1- Qual é a aceleração máxima de uma plataforma que oscila com amplitude de 2,2 cm e uma frequência de 6,6 Hz?

A aceleração máxima é dada por:

$$a_m = \omega^2 x_m \qquad (1)$$

onde ω é a frequência angular e x_m é a amplitude do movimento. A frequência angular e a frequência são relacionadas por:

$$\omega = 2\pi f \qquad (2)$$

Logo, temos que:

$$\omega = 2\pi \cdot (6{,}6\ Hz) \qquad (3)$$

Deste modo podemos calcular a aceleração máxima, onde:

$$a_m = [2\pi \cdot (6{,}6\ Hz)]^2 \cdot (0{,}022\ m)$$

$$a_m = 37{,}8\ m \cdot Hz^2$$

Lembrando que:

$$Hz = s^{-1},$$

temos:

$$\boxed{a_m = 37{,}8\ m/s^2}$$

2. Uma partícula com massa de $1{,}0 \times 10^{-20}$ kg descreve um movimento harmônico simples com um período de $1{,}0 \times 10^{-5}$ s e uma velocidade máxima de $1{,}0 \times 10^{3}$ m/s. Calcule (a) a frequência angular e (b) o deslocamento maximo da partícula.

Dados fornecidos:

$m = 1 \times 10^{-20}$ kg

$T = 1 \times 10^{-5}$ s

$v_m = 1 \times 10^{3}$ m/s

(a) $\omega = ?$

Solução:

A frequência angular se relaciona com o período por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

logo temos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \times 10^{-5}\,s}$$

$$\boxed{\omega = 6{,}28 \times 10^{5}\ \text{rad/s}}$$

(b) O deslocamento máximo?

O deslocamento máximo é igual a amplitude do movimento (x_m) e se relaciona com a velocidade máxima (v_m) e com a frequência angular, tal que:

$$v_m = \omega x_m$$

$$x_m = \frac{v_m}{\omega}$$

$$x_m = \frac{1 \times 10^{3}\ \text{m/s}}{6{,}28 \times 10^{5}\ \text{rad/s}}$$

$$\boxed{x_m = 1{,}59 \times 10^{-3}\,\text{m}}$$

3- Em um barbeador elétrico a lâmina se move para a frente e para trás, ao longo de uma distância de 2mm, em um movimento harmônico simples com uma frequência de 120 Hz. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima da lâmina e (c) o módulo da aceleração máxima da lâmina.

(a) A amplitude é igual a metade do deslocamento, ou seja, $X_m = 1\,mm$.

(b) $v_m = ?$

A velocidade máxima v_m está relacionada com a amplitude (X_m) e a frequência angular (ω), por:

$$v_m = \omega X_m \qquad (1),$$

lembrando que:

$$\omega = 2\pi f \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$v_m = 2\pi f X_m \qquad (3)$$

Do enunciado temos: $f = 120\ Hz$ e $X_m = 0{,}001\,m$, substituindo estes valores em (3), temos:

$$v_m = 2\pi\,(120\ Hz)(0{,}001\,m)$$

$$\boxed{v_m = 0{,}75\ m/s}$$

(c) $a_m = ?$

O módulo da aceleração máxima (a_m) é dado por:

$$a_m = \omega^2 X_m$$

$$a_m = (2\pi f)^2 X_m$$

$$a_m = [2\pi\,(120\ Hz)]^2 \cdot 0{,}001\,m$$

$$\boxed{a_m = 5{,}68 \times 10^2\ m/s^2}$$

4. Do ponto de vista das oscilações verticais, um automóvel pode ser considerado como estando apoiado em quatro molas iguais. As molas de um certo carro são ajustadas de tal forma que as oscilações têm uma frequência de 3 Hz. (a) Qual é a constante elástica de cada mola se a massa do carro é 1450 kg e está igualmente distribuída pelas molas? (b) Qual será a frequência de oscilações se cinco passageiros pesando, em média, 73 kg entrarem no carro e a distribuição de massa continuar uniforme?

(a) $K = ?$

A constante elástica K está relacionada com a frequência angular (w) e com a massa (m) por:

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$K = w^2 m$$

Considerando que cada mola suporte um quarto da massa do carro (m_{car}), temos:

$$K = \frac{1}{4} m_{car} w^2,$$

lembrando que $w = 2\pi f$,

$$K = \frac{1}{4} m_{car} \cdot (2\pi f)^2$$

$$K = \frac{1}{4} (1450\ kg) \cdot [2\pi \cdot (3\ Hz)]^2$$

$$K = 1{,}29 \times 10^5\ Kg \cdot Hz^2$$

Lembrando que:

- $Hz = s^{-1}$
- $N = Kg \cdot m/s^2$

Temos:

$$\boxed{K = 1{,}29 \times 10^5\ N/m}$$

(b) A massa total do sistema é igual a soma da massa do carro (m_{car}) e a massa dos passageiros ($m_p = 5 \cdot (73\,Kg)$), ou seja,

$$m_t = m_{car} + m_p$$

$$m_t = 1450\,Kg + [5 \cdot (73\,Kg)]$$

$$\boxed{m_t = 1815\,Kg}$$

No item (a) verificamos que a constante elastica de cada mola é igual a $1{,}29 \times 10^5\,N/m$. Consideramos que a massa total seja uniformemente distribuída, ou seja, cada mola suporta um quarto da massa total. A frequência angular será:

$$w = \sqrt{\frac{K}{m_t/4}}$$

$$w = \sqrt{\frac{1{,}29 \times 10^5\,N/m}{(1815\,Kg)/4}}$$

$$\boxed{w = 16{,}86\ rad/s}$$

A frequência angular e a frequência estão relacionados por:

$$w = 2\pi f$$

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

$$f = \frac{16{,}86}{2\pi}\ rad/s$$

$$\boxed{f = 2{,}68\ Hz}$$

5. Um sistema oscilatório bloco-mola oscilante leva 0,75 s para começar a repetir seu movimento. Determine (a) o período, (b) a frequência em hertz e (c) a frequência angular em radianos por segundo.

(a) $T = ?$

O período é o tempo necessário para completar uma oscilação, ou seja, o período do sistema é $T = 0{,}75\,s$.

(b) $f = ?$

A frequência e o período estão relacionados por:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{0{,}75\,s}$$

$$\boxed{f = 1{,}33\ Hz}$$

(c) $\omega = ?$

A frequência angular está relacionada com o período (T) ou a frequência (f) por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Obtemos então:

$$\omega = \frac{2\pi}{0{,}75\,s} = 2\pi \cdot (1{,}33\ Hz)$$

$$\boxed{\omega = 8{,}38\ rad/s}$$

6- Um alto-falante produz um som musical através das oscilações de um diafragma cuja amplitude é limitada a $1\mu m$. (a) Para que frequência o módulo a da aceleração do diafragma é igual a g? (b) Para ~~que~~ frequências maiores, a é maior ou menor que g?

O módulo da aceleração máxima é dado por:

$$a_m = \omega^2 x_m , \qquad (1)$$

onde ω é a frequência angular e x_m é a amplitude do movimento.

(a) A frequência angular para que o módulo da aceleração máxima seja igual a g é dado por:

$$g = \omega^2 x_m \qquad (2)$$

$$\omega = \sqrt{g/x_m} \qquad (3)$$

Lembrando que,

$$\omega = 2\pi f \qquad (4)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (5)$$

Deste modo, a frequência para que o módulo da aceleração máxima seja igual a g é dada por:

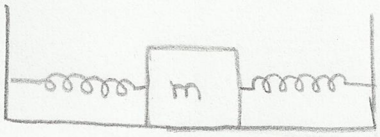
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_m}} \qquad (6)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9,8\,m/s^2}{1\times 10^{-6}\,m}}$$

$$\boxed{f = 498,23\ Hz}$$

(b) Observando a equação (6), verificamos que para obtermos frequências maiores a aceleração máxima deve ser maior que g, ou seja, $a_m > g$.

7. Na figura 9 duas molas iguais, de constante elástica 7580 N/m, estão ligados a um bloco de massa 0,245 kg. Qual é a frequência de oscilação no piso sem atrito?



Quando o bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio, a força líquida exercida pelas molas é $F = -2KX$, atuando numa direção de modo fazer com que o bloco retorne a sua posição de equilíbrio $(x=0)$. Temos que $a = d^2x/dt^2$, logo usando a segunda lei de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2KX \qquad (1)$$

$+ X_m w \cdot sen.(\ldots)$

$- X_m w^2 \cos$

Substituindo na equação acima que $X = X_m \cos(wt+\varnothing)$,

$$m\frac{d^2[X_m \cos(wt+\varnothing)]}{dt} = -2K[X_m \cos(wt+\varnothing)]$$

$$-mw^2 X_m \cos(wt+\varnothing) = -2K\,X_m \cos(wt+\varnothing)$$

$4\pi^2 f^2 = \frac{2K}{m}$

$$mw^2 = 2K$$

$f = \frac{1}{2\pi^2}\frac{K}{m}$

$$w^2 = \frac{2K}{m} \qquad (2)$$

A frequência e a frequencia angular estão relacionadas por:

$$w = 2\pi f \qquad (3)$$

Substituindo (2) em (3), obtemos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{m}} \qquad (4)$$

Usando os dados fornecidos na equação acima, obtemos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(7580\ N/m)}{0{,}245\ kg}}$$

$\boxed{f = 39{,}59\ Hz}$ ⇒ Frequência de oscilação.

8- Um oscilador é formado por um bloco preso a uma mola ($K = 400$ N/m). Em um certo instante t a posição (medida a partir da posição de equilíbrio do sistema), a velocidade e a aceleração são $x = 0,1$ m, $v = -13,6$ m/s e $a = -123$ m/s². Calcule (a) a frequência de oscilação, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude do movimento.

(a) $f = ?$

Temos que:

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{123\,m/s^2}{0,1\,m}}$$

$$\omega = 35,07\ rad/s$$

A frequência angular e a frequência estão relacionados por:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{35,07}{2\pi}\ rad/s$$

$$\boxed{f = 5,58\ Hz}$$

(b) $m = ?$

Temos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$m = \frac{K}{\omega^2}$$

$$m = \frac{400\ N/m}{(35,07\ rad/s)^2}$$

$$\boxed{m = 0,325\ Kg}$$

(c) $x_m = ?$

Vimos que a energia mecânica de um oscilador linear se conserva e é dada por:

$$E = \frac{1}{2} K x_m^2 \qquad (1)$$

No instante mencionado, a energia pode ser também expressa como:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$\frac{1}{2} K x_m^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

0,15028

$$x_m^2 = \frac{m}{K} v^2 + x^2 \qquad (3)$$

Substituindo os valores fornecidos na equação acima, obtemos:

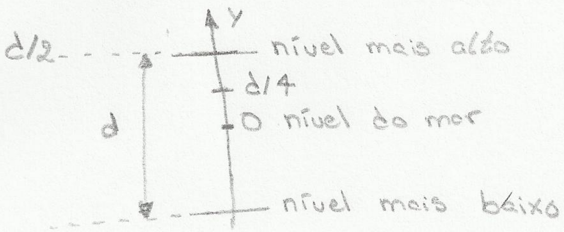
$$x_m^2 = \frac{0{,}325\,kg}{400\,N/m} \cdot (-13{,}6\,m/s)^2 + (0{,}1\,m)^2$$

$$x_m^2 = 0{,}15 + 0{,}01$$

$\boxed{x_m = 0{,}400\,m}$ ⇒ amplitude do movimento.

9_ Em um certo ancoradouro as marés fazem com que a superfície do oceano suba e desça uma distância d (do nível mais alto ao nível mais baixo) em um movimento harmônico simples com período de 12,5 h. Quanto tempo é necessário para que a água desça uma distância de 0,25 d a partir do nível mais alto?

Consideremos o esquema abaixo:



Pelo esquema, deduz-se que a amplitude do movimento é $y_m = d/2$. A equação do movimento harmônico simples relativo à oscilação da maré é:

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (1)$$

Para simplificar o cálculo vamos supor que $\phi = 0$. A frequência angular ω pode ser obtida através do período T, fornecido no enunciado, tal que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{12{,}5\,h}$$

$$\omega = 0{,}5026 \text{ rad/h} \qquad (2)$$

Logo podemos escrever (1) como:

$$y(t) = \frac{d}{2}\cos[(0{,}5026 \text{ rad/h})t] \qquad (3)$$

No instante $t_0 = 0\,s$, a posição do nível do mar é máxima, ou seja, $y(0) = d/2$. A partir daí, a maré começa a descer, queremos saber o tempo gasto para o nível baixar de $y(0) = d/2$ até $y(1) = d/4$

$$y(1) = \frac{d}{4} = \frac{d}{2}\cos[(0{,}5026 \text{ rad/h})t]$$

$$\frac{1}{2} = \cos[(0{,}5026 \text{ rad/h})t]$$

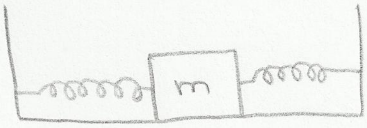
$$t = \frac{1}{0{,}5026 \text{ rad/h}} \cdot \cos^{-1} 0{,}5$$

$$t = \frac{1}{0{,}5026 \text{ rad/h}} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{t = 2{,}083\ h}$

Obs.: A calculadora deve estar na função radianos durante este calculo.

10. Na figura 9 duas molas estão presas a um bloco que pode oscilar em piso sem atrito. Se a mola da esquerda é removida o bloco oscila com uma frequência de 30 Hz. Se a mola removida é a da direita o bloco oscila com uma frequência de 45 Hz. Com que frequência o bloco oscila se as duas molas estão presentes?



Consideremos as constantes elasticas das molas como sendo k_1 e k_2. Quando o bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio, o módulo da força líquida exercida pelas molas é $|k_1x + k_2x|$, atuando em uma direção de modo a fazer o mesmo retornar para sua posição de equilíbrio ($x = 0$). Temos que $a = d^2x/dt^2$, logo de acordo com a segunda lei de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x \qquad (1)$$

Substituindo que $x = x_m\cos(\omega t + \phi)$, na equação acima temos:

$$m\frac{d^2(x_m\cos(\omega t+\phi))}{dt^2} = (-k_1 - k_2)[x_m\cos(\omega t+\phi)]$$

$$-m\omega^2 x_m\cos(\omega t+\phi) = -(k_1+k_2)[x_m\cos(\omega t+\phi)]$$

$$\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m} \qquad (2)$$

A frequência e a frequência angular estão relacionadas por:

$$\omega = 2\pi f \qquad (3)$$

De (2) e (3) obtemos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \qquad (4)$$

Cada mola agindo individualmente, podem por si só produzir movimento harmônico simples de frequência:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} = 30\ Hz$$

e

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_2}{m}} = 45\,Hz$$

respectivamente. Logo, temos que:

$$K_1 = (30\,Hz)^2 \cdot (2\pi)^2 \cdot m \qquad (5)$$

e

$$K_2 = (45\,Hz)^2 \cdot (2\pi)^2 \cdot m \qquad (6)$$

Deste modo, substituindo (5) e (6) em (4), obtemos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(30\,Hz)^2 \cdot (2\pi)^2 \cdot m + (45\,Hz)^2 \cdot (2\pi^2) \cdot m}{m}}$$

$$f = \sqrt{(30\,Hz)^2 + (45\,Hz)^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

$$\boxed{f = 54{,}08\,Hz}$$

Logo se as duas molas estão presentes o bloco oscila com uma frequência de 54,08 Hz.

11- Determine a energia mecânica de um sistema bloco-mola com constante elástica de 1,3 N/cm e uma amplitude de 2,4 cm.

A energia mecânica do sistema é dada por:

$$E = \frac{1}{2} k X_m^2$$

substituindo pelos valores fornecidos temos:

$$E = \frac{1}{2} (1{,}3 \times 10^2 \, N/m) \cdot (0{,}024 \, m)^2$$

$$\boxed{E = 3{,}74 \times 10^{-2} \, J}$$