DF- IFM- UFPel

Mecânica Geral I, prof. Eduardo.

Terceira lista de questões

1) Considere o problema de Kepler, isto é, o problema de dois corpos de massas M e m tal que, se $\vec{r}$ é a posição de m em relação a M, a força sobre m é $\vec{F} = -\left(k/r^2\right)(\vec{r}/r)$, sendo $r = |\vec{r}|$ a distância entre M e m. Responda as seguintes questões: a) Considerando um referencial inercial O genérico, fora do eixo ligando M e m, Mostre que $\vec{F}$ se obtém de uma energia potencial $U(r) = -k/r$ e que o problema se reduz ao de um centro de massas a uma velocidade constante "somado" ao problema do movimento "interno" $\mu d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$, sendo $\mu = mM/(m+m)$= massa reduzida. b) Mostre que o movimento de m, em relação a M, ocorre sobre um plano. c) Expresse o problema do movimento interno, o movimento de $\vec{r}$, de m em relação a M, em termos da energia E interna, isto, é a energia total depois do desconto da energia cinética do centro de massas. Use coordenadas plano polares para $\vec{r}$. d) Faça uma análise qualitativa dos movimentos em termos do conceito de energia potencial efetiva. e) Calcule a trajetória para $E < 0$, usando a conservação de E. f) Para provar que é uma elipse a trajetória se $E < 0$, construa a equação da elipse em coordenadas polares. g) Prove a validade da lei das áreas e da lei dos períodos de Kepler.

2) Na questão 1, que espécie de cônicas aparecem se $E = 0$ e se $E > 0$? Use o resultado aqui obtido para calcular a seção diferencial de choque de Rutherford para o espalhamento de partículas alfa por núcleos de carga Ze, desprezando o efeito de recuo do núcleo.

3) Siga os passos dessa questão para colocar o problema do movimento de uma partícula num referencial não inercial. a) Mostre que se

$$\frac{\delta\vec{A}}{dt}$$

é a taxa temporal de variação de um vetor $\vec{A}$ num referencial "fixo" (de fato, inercial) e que se

$$\frac{d\vec{A}}{dt}$$

é a taxa temporal de variação de $\vec{A}$ num referencial O' girante com velocidade angular $\vec{\omega}$ vale

$$\frac{\delta\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}.$$

b) Mostre que se $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ é a velocidade de um corpo de massa m no referencial girante, com posição $\vec{r}$ em relação a esse referencial, e $\vec{a} = d^2\vec{R}/dt^2$, sendo $\vec{R}$ a posição de O' em relação a O, temos, se $\vec{F}$ é a força resultante sobre m,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - m\vec{a} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r},$$

o que prova que a segunda lei de Newton *não* vale no referencial no referencial O' se por $\vec{F}$ entendemos a interação a que está submetida a massa m, isto é, que ele é *não* inercial.

c) Aplique o resultado do item anterior ao problema de um corpo de massa m num referencial com origem num ponto O', de longitude ϕ e latitude λ, sobre a Terra. $\vec{\Omega}$ é a velocidade angular da Terra ($\left|\vec{\Omega}\right| = 2\pi/(24 \times 60 \times 60s) = 7.3 \times 10^{-5}s^{-1}$), de raio $R = 6.37 \times 10^6 m$. Mostre que se as forças sobre m são a de gravidade $m\vec{g}$ e uma força adicional $\vec{f}$, teremos aproximadamente (desde que m não esteja muito afastada da superfície da Terra)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + m\vec{g} - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{R}\right) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

sendo $\vec{R}$ a posição de O' em relação a O, fixado no centro da Terra ($\left|\vec{R}\right| = R$), ou

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + m\vec{g}_{ef} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

sendo

$$\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{R}\right)$$

a chamada gravidade *efetiva* em O. Mostre que se podemos desconsiderar os efeitos de ordem Ω^2, por serem muito pequenos, podemos aproximar $\vec{g}_{ef}$ por $\vec{g}$ e escreva em componentes as equações diferenciais do movimento de m em relação a O' como origem de um sistema cartesiano x (eixo leste), y (eixo norte) e z (eixo vertical).

4) Estime, para um ponto no equador, o "desvio para leste" de um corpo em queda livre abandonado do repouso a uma altura h.

5) Estude o exemplo 10.5 de TM (pêndulo de Foucault).

6) Solucione os seguintes problemas do capítulo 8 de TM (forças centrais): 8.1, 8.3, 8.8, 8.14.

7) Solucione os seguintes problemas do capítulo 10 de TM (referenciais não inerciais): 10.8, 10.9, 10.12.

8) Retome o exemplo 2.9 do capítulo 2 de TM (Máquina de Atwood) considerando, agora, que além das massas m_1 e $m_2 > m_1$, suspensas pelos fios, a polia tem um momento de inérica não desprezível, sendo um disco de massa m e raio R. Encontre as "tensões nos fios" e a aceleração do conjunto.

9) Acompanhando o capítulo 11 de TM (dinâmica de corpos rígidos), deduza as equações 11.120 (Equações de Euler).

10) Estude o exemplo 11.10 de TM (rotação oblíqua de uma haste de massa desprezívelcom duas massas nas pontas).

11) Estude o problema do pião simétrico livre (seção 11.10 de TM).

12) Solucione os seguintes problemas do capítulo 11 de TM (dinâmica dos corpos rígidos): 11.5, 11.7, 11.13, 11.16, 11.28.