

Capítulo 9

Centro de Massa
e
Momento Linear

9.2 O Centro de Massa

O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.



O centro de massa (ponto preto) de um taco de beisebol lançado no ar segue uma trajetória parabólica; todos os outros pontos seguem trajetórias mais complicadas.

9.2 O Centro de Massa: Sistemas de Partículas

Considere uma situação na qual n partículas estão distribuídas ao longo do eixo x . Sejam m_1, m_2, \dots, m_n as massas e x_1, x_2, \dots, x_n as posições das partículas. Nesse caso, se a massa total é $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, a posição do centro de massa, x_{CM} , é dada por

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i.\end{aligned}$$

9.2 O Centro de Massa: Sistemas de Partículas

Em três dimensões, as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

O vetor posição do centro de massa é

$$\vec{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{i} + y_{\text{CM}} \hat{j} + z_{\text{CM}} \hat{k}.$$



$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

9.2 O Centro de Massa: Corpos Sólidos

No caso de corpos sólidos, as “partículas” se tornam elementos infinitesimais de massa dm , as somas se tornam integrais e as coordenadas do centro de massa são definidas através das equações

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

onde M é a massa do objeto.

Se o objeto possui uma massa específica $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$,

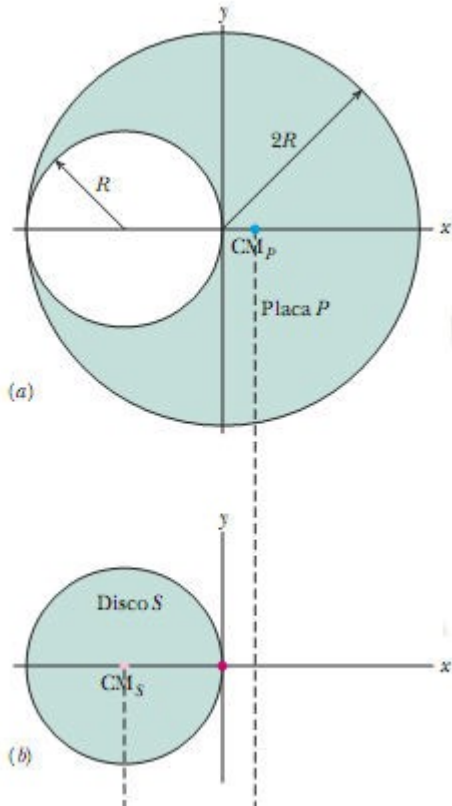
temos:
$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int x \, dV, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int y \, dV, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{V} \int z \, dV$$

onde V é o volume do objeto.

Exemplo: Centro de massa

A Fig. 9-3a mostra uma placa de metal fina e homogênea P , de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido em uma linha de montagem. O disco aparece na Fig. 9-3b. Determine as coordenadas do centro de massa da placa (CM_P) em relação aos eixos x e y indicados na figura.

Fig. 9-3



Cálculos: Primeiro, colocamos o disco que foi removido (vamos chamá-lo de disco S) de volta no lugar para formar a placa original (que vamos chamar de placa C). Devido à simetria, o centro de massa CM_S do disco S está no centro de S , em $x = -R$. Da mesma forma, o centro de massa da placa composta C está no centro de C , a origem.

Suponha que a massa m_S do disco S está concentrada em uma partícula em $x_S = -R$ e que a massa m_P está concentrada em uma partícula em x_P . Trate as duas partículas como um sistema e determine o centro de massa x_{S+P} .

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P}$$

Note que a superposição do disco S com a placa P é a placa C . Assim, a posição x_{S+P} do CM_{S+P} deve coincidir com a posição x_C do CM_C , que está na origem: $x_{S+P} = x_C = 0$.

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P}$$

Assim,

$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{\text{massa específica}_S \times \text{espessura}_S \times \text{área}_S}{\text{massa específica}_P \times \text{espessura}_P \times \text{área}_P}$$

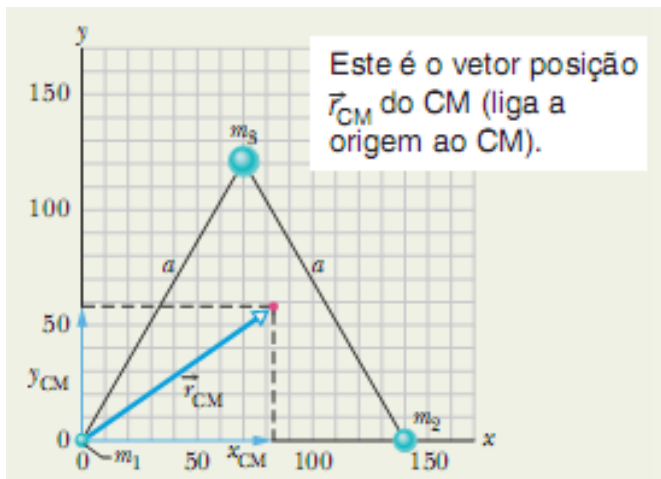
$$\begin{aligned} \frac{m_S}{m_P} &= \frac{\text{área}_S}{\text{área}_P} = \frac{\text{área}_S}{\text{área}_C - \text{área}_S} \\ &= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e $x_S = -R$

➔ $x_P = \frac{1}{3}R$

Exemplo: CM de 3 partículas

Três partículas de massas $m_1 = 1,2$ kg, $m_2 = 2,5$ kg e $m_3 = 3,4$ kg formam um triângulo equilátero de lado $a = 140$ cm. Onde fica o centro de massa do sistema?



A massa total M do sistema é 7,1 kg.

As coordenadas do centro de massa do sistema são, portanto,

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M} \\ &= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3,4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} \\ &= 83 \text{ cm} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e \quad y_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} \\ &= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(0) + (3,4 \text{ kg})(120 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}} \\ &= 58 \text{ cm.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Os dados são os seguintes:

Partícula	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

Note que $z_{CM} = 0$.

9.3 A 2ª Lei de Newton para um Sistema de Partículas

A equação vetorial que governa o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é

$$\longrightarrow F_{\text{res},x} = Ma_{\text{CM},x} \quad F_{\text{res},y} = Ma_{\text{CM},y} \quad F_{\text{res},z} = Ma_{\text{CM},z}$$

Note que:

1. F_{res} é a soma de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Forças de uma parte do sistema que agem sobre outra parte (forças internas) não são consideradas.
2. M é a massa total do sistema. M permanece constante, e dizemos que o sistema é fechado.
3. a_{CM} é a aceleração do centro de massa do sistema.

As forças internas da explosão não mudam a trajetória do CM.



Figura 9-5 Um fogo de artifício explode no ar. Se não fosse a resistência do ar, o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os fragmentos começassem a atingir o solo.

9.3 A 2ª Lei de Newton para um Sistema de Partículas: Demonstração

➤ Para um sistema de n partículas, $M\vec{r}_{\text{CM}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n$

onde M é a massa total e \mathbf{r}_i são os vetores posição das massas m_i .

➤ Derivando, temos: $M\vec{v}_{\text{CM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$

onde os vetores \mathbf{v} são vetores velocidade.

➤ Isso leva a $M\vec{a}_{\text{CM}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n$

➤ Finalmente, $M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n$

○ lado direito é a soma vetorial das forças externas que agem sobre o sistema, já que as forças internas se cancelam por causa da 3ª Lei de Newton.

Exemplo: Movimento do CM de um sistema de partículas

As três partículas da Fig. 9-7a estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força *externa* produzida por corpos fora do sistema das três partículas. As orientações das forças estão indicadas e os módulos são $F_1 = 6,0 \text{ N}$, $F_2 = 12 \text{ N}$ e $F_3 = 14 \text{ N}$. Qual é a aceleração do centro de massa do sistema e em que direção se move?

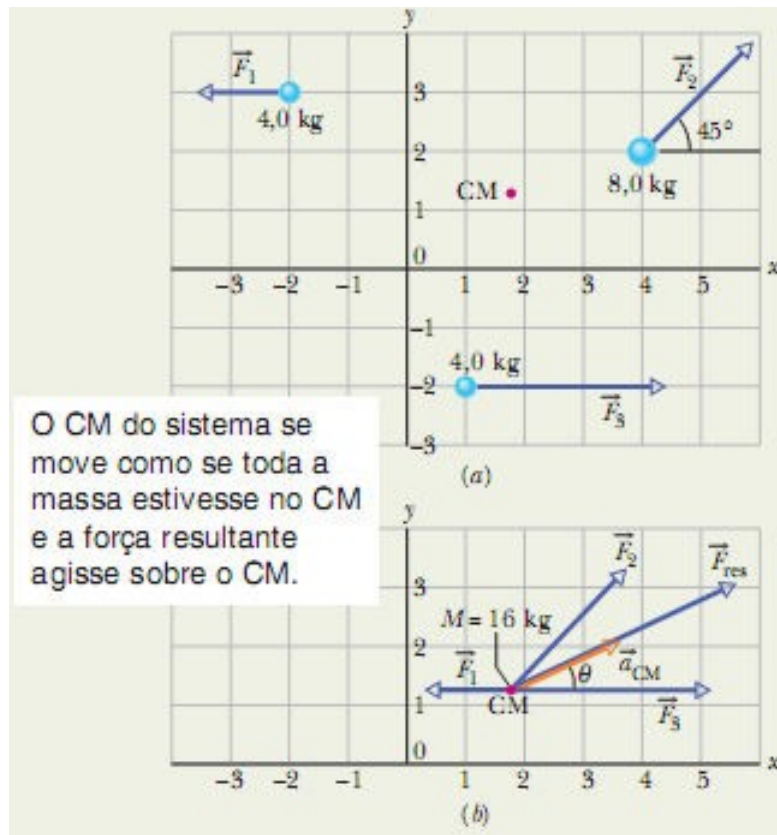


Figura 9-7

Cálculos: Aplicando a segunda lei de Newton ao centro de massa,

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M}$$

$$a_{\text{CM},x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M}$$

$$= \frac{-6,0 \text{ N} + (12 \text{ N}) \cos 45^\circ + 14 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,03 \text{ m/s}^2.$$

Ao longo do eixo y , temos:

$$a_{\text{CM},y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M}$$

$$= \frac{0 + (12 \text{ N}) \sin 45^\circ + 0}{16 \text{ kg}} = 0,530 \text{ m/s}^2.$$

Assim, o módulo de \vec{a}_{CM} é dado por

$$a_{\text{CM}} = \sqrt{(a_{\text{CM},x})^2 + (a_{\text{CM},y})^2}$$

$$= 1,16 \text{ m/s}^2 \approx 1,2 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Resposta})$$

e o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_{\text{CM},y}}{a_{\text{CM},x}} = 27^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

9.4 Momento Linear

DEFINIÇÃO:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{momento linear de uma partícula})$$

onde m é a massa e \vec{v} é a velocidade da partícula.

A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força total que age sobre a partícula:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Essa equação também pode ser escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2^{\text{a}} \text{ Lei de Newton})$$

9.5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

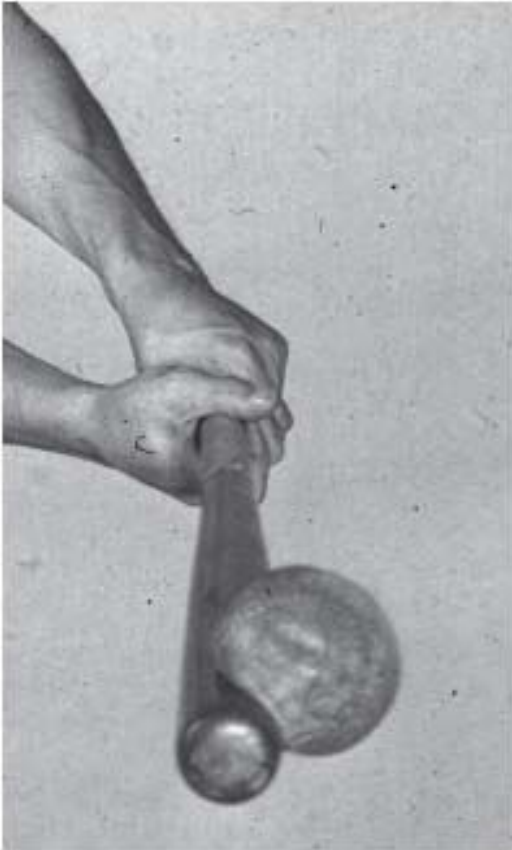
O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total M do sistema pela velocidade do centro de massa.

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad (\text{momento linear de um sistema de partículas})$$



$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas})$$

9.6 Colisão e Impulso



A colisão de uma bola com um taco faz com que a bola se deforme. (Foto de Harold E. Edgerton. ©The Harold and Esther Edgerton Family Trust, cortesia de Palm Press, Inc.)

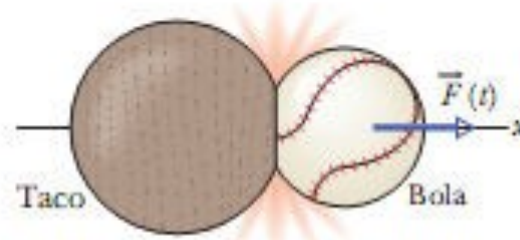


Figura 9-8 A força $\vec{F}(t)$ age sobre uma bola quando a bola e um taco colidem.

Nesse caso, a colisão dura pouco tempo, mas a bola experimenta uma força que, em muitos casos, é suficiente para inverter o movimento.

A figura mostra o instante da colisão. A bola sofre uma força $F(t)$ que varia durante a colisão e muda o momento linear da bola.

9.6 Colisão e Impulso

A variação do momento linear está relacionada à força através da 2ª lei de Newton escrita na forma

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt$$

$$\longrightarrow \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

$$\longrightarrow \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad (\text{definição de impulso})$$

O lado direito da equação é uma medida tanto da intensidade como da duração da força da colisão e recebe o nome de *impulso da colisão*, representado pelo símbolo **J**.

9.6 Colisão e Impulso

O impulso da colisão é igual à área sob a curva.

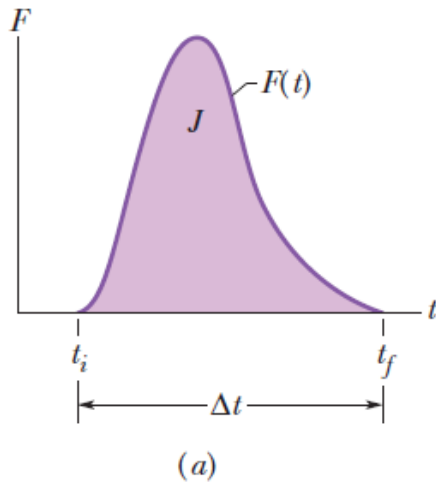
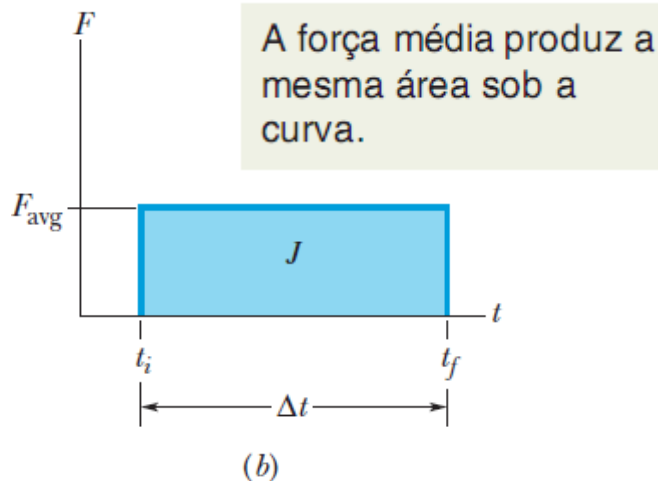


Figura 9-9 (a) A curva mostra o módulo da força dependente do tempo $F(t)$ que age sobre a bola na colisão da Fig. 9-8. A área sob a curva é igual ao módulo do impulso \vec{J} sobre a bola na colisão. (b) A altura do retângulo representa a força média $F_{\text{méd}}$ que age sobre a bola no intervalo Δt . A área do retângulo é igual à área sob a curva do item (a) e, portanto, também é igual ao módulo do impulso \vec{J} na colisão.



A força média produz a mesma área sob a curva.

Em vez da bola, podemos concentrar a atenção no taco. Em qualquer instante, de acordo com a 3ª lei de Newton, a força aplicada ao taco tem o mesmo módulo que a força aplicada à bola e o sentido contrário.

Isso significa que o impulso aplicado ao taco tem o mesmo módulo que o impulso aplicado à bola e o sentido contrário.

9.6 Colisão e Impulso: Colisões em Série



Figura 9-10 Uma série de projéteis, todos com o mesmo momento linear, colide com um alvo fixo. A força média F_{med} exercida sobre o alvo aponta para a direita e tem um módulo que depende da taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo ou, alternativamente, da taxa com a qual a massa colide com o alvo.

Seja n o número de projéteis que colidem em um intervalo de tempo Δt .

Cada projétil tem um momento inicial mv e sofre uma variação Δp do momento linear por causa da colisão.

A variação total do momento linear de n projéteis durante o intervalo de tempo Δt é $n\Delta p$. O impulso total que o alvo recebe durante o intervalo de tempo Δt tem a direção do eixo x e o mesmo módulo que $n\Delta p$, mas o sentido contrário.

$$J = -n \Delta p$$

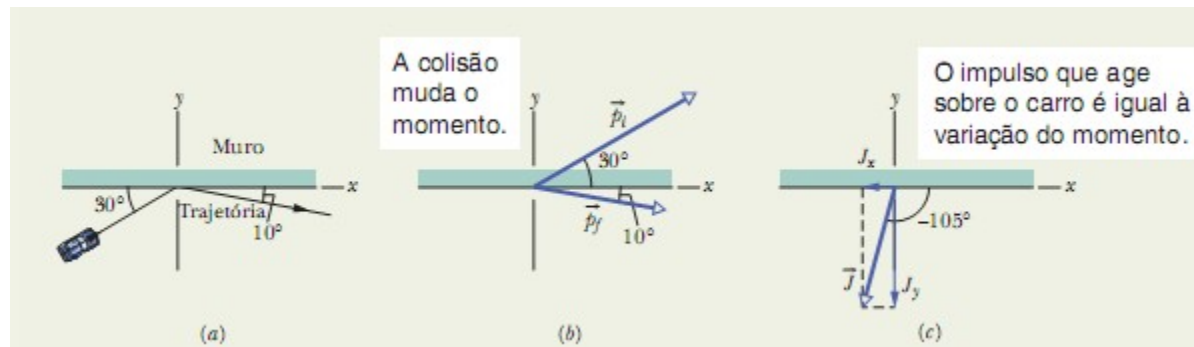
$$F_{\text{med}} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} \Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v$$

No intervalo de tempo Δt , uma quantidade de massa $\Delta m = nm$ colide com o alvo.

$$F_{\text{med}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v$$

Exemplo: Impulso bidimensional

A Fig. 9-11a é uma vista superior da trajetória de um carro de corrida ao colidir com um muro de proteção. Antes da colisão, o carro está se movendo com uma velocidade escalar $v_i = 70$ m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 30° com o muro. Após a colisão, está se movendo com velocidade escalar $v_f = 50$ m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 10° com o muro. A massa m do piloto é 80 kg.



(a) Qual é o impulso \vec{J} a que o piloto é submetido no momento da colisão?

Cálculos A Fig. 9-11b mostra o momento do piloto antes da colisão, \vec{p}_i (que faz um ângulo de 30° com o semieixo x positivo), e o momento do piloto depois da colisão, \vec{p}_f (que faz um ângulo de -10° com o semieixo x positivo).

Componente x Para o eixo x , temos:

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{fx} - v_{ix}) \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s}) \cos(-10^\circ) - (70 \text{ m/s}) \cos 30^\circ] \\ &= -910 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Componente y Para o eixo y , temos:

$$\begin{aligned} J_y &= m(v_{fy} - v_{iy}) \\ &= (80 \text{ kg})[(50 \text{ m/s}) \sin(-10^\circ) - (70 \text{ m/s}) \sin 30^\circ] \\ &= -3495 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx -3500 \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

Impulso O impulso é, portanto,

$$\vec{J} = (-910\hat{i} - 3500\hat{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}, \quad (\text{Resposta})$$

o que significa que o módulo do impulso é

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx 3600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

O ângulo de \vec{J} é dado por

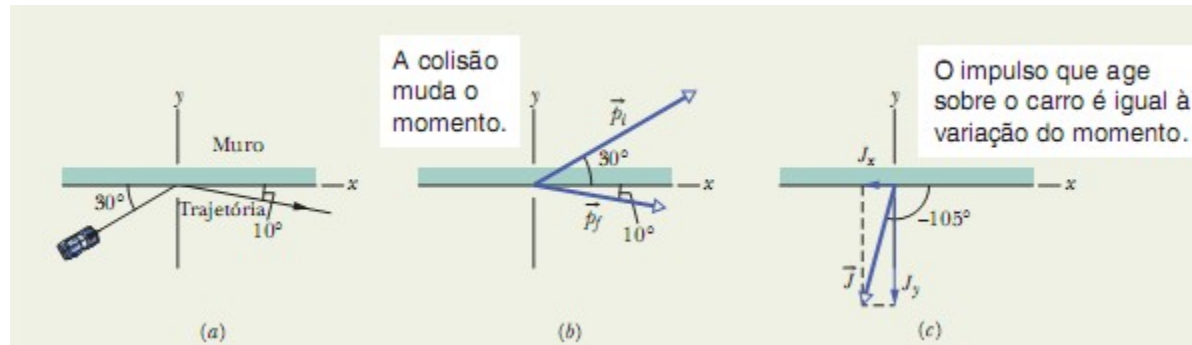
$$\theta = \tan^{-1} \frac{J_y}{J_x}, \quad (\text{Resposta})$$

que, de acordo com uma calculadora, é $75,4^\circ$. Lembre-se de que o resultado fisicamente correto do arco tangente pode ser o indicado pela calculadora ou o indicado pela calculadora mais 180° . Para verificar qual dos dois é o resultado correto, podemos desenhar as componentes de \vec{J} (Fig. 9-11c). Fazendo isso, verificamos que θ é, na verdade, $75,4^\circ + 180^\circ = 255,4^\circ$, que também pode ser escrito como

$$\theta = -105^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo: Impulso bidimensional (cont.)

A Fig. 9-11a é uma vista superior da trajetória de um carro de corrida ao colidir com um muro de proteção. Antes da colisão, o carro está se movendo com uma velocidade escalar $v_i = 70 \text{ m/s}$ ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 30° com o muro. Após a colisão, está se movendo com velocidade escalar $v_f = 50 \text{ m/s}$ ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 10° com o muro. A massa m do piloto é 80 kg .



(b) A colisão dura 14 ms . Qual é o módulo da força média que o piloto experimenta durante a colisão?

Cálculos Temos:

$$F_{\text{méd}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{3616 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0,014 \text{ s}} = 2,583 \times 10^5 \text{ N} \approx 2,6 \times 10^5 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

Usando a equação $F = ma$ com $m = 80 \text{ kg}$, é fácil mostrar que o módulo da aceleração do piloto durante a colisão é $3,22 \times 10^3 \text{ m/s}^2 = 329g$. Uma aceleração tão elevada seria provavelmente fatal.

Normas de segurança Os engenheiros mecânicos tentam reduzir os riscos dos pilotos de corrida projetando muros “macios” para que as colisões durem mais tempo. Se a colisão examinada neste exemplo durasse 10 vezes mais tempo e todos os outros parâmetros permanecessem iguais, os módulos da força média e da aceleração média seriam 10 vezes menores e o piloto provavelmente sobreviveria.

9.7 Conservação do Momento Linear

Se um sistema de partículas não está sujeito a forças externas, o momento linear total \mathbf{P} do sistema é constante.

$$\vec{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema fechado e isolado}).$$



Se a componente da força total externa aplicada a um sistema fechado é nula na direção de um eixo, a componente do momento linear do sistema em relação a esse eixo é constante.

Exemplo: Explosão unidimensional

A Fig. 9-12a mostra um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M , viajando ao longo de um eixo x no espaço sideral com uma velocidade inicial \vec{v}_i de módulo 2100 km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejetou a cápsula de carga, de massa $0,20M$ (Fig. 9-12b). Depois disso, o rebocador passa a viajar 500 km/h mais depressa que a cápsula ao longo do eixo x , ou seja, a velocidade relativa v_{rel} entre o cargueiro e a cápsula é 500 km/h. Qual é, nesse instante, a velocidade v_{RS} do rebocador em relação ao Sol?

IDEIA-CHAVE

Como o sistema rebocador–cápsula é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, ou seja,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad (9-44)$$

A separação explosiva pode mudar o momento das partes, mas não o momento do sistema.

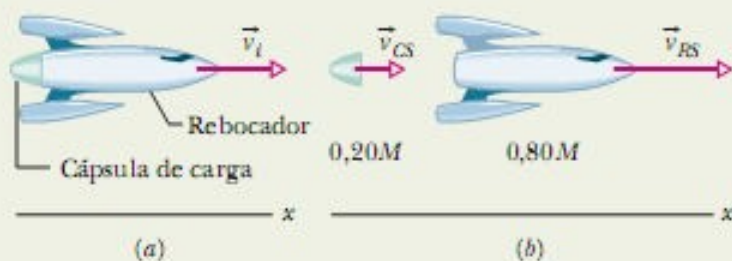


Fig. 9-12

onde os índices i e f indicam os valores antes e depois da ejeção, respectivamente.

Cálculos Como o movimento é ao longo de um único eixo, podemos escrever os momentos e velocidades em termos das componentes x . Antes da ejeção, temos:

$$P_i = Mv_i. \quad (9-45)$$

Seja v_{CS} a velocidade da cápsula ejetada em relação ao Sol. O movimento linear total do sistema após a ejeção é dado por

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}, \quad (9-46)$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear da cápsula de carga e o segundo termo é o momento do rebocador.

Não conhecemos a velocidade v_{CS} da cápsula em relação ao Sol, mas podemos relacioná-la às velocidades conhecidas através da equação

$$\left(\begin{array}{c} \text{velocidade do} \\ \text{rebocador em} \\ \text{relação ao Sol} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{velocidade do} \\ \text{rebocador em} \\ \text{relação à cápsula} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{velocidade da} \\ \text{cápsula em} \\ \text{relação ao Sol} \end{array} \right).$$

Em símbolos, isso nos dá

$$v_{RS} = v_{rel} + v_{CS} \quad (9-47)$$

ou

$$v_{CS} = v_{RS} - v_{rel}.$$

Substituindo esta expressão para v_{CS} na Eq. 9-46 e substituindo as Eqs. 9-45 e 9-46 na Eq. 9-44, obtemos

$$Mv_i = 0,20M(v_{RS} - v_{rel}) + 0,80Mv_{RS},$$

o que nos dá

$$v_{RS} = v_i + 0,20v_{rel},$$

ou

$$\begin{aligned} v_{RS} &= 2100 \text{ km/h} + (0,20)(500 \text{ km/h}) \\ &= 2200 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

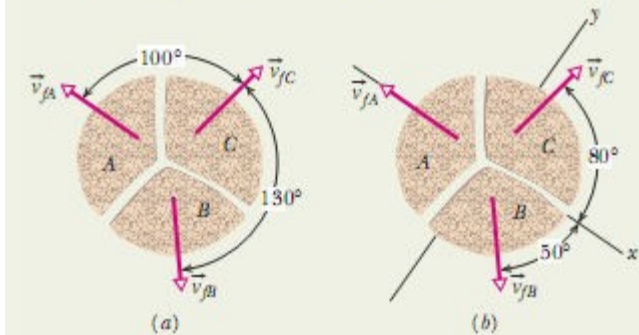
(Resposta)

Exemplo: Explosão bidimensional

Ao explodir, uma cabeça de negro colocada no interior de um coco vazio de massa M , inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície horizontal. Uma vista superior é mostrada na Fig. 9-13a. O pedaço C, de massa $0,30M$, tem uma velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0$ m/s.

Fig. 9-13

A separação explosiva pode mudar o momento de partes do sistema, mas o momento total do sistema permanece constante.



(a) Qual é a velocidade do pedaço B, de massa $0,20M$?

Cálculos Para começar, introduzimos um sistema de coordenadas xy no sistema, como mostra a Fig. 9-13b, com o sentido negativo do eixo x coincidindo com o sentido de \vec{v}_{fA} . O eixo x faz 80° com a direção de \vec{v}_{fC} e 50° com a direção de \vec{v}_{fB} .

$$P_{iy} = P_{fy}$$

onde o índice i indica o valor inicial (antes da explosão), o índice f o valor final e o índice y a componente y de \vec{P}_i ou \vec{P}_f .

A componente P_{iy} do momento linear inicial é zero, pois o coco está inicialmente em repouso. Para obter P_{fy} , determinamos a componente y do momento linear final de cada pedaço usando a versão para a componente y da Eq. 9-22 ($p_y = mv_y$):

$$p_{fA,y} = 0,$$

$$p_{fB,y} = -0,20Mv_{fB,y} = -0,20Mv_{fB} \text{ sen } 50^\circ,$$

$$p_{fC,y} = 0,30Mv_{fC,y} = 0,30Mv_{fC} \text{ sen } 80^\circ.$$

(Note que $p_{fA,y} = 0$ por causa de nossa escolha de eixos.) A Eq. 9-48 pode ser escrita na forma

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5,0$ m/s, temos:

$$0 = 0 - 0,20Mv_{fB} \text{ sen } 50^\circ + (0,30M)(5,0 \text{ m/s}) \text{ sen } 80^\circ,$$

e, portanto,

$$v_{fB} = 9,64 \text{ m/s} \approx 9,6 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é a velocidade escalar do pedaço A?

$$p_{fA,x} = -0,50Mv_{fA},$$

$$p_{fB,x} = 0,20Mv_{fB,x} = 0,20Mv_{fB} \cos 50^\circ,$$

$$p_{fC,x} = 0,30Mv_{fC,x} = 0,30Mv_{fC} \cos 80^\circ.$$

A Eq. 9-49 pode ser escrita na forma

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5,0$ m/s e $v_{fB} = 9,64$ m/s, temos:

$$0 = -0,50Mv_{fA} + 0,20M(9,64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ + 0,30M(5,0 \text{ m/s}) \cos 80^\circ,$$

e, portanto,

$$v_{fA} = 3,0 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

9.8 Momento e Energia Cinética em Colisões

Em um sistema fechado e isolado, se dois corpos colidem e a energia cinética total não é alterada pela colisão, a energia cinética do sistema é conservada (é a mesma antes e depois da colisão). Esse tipo de colisão é chamado de *colisão elástica*.

Se, durante a colisão, parte da energia é transferida de energia cinética para outras formas de energia, como energia térmica ou energia sonora, a energia cinética do sistema não é conservada. Esse tipo de colisão é chamado de *colisão inelástica*.

9.9 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

Representação esquemática de uma colisão inelástica.

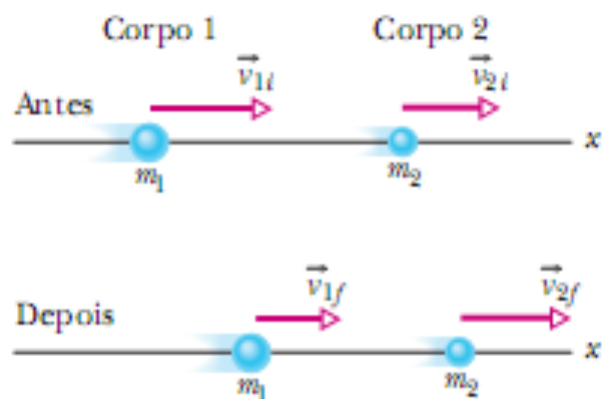


Figura 9-14 Os corpos 1 e 2 se movem ao longo de um eixo x , antes e depois de sofrerem uma colisão inelástica.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Em uma colisão perfeitamente inelástica, os corpos permanecem unidos após a colisão.

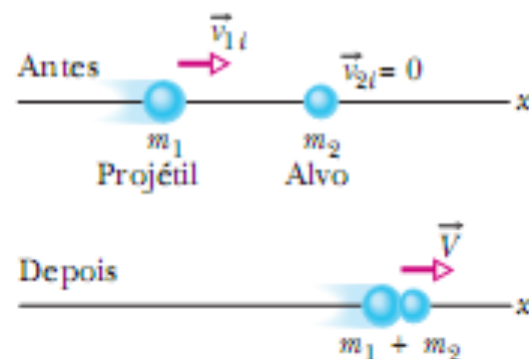


Figura 9-15 Uma colisão perfeitamente inelástica entre dois corpos. Antes da colisão, o corpo de massa m_2 está em repouso e o corpo de massa m_1 está se movendo. Após a colisão, os corpos unidos se movem com a mesma velocidade \vec{V} .

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V$$

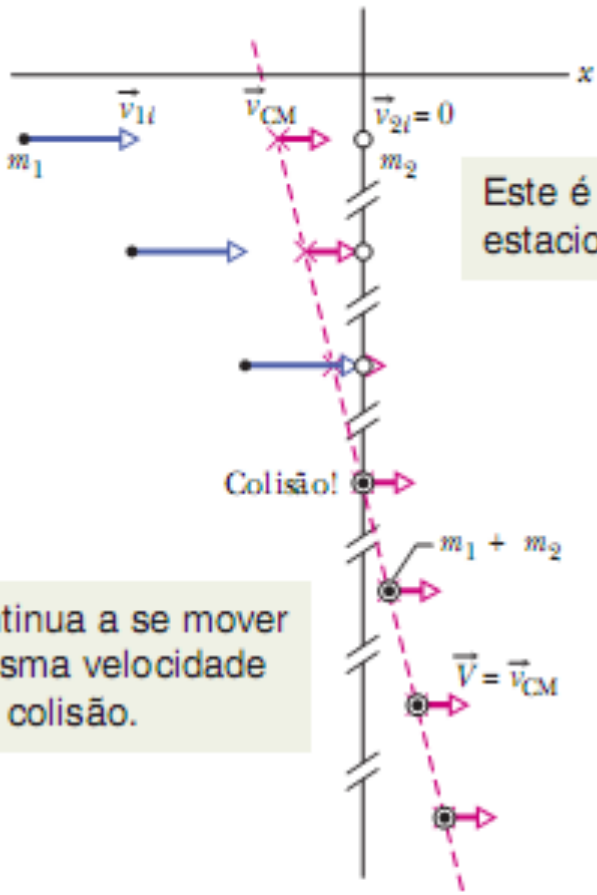
$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

9.9 Colisões inelásticas em Uma Dimensão: Velocidade do Centro de Massa

O CM dos dois corpos está entre eles e se move com velocidade constante.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Este é o projétil.



Este é o alvo estacionário.

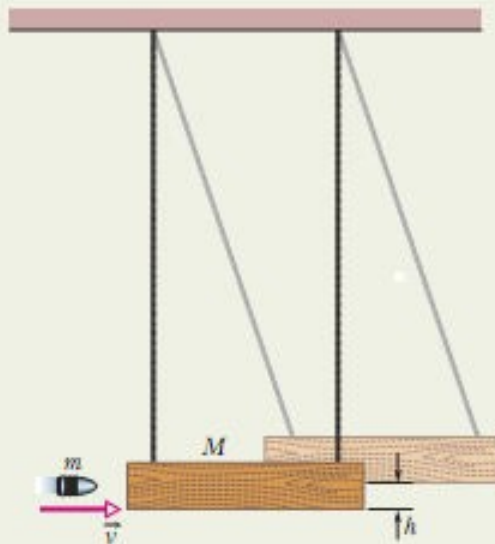
O CM continua a se mover com a mesma velocidade depois da colisão.

Figura 9-16 (a) Alguns instantâneos do sistema de dois corpos da Fig. 9-15, no qual ocorre uma colisão perfeitamente inelástica. O centro de massa do sistema é mostrado em cada instantâneo. A velocidade \vec{v}_{CM} do centro de massa não é afetada pela colisão. Como os corpos permanecem juntos após a colisão, a velocidade comum \vec{V} é igual a \vec{v}_{CM} .

Exemplo: Conservação do momento

O pêndulo balístico era usado para medir a velocidade dos projéteis quando não havia sensores eletrônicos. A versão mostrada na Fig. 9-17 é composta por um grande bloco de madeira de massa $M = 5,4 \text{ kg}$ pendurado em duas cordas compridas. Uma bala de massa $m = 9,5 \text{ g}$ é disparada contra o bloco e fica incrustada na madeira. Com o impulso, o pêndulo descreve um arco de circunferência, fazendo com que o centro de massa do sistema *bloco-bala* atinja uma altura máxima $h = 6,3 \text{ cm}$. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

Dois eventos acontecem em sucessão: a bala colide com o bloco e o sistema bala-bloco sobe uma distância h .



Como a colisão dura muito pouco tempo, podemos fazer duas importantes suposições:

- (1) Durante a colisão, a força gravitacional e as forças das cordas sobre o bloco estão em equilíbrio. Isso significa que, durante a colisão, o impulso externo sobre o sistema bala-bloco é zero e, portanto, o sistema está isolado e o momento linear é conservado.
- (2) A colisão é unidimensional, no sentido de que a direção do movimento da bala imediatamente após a colisão é a mesma da bala antes da colisão.

$$V = \frac{m}{m + M} v.$$

Como a bala e o bloco agora oscilam juntos, a energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada:

Combinando os resultados:

$$\begin{aligned} v &= \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} && (9-61) \\ &= \left(\frac{0,0095 \text{ kg} + 5,4 \text{ kg}}{0,0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,063 \text{ m})} \\ &= 630 \text{ m/s.} && (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

9.10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

Representação esquemática de uma colisão elástica com um alvo estacionário.

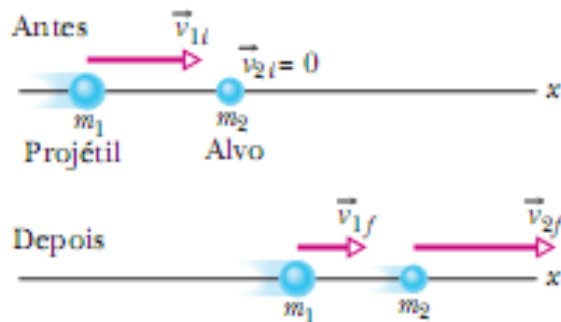


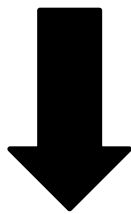
Figura 9-18 O corpo 1 se move ao longo de um eixo x antes de sofrer uma colisão elástica com o corpo 2, que está inicialmente em repouso. Os dois corpos se movem ao longo do eixo x após a colisão.

Nas colisões elásticas, a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode mudar, mas a energia cinética total do sistema permanece a mesma.

9.10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão: Alvo Estacionário

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (\text{momento linear})$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{energia cinética})$$



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Representação esquemática de uma colisão elástica com um alvo estacionário.

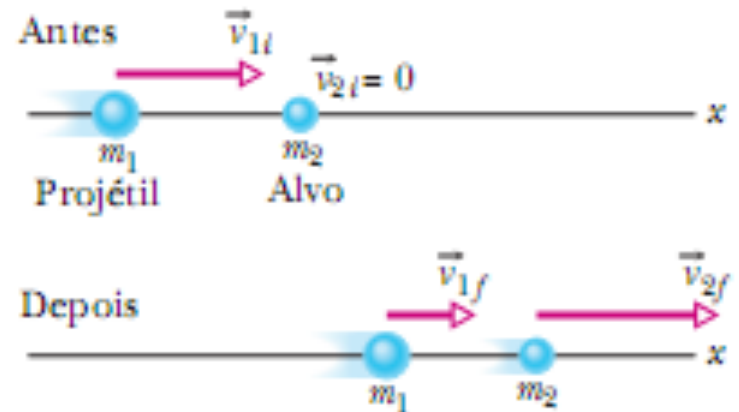


Figura 9-18 O corpo 1 se move ao longo de um eixo x antes de sofrer uma colisão elástica com o corpo 2, que está inicialmente em repouso. Os dois corpos se movem ao longo do eixo x após a colisão.

9.10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão: Alvo em Movimento

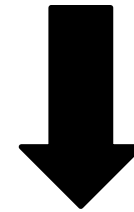
Representação esquemática de uma colisão com um alvo em movimento.



Figura 9-19 Dois corpos prestes a sofrer uma colisão elástica unidimensional.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f},$$

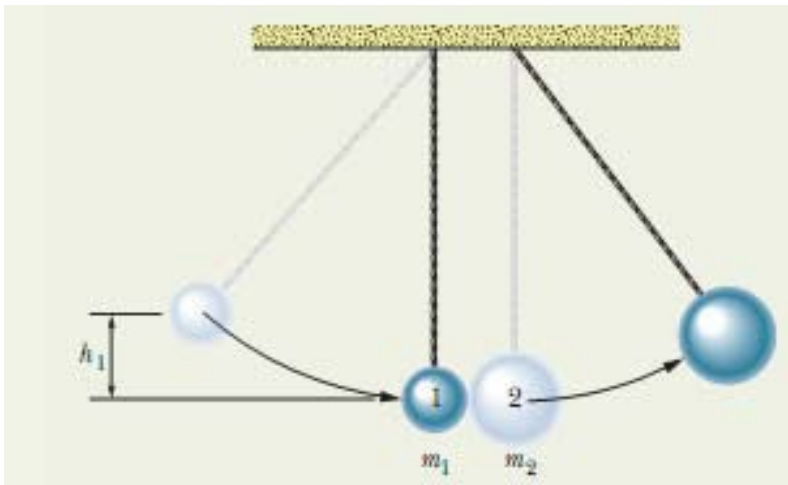
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}.$$

Exemplo: Dois pêndulos

Duas esferas metálicas, inicialmente suspensas por cordas verticais, apenas se tocam, como mostra a Fig. 9-20. A esfera 1, de massa $m_1 = 30$ g, é puxada para a esquerda até a altura $h_1 = 8,0$ cm e liberada a partir do repouso. Na parte mais baixa da trajetória, sofre uma colisão elástica com a esfera 2, cuja massa é $m_2 = 75$ g. Qual é a velocidade v_{1f} da esfera 1 imediatamente após a colisão?



1ª etapa Quando a esfera 1 desce, a energia mecânica do sistema esfera-Terra é conservada. (A energia mecânica não é alterada pela força da corda sobre a esfera 1 porque essa força é perpendicular à trajetória da esfera.)

Cálculo Vamos tomar o nível mais baixo como o nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, a energia cinética da esfera 1 no nível mais baixo é igual à energia potencial gravitacional do sistema quando a esfera 1 está na altura h_1 , ou seja,

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = m_1gh_1,$$

que podemos resolver para obter a velocidade v_{1i} da esfera 1 imediatamente antes da colisão:

$$\begin{aligned}v_{1i} &= \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,080 \text{ m})} \\ &= 1,252 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

2ª etapa Além de supor que a colisão é elástica, podemos fazer outras duas suposições. Primeiro, podemos supor que a colisão é unidimensional, já que os movimentos das esferas são aproximadamente horizontais nos momentos anterior e posterior à colisão. Segundo, como a colisão dura pouco tempo, podemos supor que o sistema de duas esferas é fechado e isolado. Isso significa que o momento linear total do sistema é conservado.

$$\begin{aligned}v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ &= \frac{0,030 \text{ kg} - 0,075 \text{ kg}}{0,030 \text{ kg} + 0,075 \text{ kg}} (1,252 \text{ m/s}) \\ &= -0,537 \text{ m/s} \approx -0,54 \text{ m/s.}\end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo significa que a esfera 1 se move para a esquerda imediatamente após a colisão.

9.11 Colisões em Duas Dimensões

ém $\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}.$

Se é elástica, $K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}.$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2,$$

$$0 = -m_1 v_{1f} \text{sen} \theta_1 + m_2 v_{2f} \text{sen} \theta_2.$$

E tamb

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Nesta colisão elástica de raspão, o momento e a energia cinética são conservados.

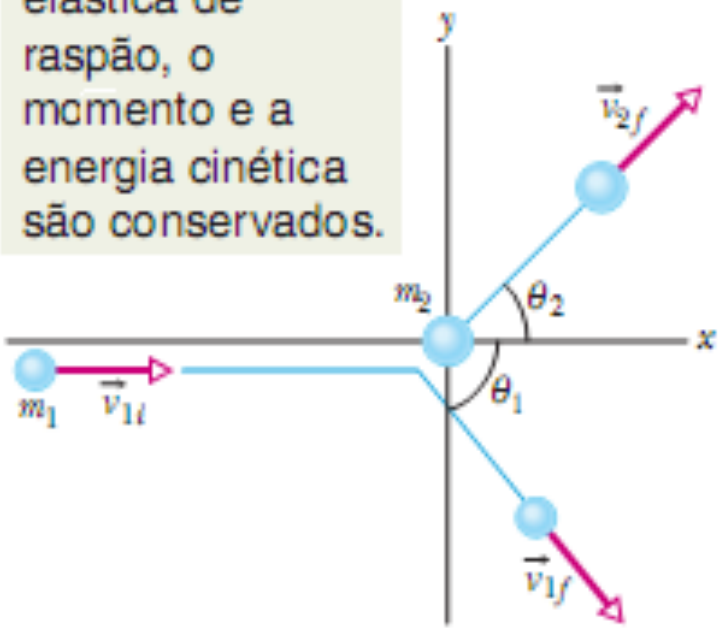


Figura 9-21 Uma colisão elástica de raspão entre dois corpos. O corpo de massa m_2 (o alvo) está inicialmente em repouso.

9.12 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

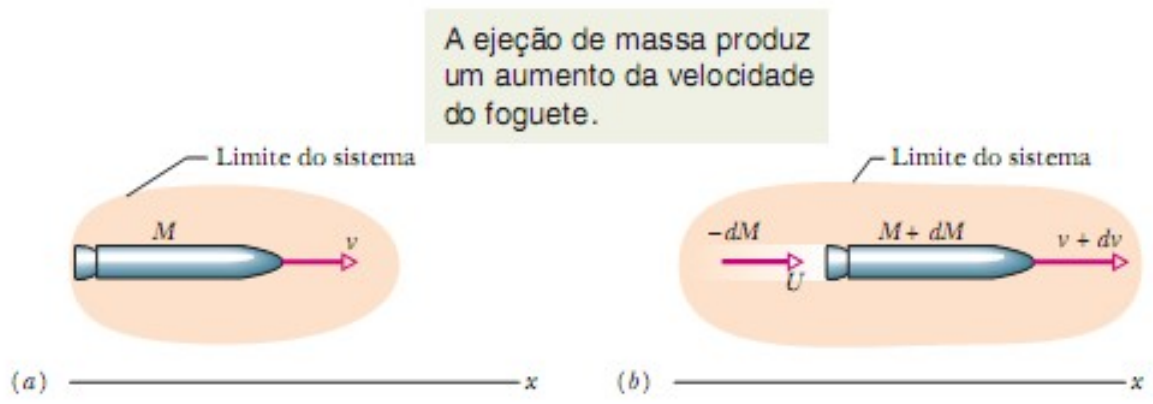


Figura 9-22 (a) Um foguete de massa M acelerando no instante t , do ponto de vista de um referencial inercial. (b) O mesmo foguete no instante $t + dt$. Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt são mostrados na Figura.

Nosso sistema é formado pelo foguete e os produtos de exaustão ejetados no intervalo dt . Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear total é conservado no intervalo dt .

$$P_i = P_f, \quad \Rightarrow \quad Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{velocidade do foguete em} \\ \text{relação ao referencial} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{velocidade do foguete} \\ \text{em relação aos produtos} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{velocidade dos produtos em} \\ \text{relação ao referencial} \end{array} \right)$$

$$(v + dv) = v_{\text{rel}} + U, \quad \Rightarrow \quad -\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt}, \quad \Rightarrow \quad Rv_{\text{rel}} = Ma$$

$$U = v + dv - v_{\text{rel}}$$

9.12 Sistemas de Massa Variável: Cálculo da Velocidade

$$dv = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{M},$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

onde M_i é a massa inicial do foguete e M_f é a massa. Calculando as integrais, obtemos

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

para o aumento da velocidade do foguete quando a massa muda de M_i para M_f .

Exemplo: Empuxo e aceleração de um foguete

Um foguete cuja massa inicial M_i é 850 kg consome combustível a uma taxa $R = 2,3$ kg/s. A velocidade v_{rel} dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800 m/s.

(a) Qual é o empuxo do motor?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 9-87, o empuxo T é igual ao produto da taxa de consumo de combustível R pela velocidade relativa v_{rel} dos gases expelidos.

Cálculo Temos:

$$\begin{aligned} T &= Rv_{\text{rel}} = (2,3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) \\ &= 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é a aceleração inicial do foguete?

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar o empuxo T de um foguete ao módulo a da aceleração resultante através da equação $T = Ma$,

onde M é a massa do foguete. À medida que o combustível é consumido, M diminui e a aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de a , usamos o valor inicial da massa, M_i .

Cálculo Temos:

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7,6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete deve ter uma aceleração inicial maior que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Isso equivale a dizer que o empuxo T do motor do foguete deve ser maior que a força gravitacional a que o foguete está submetido no instante do lançamento, que neste caso é igual a $M_i g = (850 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 8330 \text{ N}$. Como o empuxo do nosso foguete (6400 N) não é suficiente, ele não poderia ser lançado da superfície da Terra.