12- Um sistema oscilatório bloco-mola possui uma energia mecânica de 1,0 J, uma amplitude de 10cm e uma velocidade máxima de 1,2 m/s. Determine (a) a constante elástica, (b) a massa do bloco e (c) a frequência de oscilação.

(a) $K = ?$

A energia mecânica de um sistema massa mola, que é um MHS é dada pela equação:

$$E = \frac{1}{2} K X_m^2$$

Então, podemos determinar a constante elástica pela energia, isolando a constante K, obtemos:

$$K = \frac{2E}{X_m^2}$$

$$K = \frac{2 \cdot 1\,J}{(0,1\,m)^2}$$

$$\boxed{K = 200\,N/m}$$

(b) $m = ?$

A energia do bloco quando ele passa pela posição de equilíbrio (com velocidade máxima, $v_m = 1,2\,m/s$) é puramente cinética, ou seja;

$$E = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$m = \frac{2E}{v_m^2}$$

$$\boxed{m = 1,39\,kg}$$

(c) $f = ?$

A frequência angular e a frequência estão relacionadas por:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Mas temos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Logo:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

onde K e m são a constante elástica e a massa respectivamente (calculados nos itens (a) e (b). Assim temos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200\ N/m}{1,39\ kg}}$$

$$\boxed{f = 1,91\ Hz}$$

13. A figura 30 mostra o poço de energia potencial unidimensional no qual se encontra uma partícula de 2kg (a função U(x) é da forma bx^2 e a escala do eixo vertical é definida $U_s = 2{,}0J$). (a) Se a partícula passa pela posição de equilíbrio com uma velocidade 85cm/s, ela retorna antes de chegar ao ponto x=0,15m? (b) Caso a resposta seja afirmativa, calcule a posição do ponto de retorno. Caso a resposta seja negativa, calcule a velocidade da partícula no ponto x=15cm. (18)

(a) Ao passar pela posição de equilíbrio a energia potencial é nula, logo a energia da partícula é:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = \frac{1}{2} 2Kg \cdot (0{,}85\,m/s)^2$$

$$\boxed{E = 0{,}72\,J}$$

Podemos verificar no gráfico que na posição x = 10cm temos U=0,5J, logo usando que $U(x) = bx^2$ temos:

$$U(x) = bx^2$$

$$0{,}5J = b \cdot (10cm)^2$$

$$\boxed{b = 5 \times 10^{-3}\,J/cm^2}$$

A partícula irá retornar quando:

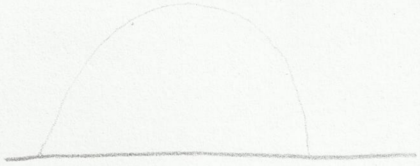
$$E - U = 0$$

$$0{,}72J - [5 \times 10^{-3} J/cm^2 \cdot x^2] = 0$$

$$\boxed{x = 12cm}$$

Logo verificamos que a partícula retorna antes de chegar a posição x=15cm, retornando na posição x=12cm.

14 - A figura 11 mostra a energia cinética K de um oscilador harmônico simples em função da posição x. A escala vertical é definida por $K_s = 4{,}0$ J. Qual é a constante elástica?



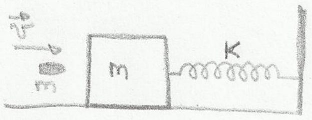
Verificamos através do gráfico (uma vez que a energia é conservada) que a energia total do sistema é 6 J, verificamos também que o deslocamento máximo (amplitude) é igual a 0,12 m. Portanto, podemos definir a energia potencial máxima igual a 6 J e calcular o valor da constante elástica.

$$E = \frac{1}{2} K x_m^2$$

$$6\,J = \frac{1}{2} K (0{,}12)^2$$

$$\boxed{K = 8{,}33 \times 10^2\ N/m}$$

15_ Um bloco de massa $M = 5,4\,kg$, em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, está ligado a um suporte rígido através de uma mola de constante elástica $k = 6000\,N/m$. Uma bala de massa $m = 9,5\,g$ e velocidade $\vec{v}$ de módulo $630\,m/s$ atinge o bloco e fica alojada nele. Supondo que a compressão da mola é desprezível até a bala se alojar no bloco, determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.



Logo após a colisão completamente inelástica entre a bala e o bloco, ambos passam a executar movimento harmônico simples como um só corpo de massa $m + M$. A velocidade do conjunto imediatamente após a colisão corresponde à velocidade máxima do MHS ($v_{máx}$). O cálculo da $v_{máx}$ é feito por meio do princípio da conservação do momento linear na coordenada x:

$$P_{xi} = P_{xf}$$

$$P_{bala,0} + P_{bloco,0} = P_{bala} + P_{bloco}$$

$$mv + 0 = m v_{máx} + M v_{máx}$$

$$v_{máx} = \frac{mv}{m+M} \qquad (1)$$

Substituindo os valores fornecidos na equação acima obtemos:

$$v_{máx} = \frac{(0,0095\,kg).(630\,m/s)}{(0,0095\,kg)+(5,4\,kg)}$$

$$\boxed{v_{máx} = 1,11\,m/s}$$

(b) Durante o MHS, a velocidade do sistema bloco + bala em função do tempo é dada por:

$$v(t) = -\omega X_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

A velocidade máxima do MHS é obtida quando $\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \pm 1$, logo:

$$v_{máx} = \omega X_m$$

$$X_m = \frac{v_{máx}}{\omega} \qquad (2)$$

Por definição, a frequência angular ω é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m'}}$$

No nosso caso $m' = m + M$, logo:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}} \qquad (3)$$

Substituindo (1) e (3) em (2):

$$X_m = \frac{mv}{m+M} \cdot \sqrt{\frac{m+M}{K}}$$

$$X_m = \frac{mv}{\sqrt{K(m+M)}} \qquad (4)$$

Deste modo substituindo os valores fornecidos no enunciado na equação (4), temos:

$$X_m = \frac{(9{,}5 \times 10^{-3}\,kg)(630\,m/s)}{\sqrt{(6000\,N/m) \cdot (9{,}5 \times 10^{-3}\,kg + 5{,}4\,kg)}}$$

$$\boxed{X_m = 3{,}3 \times 10^{-2}\,m}$$

16. Suponha que um pêndulo simples consiste em um pequeno peso de 60 g na extremidade de uma corda de massa desprezível. Se o ângulo θ entre a corda e a vertical é dado por $\theta = (0{,}0800 \text{ rad/s}) \cos[(4{,}43 \text{ rad/s})t + \phi]$, quais são (a) o comprimento do pêndulo e (b) sua energia cinética máxima?

(a) $L = ?$

Comparando a equação fornecida:

$$\theta = (0{,}0800 \text{ rad}) \cos[(4{,}43 \text{ rad/s})t + \phi]$$

Com a equação que já conhecemos, para o deslocamento da partícula em MHS:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

verificamos que $\omega = 4{,}43$ rad/s. O período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

e, consequentemente a frequência angular ω pode ser escrita como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$L = \frac{g}{\omega^2}$$

$$L = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{(4{,}43 \text{ rad/s})^2}$$ ⇒ (Usar a função radianos na calculadora)

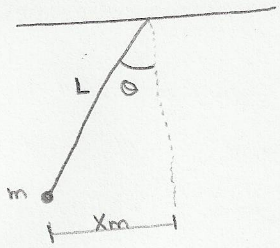
$$\boxed{L = 0{,}499 \text{ m}}$$

(b) A energia cinética máxima $K_{máx}$ é dada por:

$$K_{máx} = \frac{1}{2} m v_{máx} \qquad (1)$$

A velocidade máxima é

$$v_{máx} = \omega x_m \qquad (2)$$



De acordo com a figura acima, temos que a amplitude do movimento é dada por:

$$X_m = L \cdot \operatorname{sen}\theta ,$$

para pequenos ângulos temos que $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, logo:

$$X_m = L \cdot \theta_m \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$v_{máx} = \omega L \theta_m , \qquad (4)$$

onde θ_m é o ângulo máximo do movimento, ou seja, $\theta_m = 0{,}0800\,rad$. Finalmente, Subsitituindo (4) em (1) obtemos:

$$K_{máx} = \frac{1}{2} m (\omega L \theta_m)^2$$

$$K_{máx} = \frac{1}{2} (0{,}06\,kg) [(4{,}43\,rad/s) \cdot (0{,}499\,m) \cdot (0{,}800\,rad)]$$

$$\boxed{K_{máx} = 9{,}40 \times 10^{-4}\,J}$$

24

17. Um pêndulo físico consiste em uma régua de um metro cujo pivô passa por um pequeno furo feito na régua a uma distância d da marca de 50 cm. O período de oscilação é 2,5 s. Encontre d.

Do teorema dos eixos paralelos temos que:

$$I = I_{cm} + mh^2, \qquad (1)$$

onde $h = d$. Para uma régua, o momento de inércia em torno do seu centro de massa é:

$$I_{cm} = \frac{mL^2}{12} \qquad (2)$$

O período de oscilação do pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(mL^2/12) + md^2}{mgd}}$$

$$gT/4\pi^2 \pm \sqrt{d^2 T^2/2\pi^2 - L^2/3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2/12 + d^2}{gd}}$$

$$T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{(L^2/12) + d^2}{gd}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$gdT^2 = (2\pi)^2 \cdot \left[\frac{L^2}{12} + d^2\right]$$

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} d + \frac{L^2}{12} = 0$$

$$d = \frac{(gT^2/4\pi^2) \pm \sqrt{\frac{g^2T^4}{(4\pi)^2} - \frac{4L^2}{12}}}{2}$$

Substituindo os valores fornecidos na equação:

$$d = \frac{\dfrac{\left[(9{,}8\ m/s)(2{,}5\ s)^2\right]}{4\pi^2} \pm \left[\dfrac{(9{,}8\ m/s^2)^2 \cdot (2{,}5\ s)^4}{16\pi^4} - \dfrac{4 \cdot (1)^2}{12}\right]^{1/2}}{2}$$

$$d = \frac{1{,}551 \pm 1{,}441}{2}$$

Encontramos dois valores para d:

- $d = 1{,}496\,m$

e

- $d = 0{,}055\,m$

O primeiro valor encontrado para d é impossível, uma vez que $d = 1{,}5\,m > L$. Logo o valor para d é $0{,}055\,m$.

18- Na figura 13, o bloco possui massa de 1,50 kg e a constante elástica é 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b(dx/dt)$, onde $b = 230\ g/s$. O bloco é puxado 12 cm para baixo e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para a amplitude das oscilações decaírem a um terço do seu valor inicial. (b) Quantas oscilações são efetuadas pelo bloco neste tempo?

(a) A força de amortecimento do sistema é:

$$F_a = -bv$$

A equação da posição para este sistema é:

$$x(t) = x_m \cdot e^{-bt/2m} \cdot \cos(\omega' t + \phi)$$

Deseja-se saber o tempo necessário para a amplitude das oscilações decaírem a um terço de seu valor inicial, ou seja:

$$\frac{1}{3} x_m = x_m \cdot e^{-bt/2m}$$

$$e^{-bt/2m} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{bt}{2m} = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t = -\frac{2m}{b} \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{t = 14,33\ s}$$

(b) A frequência angular deste sistema é dada por:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{8\ N/m}{1,5\ kg} - \frac{(0,230\ kg/s)^2}{4 \cdot (1,5\ kg)^2}}$$

$$\boxed{\omega' = 2,31\ rad/s}$$

O período e a frequência estão relacionadas por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Logo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{2{,}31 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{T = 2{,}72 \text{ s}}$$

Lembrando que o período nos dá o tempo necessário para realizar uma oscilação completa. Logo o número de oscilações n realizadas no tempo t (tempo necessário para a amplitude decair a um terço) é:

$$n = t/T$$

$$n = \frac{14{,}33 \text{ s}}{2{,}72 \text{ s}}$$

$$\boxed{n = 5{,}27}$$

19. Pendurados em uma trave horizontal encontram-se nove pêndulos com os seguintes comprimentos: (a) 0,10, (b) 0,30, (c) 0,40, (d) 0,80, (e) 1,2, (f) 2,8, (g) 3,5, (h) 5,0 e (i) 6,2 m. Suponha que a trave efetua oscilações horizontais com frequências angulares no intervalo de 2,00 rad/s a 4,00 rad/s. Quais dos pêndulos serão (fortementes) postos em movimento?

A trave efetua oscilações horizontais com frequências angulares no intervalo de 2,00 rad/s e 4,00 rad/s. Usando que $\omega = 2\pi/T$ e que $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ podemos encontrar a faixa de comprimentos que se encaixa neste intervalo de frequência angular.

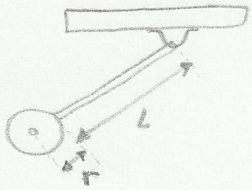
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{g/l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Logo para $\omega = 2,00$ rad/s temos que $l = 2,45$ m e para $\omega = 4,00$ rad/s o comprimento será $l = 0,613$ m. Deste modo os pêndulos que oscilarão mais fortemente serão aqueles nos quais $l = 0,80$ e $l = 1,2$ m.

20. Na figura 14, o pêndulo consiste em um disco uniforme com raio $r = 10,0$ cm e massa de 500g preso a uma haste uniforme com comprimento $L = 500$ mm e massa $m = 270$g. (a) Calcule o momento de inércia em torno do ponto do pivô. (b) Qual é a distância entre o ponto de pivô e o centro de massa do pêndulo? (c) Calcule o período de oscilação



(a) O momento de inércia do pêndulo (I) é igual à soma dos momentos de inércia da vara (I_{vara}) e do disco (I_{disco}).

$$I = I_{vara} + I_{disco} \qquad (1)$$

O momento de inércia da vara (ver Halliday vol. 1) é:

$$I_{vara} = \frac{mL^2}{3} \qquad (2)$$

Um disco uniformemente articulado em seu centro tem um momento de inércia:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} m r^2$$

O disco roda em torno de um ponto que esta deslocado de seu centro por uma distância $r+L$, assim de acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I_{disco} = I_{cm} + m(L+r)^2$$

$$I_{disco} = \frac{mr^2}{2} + m(L+r)^2 \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos o momento de inércia em torno do pivô, tal que:

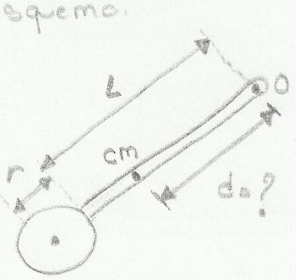
$$I = \frac{mL^2}{3} + m\left[\frac{r^2}{2} + (L+r)^2\right]$$

$$I = [0,0225 + 0,5\,(0,005 + 0,36)]\ Kg \cdot m^2$$

$$\boxed{I = 0,205\ Kg \cdot m^2}$$

(b) $d = ?$

Consideremos o esquema:



A coordenada do centro de massa é dada por:

$$(m+M)x_{cm} = m x_1 + M x_2$$

$$(m+M)\,d = \frac{mL}{2} + M(L+r)$$

$$d = \frac{1}{(m+M)}\left[\frac{mL}{2} + M(L+r)\right]$$

$$d = \frac{1}{0{,}770\ Kg}\left[0{,}0675\ m.\ Kg + 0{,}3\ m\ Kg\right]$$

$$\boxed{d = 0{,}477\,m}$$

(c) $T = ?$

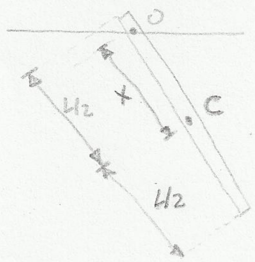
O período de oscilação deste pêndulo físico vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m+M)dg}}$$

$$\boxed{T = 1{,}499\ s}$$

51

Na figura 15, uma haste de comprimento $L = 1,85\ m$ oscila como um pêndulo físico.
(a) Que valor da distância x entre o centro de massa da haste e o seu ponto de pivô
O fornece o menor período? (b) Qual é este período mínimo?



Tomamos a distância entre o ponto O e o centro de massa C (assumindo como sendo o centro geométrico) como sendo x. Aplicando o teorema dos eixos paralelos:

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m x^2 \qquad (1)$$

O período do pêndulo físico é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$T = 2\pi \left[\left(\frac{1}{12} m L^2 + m x^2\right) \cdot \frac{1}{mgx}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi \left[\frac{L^2 + 12x^2}{12 g x}\right]^{1/2} \qquad (3)$$

$$\frac{12 g T^2}{4\pi^2} = \frac{L^2 + 12 x^2}{x}$$

Se T é um valor mínimo $\frac{12gT^2}{4\pi^2}$ também será, logo fazendo:

$$\frac{d\left[\frac{12gT^2}{4\pi^2}\right]}{dx} = 0$$

Teremos:

$$\frac{+24x^2 - L^2 - 12x^2}{x^2} = 0$$

$$12x^2 = L^2$$

$$x = \sqrt{\frac{L^2}{12}}$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

Logo a menor periodo é fornecido quando:

$$x = \frac{1{,}85}{\sqrt{12}}$$

$$\boxed{x = 0{,}53m}$$

(b) Substituindo o valor de x na equação (3) encontraremos o valor do periodo minimo:

$$T = 2\pi \left[\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi \left[\frac{3{,}42 + 3{,}37}{62{,}328}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{T = 2{,}1\ s}$$