição inicial entre os sinais da velocidade angular e da aceleração angular significa que a pedra gira cada vez mais devagar no sentido negativo, para momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo.

Depois que a reta de referência passa de volta pela posição inicial $\theta = 0$, a pedra dá mais 5 voltas completas até o instante $t = 32$ s.

(c) Em que instante t a pedra para momentaneamente?

Cálculo Fazendo $\omega = 0$ e calculando o valor correspondente de t, obtemos:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6\ \text{rad/s})}{0{,}35\ \text{rad/s}^2} = 13\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo: Aceleração Angular Constante

Você está operando um Rotor (um brinquedo de parque de diversões com um cilindro giratório vertical), percebe que um ocupante está ficando tonto e reduz a velocidade angular do cilindro de 3,40 rad/s para 2,00 rad/s em 20,0 rev, com aceleração angular constante.

(a) Qual é a aceleração angular constante durante esta redução da velocidade angular?

IDEIA-CHAVE

Como a aceleração angular do cilindro é constante, podemos relacioná-la à velocidade angular e ao deslocamento angular através das equações básicas da aceleração angular constante (Eqs. 10-12 e 10-13).

Cálculos A velocidade angular inicial é $\omega_0 = 3{,}40$ rad/s, o deslocamento angular é $\theta - \theta_0 = 20{,}0$ rev e a velocidade angular no final do deslocamento é $\omega = 2{,}00$ rad/s. Entretanto, não conhecemos a aceleração angular α e o tempo t, que aparecem nas duas equações básicas.

Para eliminar a variável t, usamos a Eq. 10-12 para escrever

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para obter

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Explicitando α, substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2{,}00\ \text{rad/s})^2 - (3{,}40\ \text{rad/s})^2}{2(125{,}7\ \text{rad})}$$

$$= -0{,}0301\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

Cálculo Agora que conhecemos α, podemos usar a Eq. 10-12 para obter t:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2{,}00\ \text{rad/s} - 3{,}40\ \text{rad/s}}{-0{,}0301\ \text{rad/s}^2}$$

$$= 46{,}5\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

10.5 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares

Se uma reta de referência de um corpo rígido gira de um ângulo θ, um ponto do corpo a uma distância r do eixo de rotação descreve um arco de circunferência de comprimento s, onde s é dado por

$$s = \theta r \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

$$\Downarrow$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo, com r constante, obtemos

$$v = \omega r \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

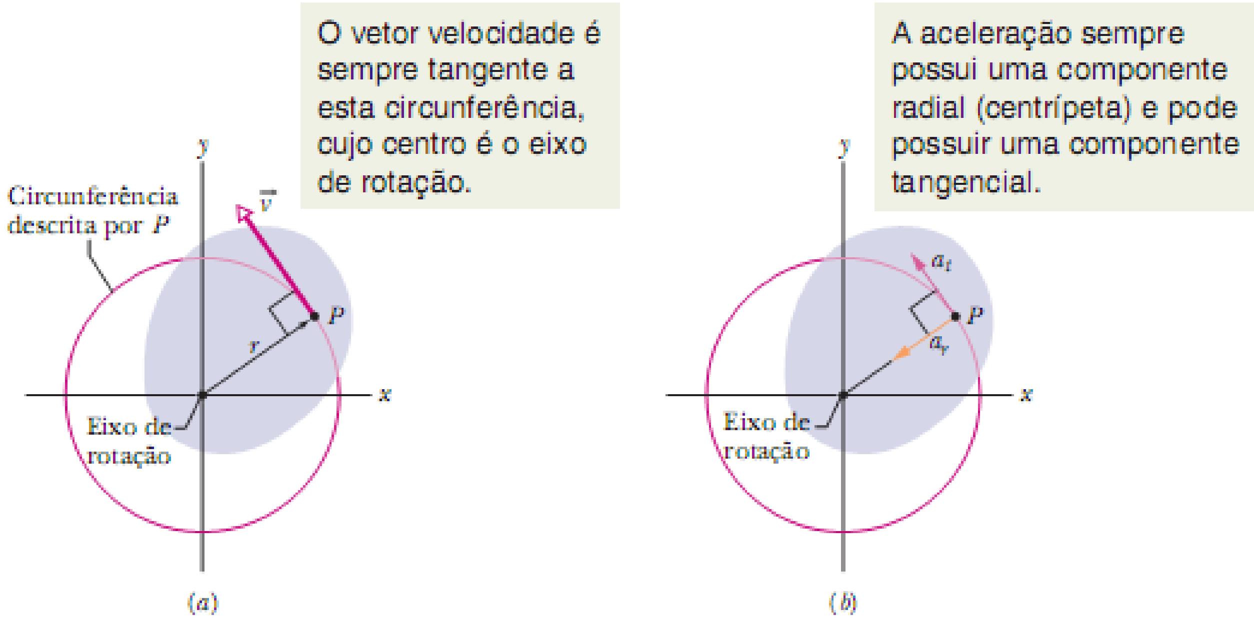
O período de revolução T do movimento de cada ponto e do corpo rígido como um todo é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Substituindo v pelo seu valor em termos de ω, temos também

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

10.5 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares



Derivando a equação da velocidade em relação ao tempo, novamente com *r* constante, obtemos:

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

onde $\alpha = d\omega/dt$.

Note que $dv/dt = a_t$ representa apenas a parte da aceleração linear que é responsável por variações do módulo *v* da velocidade linear. Como *v*, essa parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado.

A parte radial da aceleração é a aceleração centrípeta, dada por $a_r = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$

Exemplo

Considere uma montanha-russa de indução (que pode ser acelerada por forças magnéticas, mesmo em um trilho horizontal). Os passageiros deixam o ponto de embarque com uma aceleração g ao longo da pista horizontal.
Como essa primeira parte dos trilhos forma um arco de circunferência, os passageiros também experimentam uma aceleração centrípeta. Quando os passageiros aceleram ao longo do arco, o módulo da aceleração centrípeta aumenta de forma assustadora. Quando o módulo a da aceleração resultante atinge $4g$ em um ponto P de ângulo θ_P, o passageiro passa a se mover em linha reta, ao longo de uma tangente ao arco.
(a) Que ângulo θ_P o arco deve subtender para que a seja igual a $4g$ no ponto P?
Cálculos:

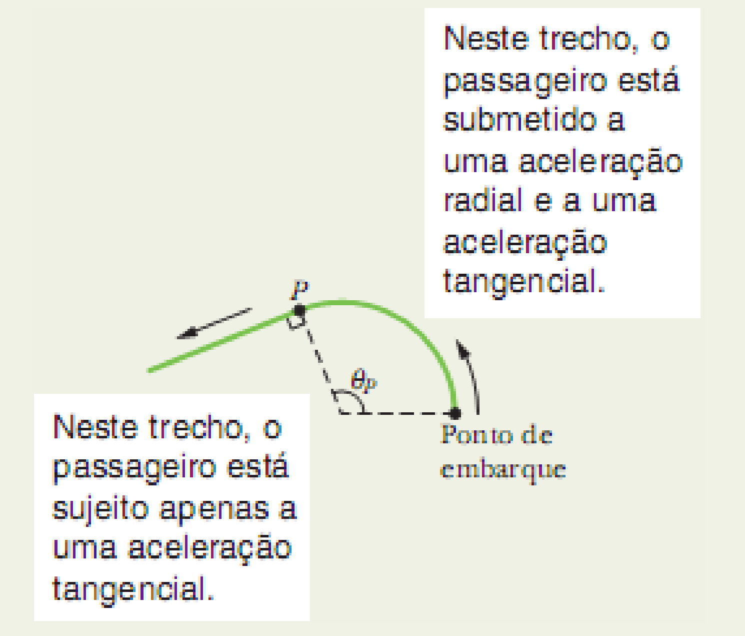
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

Fazendo $\omega_o = 0$ e $\theta_o = 0$, obtemos:

$$\omega^2 = \frac{2a_t\theta}{r}.$$

Como $a_r = \omega^2 r$

temos: $a_r = 2a_t\theta.$



Isso nos leva a uma aceleração total

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}.$$

Substituindo a_r por seu valor e explicitando θ, obtemos

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a_t^2} - 1}.$$

Quando a atinge o valor desejado, $4g$, θ é o ângulo θ_P. Fazendo $a = 4g$, $\theta = \theta_P$ e $a_t = g$, obtemos:

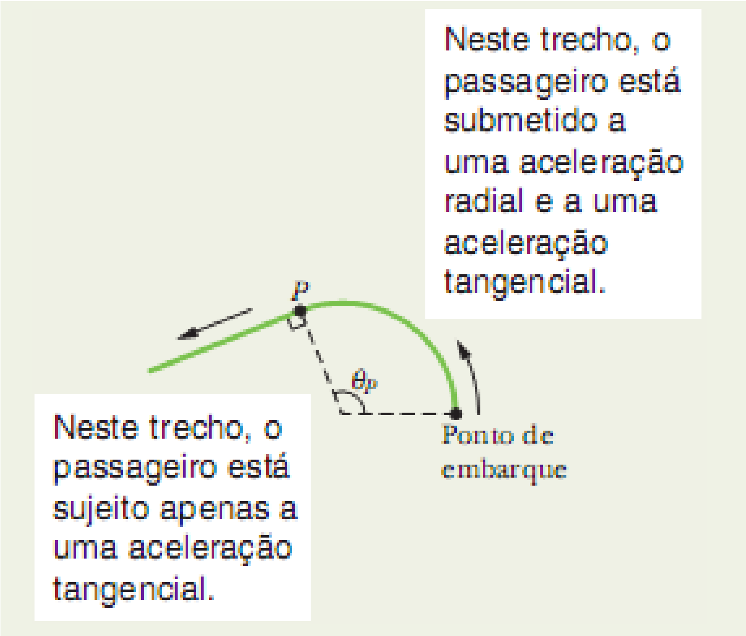
$$\theta_P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4g)^2}{g^2} - 1} = 1{,}94 \text{ rad} = 111°.$$

Exemplo (continuação)

(b) Qual é o módulo *a* da aceleração experimentada pelos passageiros no ponto *P* e depois de passarem pelo ponto *P*?

Raciocínio: No ponto *P*, *a* tem o valor planejado de 4g. Depois de passarem por *P*, os passageiros se movem em linha reta e a aceleração centrípeta deixa de existir.
Assim, os passageiros têm apenas a aceleração de módulo *g* ao longo dos trilhos e, portanto,

$$a = 4g \text{ em } P \quad \text{e} \quad a = g \text{ depois de } P$$



A dor de cabeça de montanha-russa acontece quando a cabeça de um passageiro sofre uma mudança brusca de aceleração, com altos valores de aceleração antes ou depois da mudança. A razão é que a mudança pode fazer com que o cérebro se mova em relação ao crânio, rompendo os vasos que ligam o crânio ao cérebro. O aumento gradual da aceleração de *g* para 4*g* entre o ponto inicial e o ponto *P* pode afetar alguns passageiros, mas é mais provável que a variação abrupta da aceleração de 4*g* para *g* quando o passageiro passa pelo ponto *P* provoque uma dor de cabeça de montanha-russa.

10.6 Energia Cinética de Rotação

Podemos tratar um corpo rígido como um conjunto de partículas com diferentes velocidades e somar a energia cinética dessas partículas para obter a energia cinética total do corpo:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots = \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2,$$

onde m_i é a massa da partícula i e v_i é a velocidade da partícula.

Como $v = \omega r$,

$$K = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2,$$

(ω é igual para todas as partículas)

A grandeza entre parênteses no lado direito é chamada de momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia, representado pela letra I, depende do corpo e do eixo em torno do qual está sendo executada a rotação.

Assim,

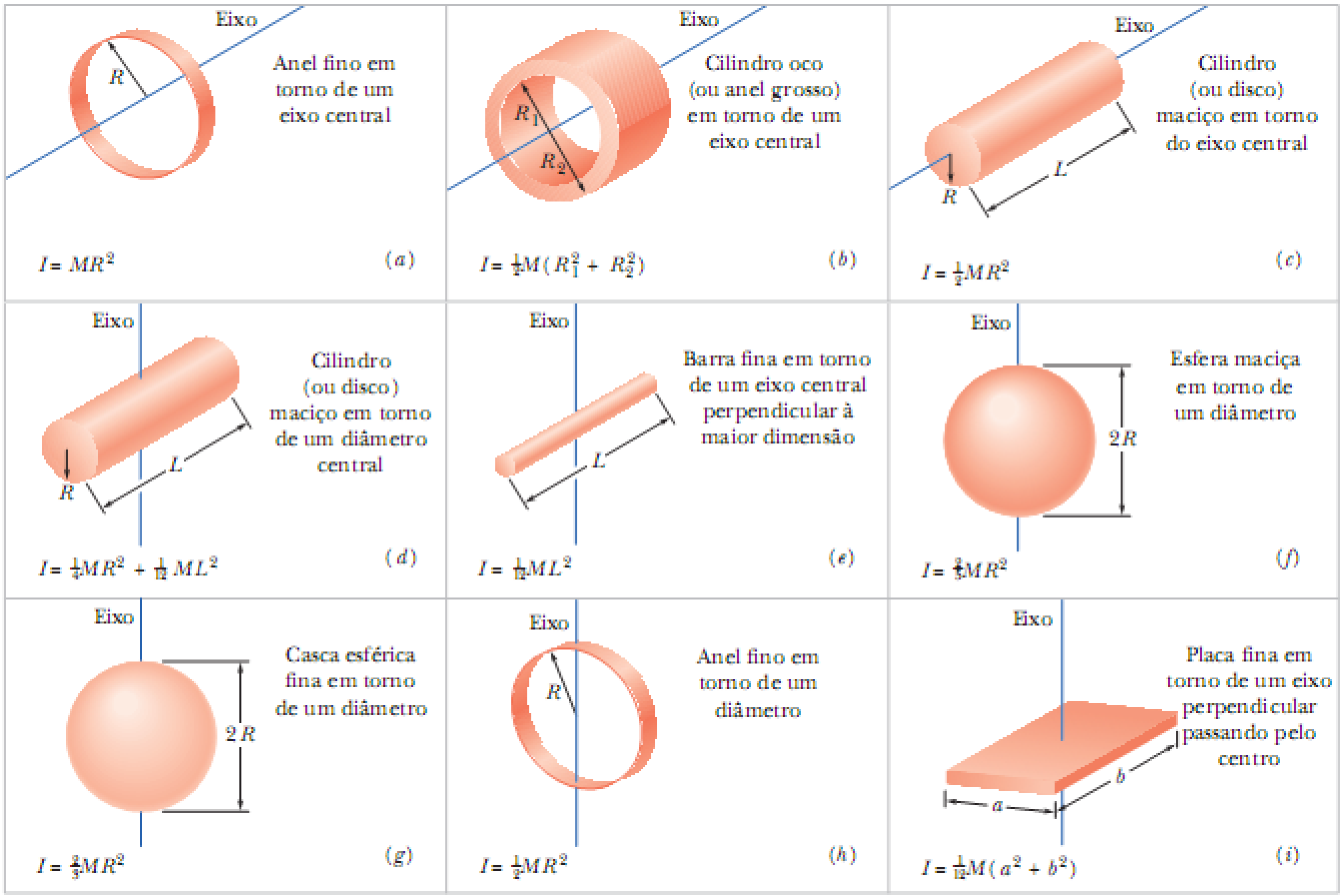
$$I = \sum m_ir_i^2 \quad \text{(momento de inércia)} \quad \Rightarrow \quad K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(ângulo em radianos)}$$

10.7 Cálculo do Momento de Inércia

Se um corpo rígido contém um grande número de partículas (é contínuo, como um disco de plástico), substituímos o somatório por uma integral e definimos o momento de inércia do corpo como

$$I = \int r^2\, dm \qquad \text{(momento de inércia, corpo contínuo)}$$

Alguns Momentos de Inércia

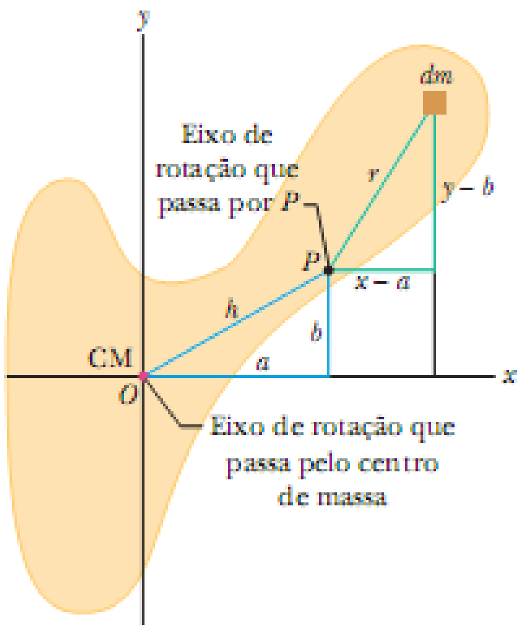


10.7 Cálculo do Momento de Inércia

Teorema dos Eixos Paralelos

Se h é a distância perpendicular entre um eixo dado e o eixo que passa pelo centro de massa e os dois eixos são paralelos, o momento de inércia I em relação ao eixo dado é

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad \text{(teorema dos eixos paralelos)}$$



- Seja O o centro de massa (e também a origem do sistema de coordenadas) de um corpo de forma arbitrária.
- Considere um eixo passando por O e perpendicular ao plano do papel e outro eixo passando pelo ponto P e paralelo ao primeiro eixo.
- Sejam a e b as coordenadas x e y de P.
- Seja dm um elemento de massa de coordenadas genéricas x e y. O momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P é

$$I = \int r^2\,dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,dm$$
$$= \int (x^2+y^2)\,dm - 2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm + \int (a^2+b^2)\,dm$$

- Como $x^2 + y^2 = R^2$, onde R é a distância de O a dm, o primeiro termo do lado direito é simplesmente I_{CM}, o momento de inércia do corpo em relação a um eixo que passa pelo centro de massa.
- O segundo termo é igual a Mh^2, onde M é a massa do corpo.

Exemplo: momento de inércia

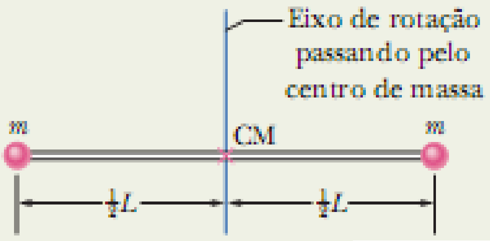
A Fig. 10-13*a* mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa m ligadas por uma barra de comprimento L e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

Cálculos Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular $L/2$ do eixo de rotação, temos:

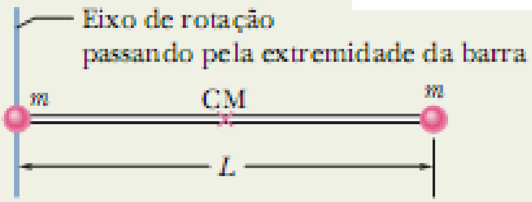
$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o momento de inércia I do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13*b*)?



(*a*)

Neste caso, o eixo de rotação passa pelo CM.



(*b*)

Neste caso, o eixo de rotação não passa pelo CM, mas é paralelo ao anterior; por isso, podemos usar o teorema dos eixos paralelos.

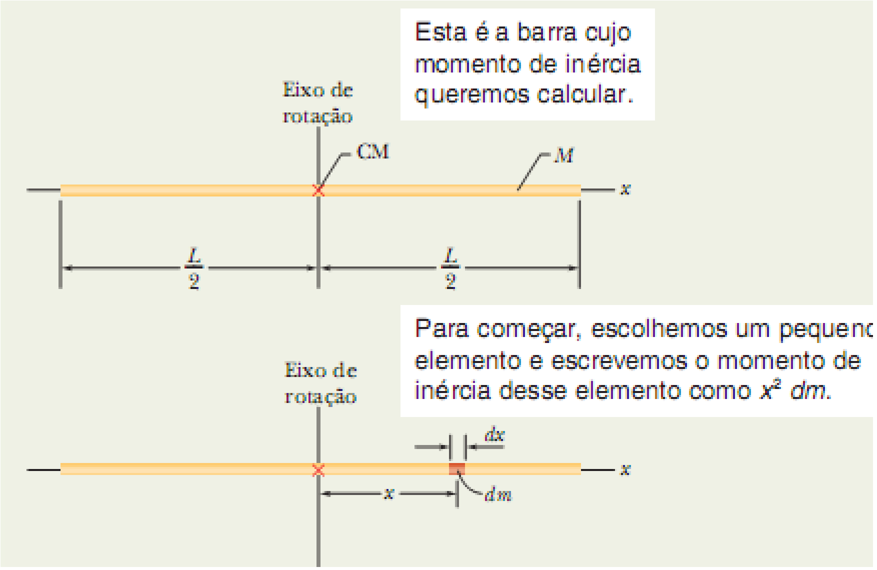
Primeira técnica Calculamos I como no item (a), exceto pelo fato de que, agora, a distância perpendicular r_i é zero para a partícula da esquerda e L para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Segunda técnica Como já conhecemos I_{CM}, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como o eixo especificado é paralelo a esse "eixo do CM", podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo: Momento de inércia



A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, homogênea, de massa M e comprimento L, e um eixo x ao longo da barra cuja origem coincide com o centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro?

IDEIAS-CHAVE

(1) Como a barra é homogênea, o centro de massa coincide com o centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é I_{CM}. (2) Como a barra é um objeto contínuo, precisamos usar a integral da Eq. 10-35,

$$I = \int r^2\,dm, \qquad (10\text{-}38)$$

para calcular o momento de inércia.

Cálculos Como queremos integrar em relação à coordenada x e não em relação à massa m, como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa dm de um elemento da barra a um elemento de distância dx ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é homogênea, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de distância } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou $$dm = \frac{M}{L}\,dx.$$

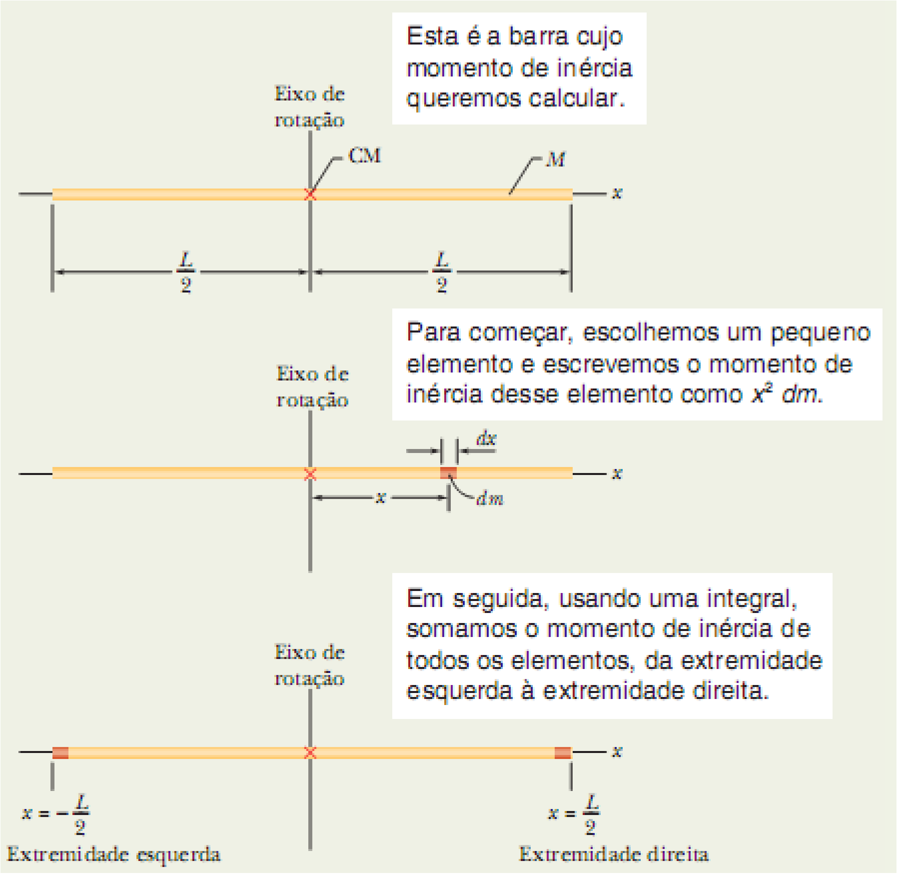
Podemos agora substituir dm por este valor e r por x na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de $x = -L/2$ a $x = L/2$) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx \\ &= \frac{M}{3L}\Big[x^3\Big]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\ &= \tfrac{1}{12}ML^2. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Este resultado está de acordo com o que aparece na Tabela 10-2*e*.

Exemplo: Momento de inércia (continuação)

Figura 10-14



(b) Qual é o momento de inércia I da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

IDEIAS-CHAVE

Poderíamos calcular I mudando a origem do eixo x para a extremidade esquerda da barra e integrando de $x = 0$ a $x = L$. Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

Cálculos Colocando o eixo na extremidade esquerda da barra e mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a), $I_{CM} = ML^2/12$. Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular h entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é $L/2$. Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}ML^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita, seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.

Exemplo: Energia cinética de rotação

As peças de máquinas que serão submetidas constantemente a rotações em alta velocidade costumam ser testadas em um *sistema de ensaio de rotação*. Nesse tipo de sistema, a peça é posta para girar rapidamente no interior de uma montagem cilíndrica de tijolos de chumbo com um revestimento de contenção, tudo isso dentro de uma câmara de aço fechada por uma tampa lacrada. Se a rotação faz a peça se estilhaçar, os tijolos de chumbo, sendo macios, capturam os fragmentos para serem posteriormente analisados.

Em 1985, a empresa Test Devices, Inc. (www.testdevices.com) estava testando um rotor de aço maciço, em forma de disco, com uma massa $M = 272$ kg e um raio $R = 38{,}0$ cm. Quando a peça atingiu uma velocidade angular ω de 14.000 rev/min, os engenheiros que realizavam o ensaio ouviram um ruído seco na câmara, que ficava um andar abaixo e a uma sala de distância. Na investigação, descobriram que tijolos de chumbo haviam sido lançados no corredor que levava à sala de testes, uma das portas da sala havia sido arremessada no estacionamento do lado de fora do prédio, um tijolo de chumbo havia atravessado a parede e invadido a cozinha de um vizinho, as vigas estruturais do edifício do teste tinham sido danificadas, o chão de concreto abaixo da câmara de ensaios havia afundado cerca de 0,5 cm e a tampa de 900 kg tinha sido lançada para cima, atravessara o teto e caíra de volta, destruindo o equipamento de ensaio (Fig. 10-15). Os fragmentos da explosão só não penetraram na sala dos engenheiros por pura sorte.

Qual foi a energia liberada na explosão do rotor?

IDEIA-CHAVE

A energia liberada foi igual à energia cinética de rotação K do rotor no momento em que a velocidade angular era 14.000 rev/min.

Figura 10-15 Parte da destruição causada pela explosão de um disco de aço em alta rotação. *(Cortesia de Test Devices, Inc)*

Cálculos Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$), mas, para isso, precisamos conhecer o momento de inércia I. Como o rotor era um disco que girava como um carrossel, I é dado pela expressão apropriada da Tabela 10-2c ($I = \frac{1}{2}MR^2$). Assim, temos:

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(272\text{ kg})(0{,}38\text{ m})^2 = 19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

A velocidade angular do rotor era

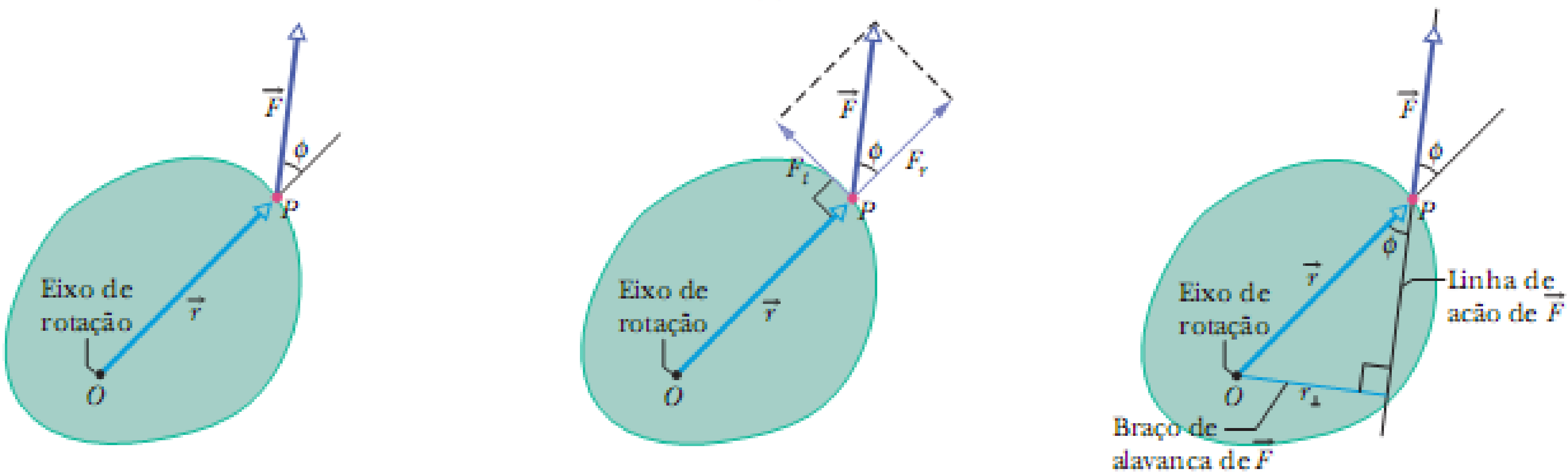
$$\begin{aligned}\omega &= (14\,000\text{ rev/min})(2\pi\text{ rad/rev})\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\\ &= 1{,}466\times 10^3\text{ rad/s}.\end{aligned}$$

Podemos usar a Eq. 10-34 para escrever

$$\begin{aligned}K &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(1{,}466\times 10^3\text{ rad/s})^2\\ &= 2{,}1\times 10^7\text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Os engenheiros realmente tiveram muita sorte.

10.8 Torque



O torque produzido por esta força faz o corpo girar em torno deste eixo, que é perpendicular ao plano do papel.

Na verdade, apenas a componente *tangencial* da força produz a rotação.

Também podemos calcular o torque usando o módulo da força total e o comprimento do braço de alavanca.

A capacidade de uma força **F** de fazer um corpo girar depende do módulo da componente tangencial F_t e também da distância entre o ponto de aplicação da força e o eixo de rotação.

Para levar em conta os dois fatores, definimos uma grandeza chamada **torque** (**τ**):

$$\tau = (r)(F \operatorname{sen} \phi)$$

OU

$$\tau = (r)(F \operatorname{sen} \phi) = rF_t$$

$$\tau = (r \operatorname{sen} \phi)(F) = r_\perp F$$

onde $r_\perp$ é o **braço de alavanca** de **F**.

10.9 A Segunda Lei de Newton para Rotações

$$F_t = ma_t.$$

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha.$$

$$\tau = I\alpha$$

No caso de mais de uma força, podemos generalizar:

$$\tau_{res} = I\alpha \qquad \text{(ângulo em radianos)}$$

O torque associado à componente tangencial da força produz uma aceleração angular em torno do eixo de rotação.

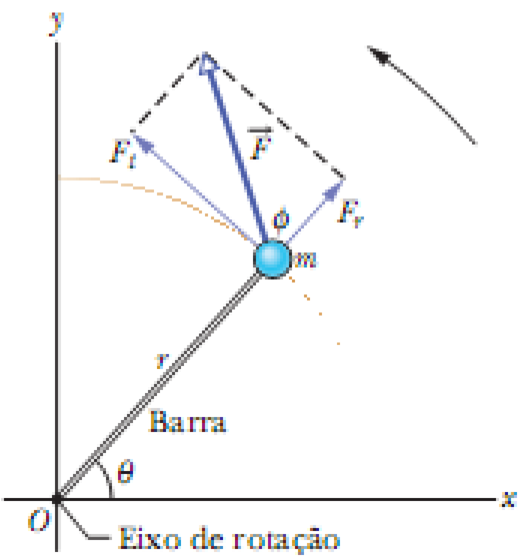
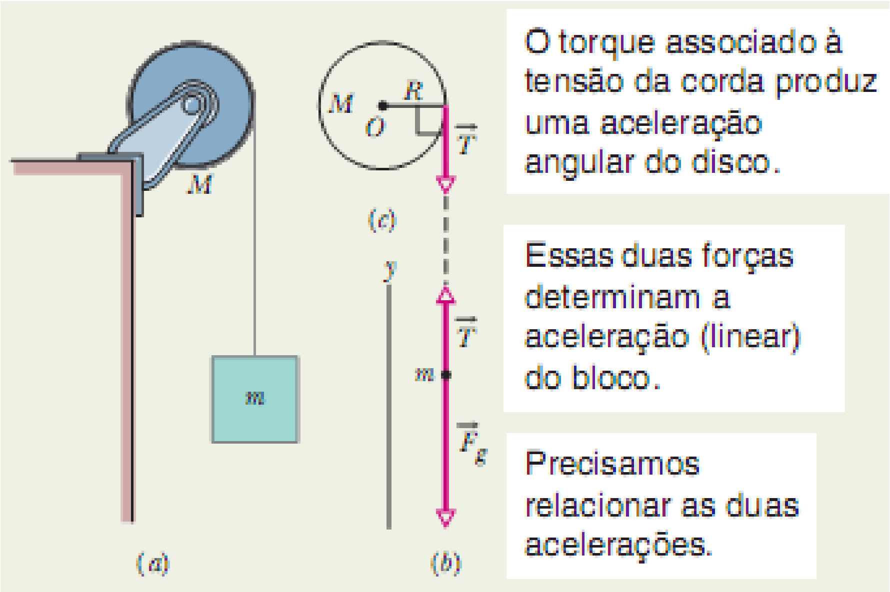


Figura 10-17 Um corpo rígido simples, livre para girar em torno de um eixo que passa por O, é formado por uma partícula de massa m presa na extremidade de uma barra de comprimento r e massa desprezível. A aplicação de uma força $\vec{F}$ faz o corpo girar.

Exemplo: Segunda lei de Newton para rotações

A Fig. 10-18*a* mostra um disco homogêneo, de massa $M = 2{,}5$ kg e raio $R = 20$ cm, montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa $m = 1{,}2$ kg está pendurado por uma corda de massa desprezível enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tensão da corda. A corda não escorrega e não existe atrito no eixo.



Forças que agem sobre o bloco:

Aplicando a segunda lei de Newton às componentes das forças em relação ao eixo vertical, obtemos: $T - mg = ma$.

O torque produzido pela força de tração é $-RT$, negativo, porque o torque faz o disco girar no sentido dos ponteiros do relógio.

O momento de inércia do disco é $MR^2/2$. Assim, $\tau_{res} = I\alpha = -RT = MR^2/2\alpha$.

Como a corda não escorrega, a aceleração linear do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t da borda do disco são iguais e, portanto, $T = -Ma/2$.

Combinação de resultados

$$a = -g\frac{2m}{M + 2m} = -(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})\frac{(2)(1{,}2\ \mathrm{kg})}{2{,}5\ \mathrm{kg} + (2)(1{,}2\ \mathrm{kg})}$$
$$= -4{,}8\ \mathrm{m/s^2} \qquad \text{(Resposta)}$$

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \mathrm{kg})(-4{,}8\ \mathrm{m/s^2})$$
$$= 6{,}0\ \mathrm{N} \qquad \text{(Resposta)}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{0{,}20\ \mathrm{m}} = -24\ \mathrm{rad/s^2} \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a aceleração a do bloco é menor que g e que a tração T da corda (6,0 N) é menor que a força gravitacional a que está sujeito o bloco (mg =11,8 N).

10.10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W \qquad \text{(teorema do trabalho e energia cinética)}$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta \qquad \text{(trabalho, rotação em torno de um eixo fixo)}$$

onde τ é o torque responsável pelo trabalho W, e θ_i e θ_f são, respectivamente, as posições do corpo antes e depois da rotação. Quando τ é constante,

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad \text{(trabalho, torque constante)}$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \qquad \text{(potência, rotação em torno de um eixo)}$$

10.10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Tabela 10-3

Algumas Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação

Translação Pura (Direção Fixa)		Rotação Pura (Eixo Fixo)	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\,dx$	Trabalho	$W = \int \tau\,d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$

Exemplo: trabalho, energia cinética de rotação, torque

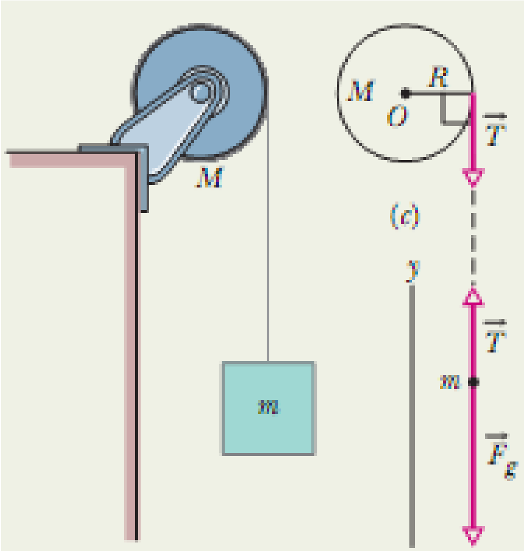
Suponha que o disco da Fig. 10-18 parte do repouso no instante $t = 0$, que a tensão da corda de massa desprezível é 6,0 N e que a aceleração angular do disco é -24 rad/s². Qual é a energia cinética de rotação K no instante $t = 2{,}5$ s?

Cálculos Como estamos interessados em determinar ω e conhecemos α e ω_0 ($= 0$), usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo $\omega = \alpha t$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$ na Eq. 10-34, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4}M(R\alpha t)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2{,}5\text{ kg})[(0{,}20\text{ m})(-24\text{ rad/s}^2)(2{,}5\text{ s})]^2$$
$$= 90\text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$



Também podemos obter esta resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

Cálculos Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total W realizado sobre o disco, usando o teorema do trabalho e energia cinética ($K_f - K_i = W$). Substituindo K_f por K e K_i por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \qquad (10\text{-}60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho W. Podemos relacionar W aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque $\vec{T}$ que a corda exerce sobre o disco, que é igual a $-TR$. Como α é constante, o torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \qquad (10\text{-}61)$$

Como α é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular $\theta_f - \theta_i$. Com $\omega_i = 0$, temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Podemos substituir este valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com $T = 6{,}0$ N e $\alpha = -24$ rad/s², temos:

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2) = -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(6{,}0\text{ N})(0{,}20\text{ m})(-24\text{ rad/s}^2)(2{,}5\text{ s})^2$$
$$= 90\text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$