Segunda lista de questões - Mecânica Geral I

Sugestões de respostas

1) a)

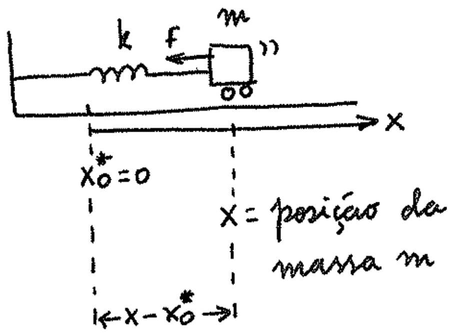


figura 1 : x_0^* = posição de m em que F = 0.

Temos ao lado uma representação do oscilador harmônico (sistema massa-mola).

Sendo $F = -k(x - x_0^*) = -kx$ (x_0^* = posição de equilíbrio = 0) a única força atuante na massa, a 2ª lei de Newton exige

$$m\frac{dV}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1).$$

Podemos dividir os dois lados da equação (1) por m:

$$\frac{m\ddot{x} + kx}{m} = \frac{0}{m} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$ Definindo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

temos então

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2).$$

Note que ω_0 não se refere a nada inicial, que seja fixado em $t = 0$. De fato, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é o que podemos chamar de um parâmetro característico do sistema, isto é, dado um sistema massa-mola, ω_0 é fixo.

2.1.2

b) Propõe-se, como solução de (2), que

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (3),$$

com x_0 e v_0 fixos, seja a solução geral de (2). Para mostrar isso temos

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \omega_0 \cos \omega_0 t \quad (3a)$$

e

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - \frac{v_0}{\omega_0} \omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

$$= -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - v_0 \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (4).$$

(3) obedece a (2) ($\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$) se, usando-se (4) e (3) para $x = x(t)$, (2) está satisfeita. De fato, usando (3) e (4),

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{-x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - v_0 \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t}_{\ddot{x} \text{ por } (4)} + \omega_0^2 \underbrace{\left(x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t\right)}_{x \text{ por } (3)}$$

$$= 0.$$

Portanto, de fato, está verificado que (3) é solução de (2).

Até esse momento, não sabemos o que são x_0 e v_0. Se escrevemos $x_0 = \alpha$ e $(v_0/\omega_0) = \beta$ a solução geral seria apenas $x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \operatorname{sen} \omega_0 t$ (5). Consideremos agora as seguintes condições iniciais:

$$\underbrace{x(t=0) = x_0}_{\text{posição inicial}} \ (6), \quad \underbrace{\dot{x}(t=0) = v_0}_{\text{velocidade inicial}} \ (7).$$

2.1.3.

Colocando (6) em (5) temos

$$x(t=0) = \alpha \underbrace{\cos \overbrace{\omega_0 \cdot 0}^{0}}_{\cos 0 = 1} + \beta \underbrace{\operatorname{sen} \overbrace{\omega_0 \cdot 0}^{0}}_{\operatorname{sen} 0 = 1} = \alpha = x_0 \quad (8).$$

Por outro lado por (5), em analogia com (3a),

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\alpha\,\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + \beta\,\omega_0 \cos \omega_0 t \quad (9).$$

Colocando agora (7) em (9) temos

$$\dot{x}(t=0) = -\alpha\,\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 \cdot 0 + \beta\,\omega_0 \cos \omega_0 \cdot 0 = \beta\,\omega_0 = v_0 \Rightarrow \beta = \frac{v_0}{\omega_0} \quad (10).$$

Então, colocando em (5) α e β dados por (8) e (10)

obtemos novamente a forma (3):

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t,$$

e descobrimos que x_0 = posição inicial e v_0 = velocidade inicial. Lembre-se que ω_0 não é <u>nada</u> "inicial".

Observe, antes de seguir adiante, que x_0 e v_0, as condições iniciais, fixam uma dada <u>energia</u> E para o movimento, dada a <u>conservação</u> de E:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}(\dot{x}(t))^2 + \frac{K}{2}(x(t))^2}_{\text{para qualquer instante}} = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{K}{2} x_0^2 = \text{energia inicial}$$

Podemos reescrever E na forma

2.1.4

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\left(v_0^2 + \frac{K}{m}x_0^2\right)}\; = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) \quad (11).$$

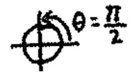
$$\frac{m}{2}v_0^2 + \frac{K}{2}x_0^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{m}{m}\frac{K}{:2}x_0^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{m}{2}\frac{K}{m}x_0^2 = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \frac{K}{m}x_0^2\right)$$

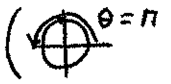
$$= \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \underbrace{\frac{2}{m}}\frac{K}{2}x_0^2\right)$$

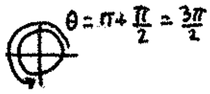
multiplicação
do 2º termo pelo inverso ($\frac{2}{m}$ no caso)
do que foi "colocado em evidência".

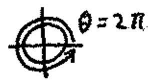
c) Se $v_0 = 0$, por conveniência, $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$. Para esboçar o gráfico basta tomar alguns valores de $\omega_0 t$:

$\omega_0 t = 0 \quad (t = 0) \Rightarrow x(t=0) = x_0 \cos 0 = 1$ (I) (),

$\omega_0 t = \frac{\pi}{2} \quad (t = \frac{\pi}{2\omega_0}) \Rightarrow x(t = \frac{\pi}{2\omega_0}) = x_0 \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = 0$ (II) (),

$\omega_0 t = \pi \quad (t = \frac{\pi}{\omega_0}) \Rightarrow x(t = \frac{\pi}{\omega_0}) = x_0 \underbrace{\cos\pi}_{-1} = -x_0$ (III) (),

$\omega_0 t = \frac{3\pi}{2} \quad (t = \frac{3\pi}{2\omega_0}) \Rightarrow x(t = \frac{3\pi}{2\omega_0}) = x_0 \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0} = 0$ (IV) (),

$\omega_0 t = 2\pi \quad (t = \frac{2\pi}{\omega_0}) \Rightarrow x(t = \frac{2\pi}{\omega_0}) = x_0 \underbrace{\cos 2\pi}_{1} = x_0$ (V) ().

Note que, para referência, foram indicados os valores de $\omega_0 t$ em questão no ciclo trigonométrico. Com os pontos acima, podemos esboçar o gráfico pedido. Temos a figura abaixo.

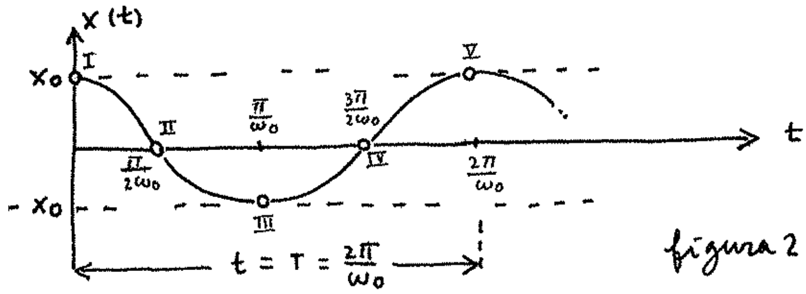


figura 2

na figura 2 os pontos I, II, III, IV e V correspondem aos que foram acima calculados.

2.1.5

A figura 2 torna evidente que $x(0) = x(T = \frac{2\pi}{\omega_0})$, isto é, que $x(t)$ é uma figura que vai se repetindo com período T. Portanto provamos que $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ depende apenas dos parâmetros do sistema (massa m e constante K) e não das condições iniciais. Um gráfico com $v_0 \neq 0$ não mudaria esse resultado.

d) Fazemos

$$x = A\cos(\omega_0 t - \phi) = A[\cos\omega_0 t \cos\phi + \operatorname{sen}\omega_0 t \operatorname{sen}\phi]$$

$$= (A\cos\phi)\cos\omega_0 t + (A\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\omega_0 t \quad (12).$$

Por comparação com $x = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t$ temos

$$A\cos\phi = x_0 \quad (13)$$

e $$A\operatorname{sen}\phi = \frac{v_0}{\omega_0} \quad (14).$$

ϕ e A (fase e amplitude, respectivamente) se obtém de (13) e (14). "Dividindo-se" (14) por (13) temos

$$\frac{A\operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega_0}} \Rightarrow tg\,\phi = \frac{x_0\omega_0}{v_0} \text{ ou } \phi = arctg\left(\frac{x_0\omega_0}{v_0}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_0}{v_0}\right) (15).$$

Por (13) e (14) temos $\cos\phi = \frac{x_0}{A}$ e $\operatorname{sen}\phi = \frac{v_0}{A\omega_0}$. Como $\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi = 1$, obtemos $\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{A\omega_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2$, ou $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$ (16).

Observe que, como o máximo valor de $\cos(\omega_0 t - \phi)$ é 1, A é o valor máximo de x. De forma semelhante, o menor valor possível de $\cos(\omega_0 t - \phi)$ é -1 e o valor mínimo de X é $-A$. Então o corpo oscila entre as posições $X = -A$ e $X = +A$. Por (12),

$$\dot{X}(t) = -A\,\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi) \quad (17).$$

Em concordância com o que dissemos, $X = +A$ quando $\omega_0 t - \phi = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots, 2\pi n$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$, pois nesse caso (nesses instantes), $\cos(\omega_0 t - \phi) = 1$. Mas ocorre que nessas circunstâncias $\operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi) = \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$. Portanto, por (17), quando $X = +A$, $\dot{X}(t) = -A\omega_0 \cdot 0 = 0$. Da mesma forma, $X = -A$ quando $\omega_0 t - \phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots, (2n+1)\pi$, com $n = 0, 1, 2, \cdots$, pois nesse caso $\cos(\omega_0 t - \phi) = -1$. Como $\operatorname{sen}[(2n+1)\pi] = 0$, $\dot{X} = 0$ também em $X = -A$. Então os pontos $X = \pm A$ são pontos de velocidade nula: pontos de retorno. Abaixo, uma figura representativa disso.

$X(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$

$X_0 = A\cos\phi = A\cos(-\phi) = X(t=0)$

(cosseno é função par do argumento)

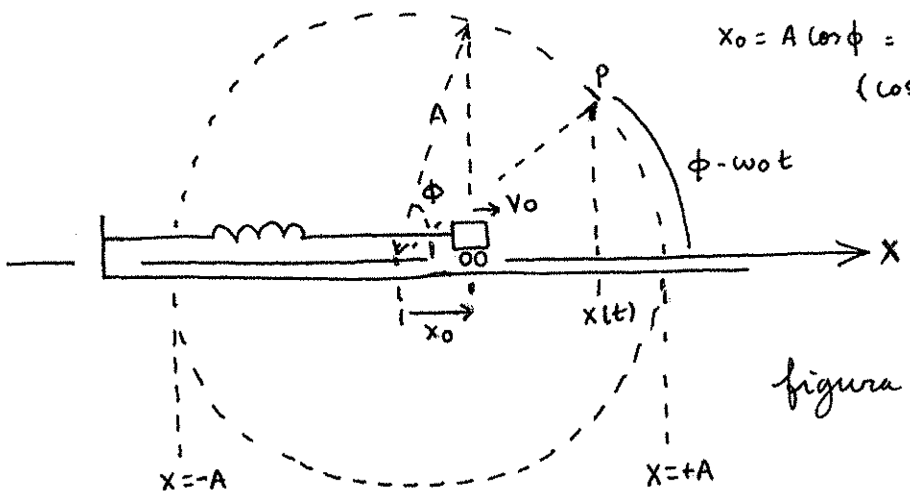


figura 3

Na figura 3 foi traçado um círculo de referência, imaginário limitando o movimento real, que ocorre no eixo x. Uma condição inicial foi representada. $X(t)$ aparece como uma projeção do ponto P, imaginário, na circunferência. Esse ponto P realiza movimento circular uniforme com velocidade angular w_0. $X = \pm A$ são os pontos de retorno, de velocidade nula.

Observe que $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w_0^2}}$ (16) pode ser colocada em termos da energia E do movimento por (11):

$E = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + w_0^2 x_0^2\right)$. Temos

$E = \frac{m}{2} w_0^2 \left(\frac{v_0^2}{w_0^2} + x_0^2\right) = \frac{m w_0^2}{2} A^2 = \frac{K}{2} A^2$ por $w_0^2 = \frac{K}{m}$.

Então $A = \sqrt{2E/m w_0^2}$ (18). Esse resultado se obtém também considerando os pontos de retorno $X = \pm A$, em que $\dot{x} = 0$, por onde temos $E = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{K x^2}{2} = \frac{m}{2}(0)^2 + \frac{K A^2}{2}$

$\Rightarrow E = \frac{K A^2}{2}$ para $X = \pm A$.

e) Como $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$
$= \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$ ($\cos(-\theta) = \cos\theta$ (cosseno é par), $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$ (seno é ímpar)) temos

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{i w_0 t} + b e^{-i w_0 t} \\ &= a(\cos w_0 t + i\,\mathrm{sen}\, w_0 t) + b(\cos w_0 t - i\,\mathrm{sen}\, w_0 t) \\ &= (a+b)\cos w_0 t + i(a-b)\,\mathrm{sen}\, w_0 t \quad (19). \end{aligned}$$

Agora, (19) equivale a (3), $x = x_0 \cos w_0 t + \frac{v_0}{w} \operatorname{sen} w_0 t$, se

$$a + b = x_0 \quad (20)$$

$$i(a-b) = \frac{v_0}{w_0} \Rightarrow a - b = \frac{1}{i}\frac{v_0}{w_0} = \underbrace{\frac{1}{i}\frac{i}{i}}_{\substack{=1 \\ i\cdot i = i^2 = -1}} \frac{v_0}{w_0} = -i\frac{v_0}{w_0} \quad (21).$$

Então o sistema (20),(21) se resolve para a e b:

$$a = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{w_0}\right) \quad e \quad b = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{w_0}\right).$$

Observe que $b = a^*$ (b é o complexo conjugado de a.

Se $z = a + ib = Re^{i\theta}$ ($R = \sqrt{a^2+b^2}$, $tg\,\theta = b/a$), $z^* = a - ib = Re^{-i\theta}$)

f) Se $E = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{m w_0^2}{2} x^2$, podemos pensar numa curva no espaço $(x, \dot{x})$, o espaço de fases. Reescrevemos a conservação da energia na forma

$$\frac{m}{2E}(\dot{x})^2 + \frac{k}{2E}x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(\dot{x})^2}{\left(\frac{2E}{m}\right)} + \frac{x^2}{\left(\frac{2E}{k}\right)} = 1 \quad (22)$$ e vemos

portanto que isso, dado um E, é uma elipse no plano de fases. Veja a figura 4.

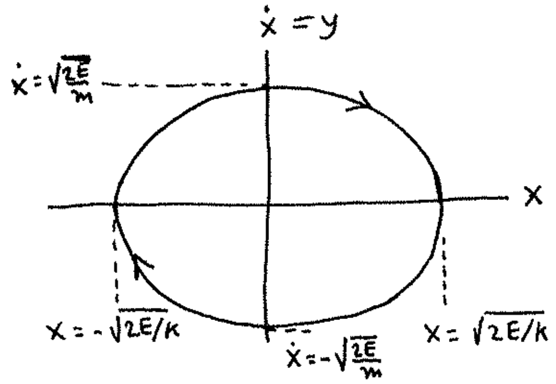


figura 4

2.1.9

Para compreender as <u>setas</u> no diagrama de fases (figura (4)), defina $y = \dot{x}$. Nesse caso a equação do oscilador fica $\ddot{x} = -\omega_0^2 x \Rightarrow \dot{y} = -\omega_0^2 x$. Isso então equivale a um par de equações:

$$y = \dot{x} \quad (23),$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 x \quad (24).$$

Tome por exemplo um ponto, sobre a curva no diagrama, no primeiro quadrante ($x > 0$, $y = \dot{x} > 0$). Pela equação (24), isso exige $\dot{y} < 0$, ou seja, $\dot{y}$ <u>diminuindo</u>. É precisamente isso o que a seta representa. A análise pode ser extendida para outros quadrantes.

A conservação da energia permite a integração imediata do movimento. Temos

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 = E \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}$ (25), eliminando por hora a raiz negativa. De (25) temos

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}} = \int_0^t dt = t \quad (26).$$

Temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\omega_0^2\left(\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2\right)}} = \frac{1}{\omega_0}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} \quad (27).$$

A integral em (27) pode ser reescrita na forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = -\arccos\left(\frac{x}{A}\right) \text{ (28), com } A^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2} \text{ (29), porque}$$

no caso do oscilador harmônico E é sempre positiva, como é a^2, já que $E = (m/2)v^2 + (K/2)x^2 =$ soma de termos positivos. Voltando com (28) a (27) temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2}} = -\frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{x}{A}\right).$$

Então (26) fica

$$-\frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right) = t \Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{A}\right) = -\omega t + \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right).$$

Chamando $\phi = \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right)$, temos

$$\arccos\left(\frac{x}{A}\right) = \phi - \omega t \Rightarrow \cos(\phi - \omega t) = \cos(\omega t - \phi) = \frac{x}{A} \Rightarrow$$

$x = A \cos(\phi - \omega t)$ (30).

Note a analogia completa entre (30) e (12), e também entre (29) e (18).

Outra análise é possível pelo uso da energia do oscilador, seguindo o caminho da questão 17, problema 2.43 do livro TM. No caso do oscilador, como vimos, E é sempre positiva. Levantamos, para uma dada energia E, os gráficos de $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ e $E(x) = E =$ constante. A figura 5 dá um exemplo.

2.1.11

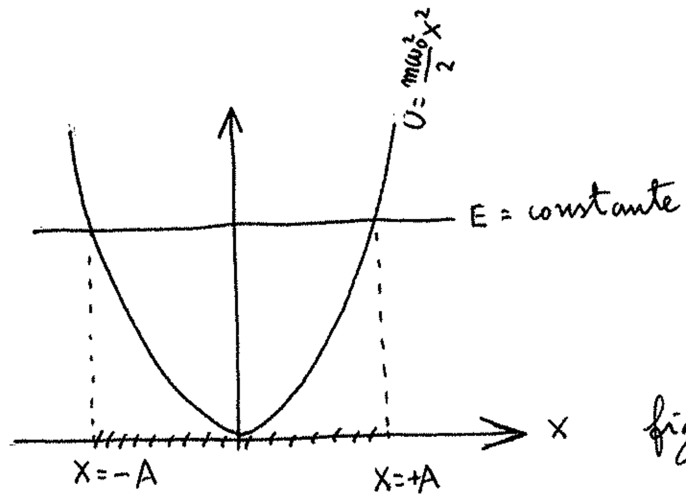


figura 5

Temos $E = U + \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = E - U$. Como $\frac{m}{2}v^2 \geqslant 0$ necessariamente, $E - U \geqslant 0 \Rightarrow E \geqslant U$ para todas as posições x acessíveis com energia E. Por isso, apenas a região hachurada em x, $-A \leq x \leq A$ é acessível. $x = -A$ e $x = +A$, pontos de velocidade nula, são os pontos de retorno para a energia E.

g) $L = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = L(x, \dot{x})$. Então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2}\frac{\partial(\dot{x})^2}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2}2\dot{x} = m\dot{x} \quad (31)$$

e $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 \frac{\partial x^2}{\partial x} = -m\omega_0^2 x$ (32).

De (31), $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$, e se

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$, temos

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (33).$$

2.2.1

a)

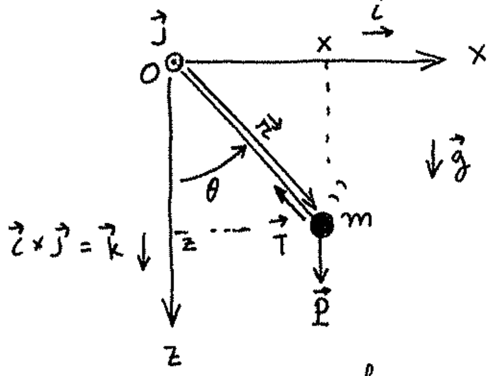


figura 1

Ao lado temos a geometria da situação. $|\vec{r}| = l =$ comprimento do pêndulo = constante. É necessário tomar

$$U = -mgz = -mgl\cos\theta \ (1),$$

se $U=0$ na origem, porque z foi escolhido "para baixo", caso em que $\vec{P} = mg\vec{k}$. Para isso ser compatível com $\vec{P} = -\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$, $U(z)=U$ deve ter a expressão (1).

Temos $\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k} = l\,\text{sen}\theta\,\vec{i} + l\cos\theta\,\vec{k}$ (2), de onde

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = l\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i} - l\dot{\theta}\,\text{sen}\theta\,\vec{k}$ (3) e $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = l\ddot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}$
$- l\dot{\theta}^2\,\text{sen}\theta\,\vec{i} - l\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta\,\vec{k} - l\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{k}$:

$$\vec{a} = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\text{sen}\theta)\,\vec{i} - l(\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{k} \quad (4).$$

Obter a energia cinética é também um resultado interessante. Por (3),

$$T = \frac{m}{2}V^2 = \frac{m}{2}\vec{V}\cdot\vec{V} = \frac{m}{2}\left[l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\theta\right] = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 \ (5),$$

resultado que poderia ter sido antecipado usando-se, para a rotação, $T = \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{I}{2}(\dot{\theta})^2 = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta})^2$.

As forças são $\vec{P} = mg\vec{k}$ e $\vec{T} = -T\,\text{sen}\theta\,\vec{i} - T\cos\theta\,\vec{k}$ (6).

Podemos montar agora as equações do movimento.

a1) Leis de Newton ($m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{T}$). Por (4) e (6)

$$ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\text{sen}\theta)\,\vec{i} - ml(\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{k} = -T\,\text{sen}\theta\,\vec{i} + (mg - T\cos\theta)\,\vec{k},$$

de onde

$$m\ell\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) = -T\operatorname{sen}\theta \qquad (7)$$

$$-m\ell\,(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = mg - T\cos\theta \qquad (8)$$

Por "sorte" é possível eliminar, de uma só vez, $\dot{\theta}^2$ e T. Multiplicamos a primeira equação por $\cos\theta$,

$$m\ell\,\ddot{\theta}\cos^2\theta - m\ell\,\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -T\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad (9) \quad ,$$

e a segunda por $-\operatorname{sen}\theta$,

$$m\ell\ddot{\theta}\operatorname{sen}^2\theta + m\ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -mg\operatorname{sen}\theta + T\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad (10).$$

Somando (9) e (10) temos

$$m\ell\ddot{\theta}\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = -mg\operatorname{sen}\theta \Rightarrow m\ell\ddot{\theta} + mg\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0 \quad (11)$$

(Nota: há formas mais espertas de obter (11) com leis de Newton)

Ocorre agora que, em (11), $\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$. Se θ é suficientemente pequeno, $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ (θ em radianos), com o que

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \quad (12)$$

é a aproximação para (11). Por analogia com o oscilador harmônico esperamos que (12) represente movimentos periódicos de θ com frequência $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ e período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \, .$$

2.2.3

a2) $\vec{N} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$. É "fácil" perceber que $\vec{T}$ não nos dá torque em relação a O, e que o torque da força peso é
$\vec{N}_{\vec{P}} = \vec{r} \times \vec{P} = -|\vec{r}||\vec{P}| \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} = -mgl \operatorname{sen}\theta \, \vec{j}$ (por que?).
Vamos agora nos aproveitar de $\vec{L} = I\vec{\omega} = ml^2 \dot{\theta} \, \vec{j}$. Então
$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow -mgl \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} = ml^2 \ddot{\theta} \, \vec{j} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0 ,$$
equação completamente equivalente a (11).

a3) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial \theta}$. $L = T - U = \dfrac{ml^2}{2}(\dot{\theta})^2 + mgl\cos\theta$,
por (1) e (5). Então
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2}{2} \frac{\partial(\dot{\theta}^2)}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2 \ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \operatorname{sen}\theta ,$$
e ficamos com $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0$,
equação equivalente a (11).

b) Estude a seção 4.4 de T M.

c)

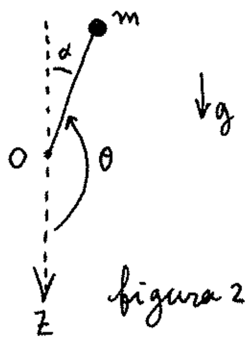


figura 2

A figura ao lado mostra o pêndulo nas proximidades de $\theta = \pi$ (α pequeno). $\theta = \pi$ é um ponto de equilíbrio <u>instável</u> do problema, isto é, se deixado em $\theta = \pi$, qualquer pequena perturbação "derrubará" o pêndulo. A equação (11) continua válida, mas é interessante reescrevê-la em termos de $\alpha = \pi - \theta$, ou

2.2.4

$\theta = \pi - \alpha$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}(\pi-\alpha)}_{=-\ddot{\alpha}} + \frac{g}{\ell}\,\underbrace{\text{sen}\,(\pi-\alpha)}_{=\text{sen}\,\alpha} = 0 ,$$

o que nos dá

$$\ddot{\alpha} - \frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\alpha = 0 \quad (13)$$

Vejamos que se α é pequeno ($\text{sen}\,\alpha \approx \alpha$) obtemos uma equação <u>muito diferente</u> da do oscilador harmônico,

$$\ddot{\alpha} - \omega_0^2\,\alpha = 0 \quad (14) \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}\right) ,$$

com soluções, agora,

$$\alpha(t) = A\,e^{\omega_0 t} + B\,e^{-\omega_0 t} \quad (15).$$

Na medida em que t cresce, (15) implica que $\alpha(t)$ é dominada pelo <u>primeiro</u> termo, $A\,e^{\omega_0 t}$ e $\alpha(t)$ <u>cresce</u> com o tempo <u>sem</u> movimento oscilatório, isto é, (15) <u>não</u> é uma função <u>periódica</u>.

2.3.1

Ao lado temos um esquema da situação, em que ao sistema massa mola acrescentamos o efeito do atrito do corpo com um fluido, representado pela força $-bv$, com b constante. A segunda lei de newton nos dá

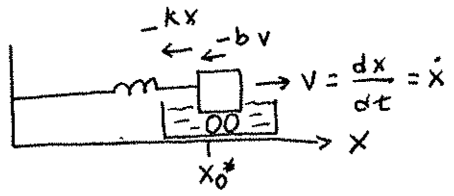


figura 1, b e k constantes

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0 \quad (1).$$

Em (1) é conveniente fazer $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (2) e $\frac{b}{m} = 2\beta$ (3), com o que (1) fica

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4).$$

Para (4) podemos supor a solução $x = e^{pt}$ (5), com o que $\dot{x} = p\,e^{pt}$ e $\ddot{x} = p^2 e^{pt}$. Colocando isso em (4) teremos

$$p^2 e^{pt} + 2\beta p e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \Rightarrow p^2 + 2\beta p + \omega_0^2 = 0 \quad (6),$$

eliminando a possibilidade pouco interessante $e^{pt} = 0$.

De (6),

$$p = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (7).$$

Agora, (7) encerra tres possibilidades interessantes:

a) $\beta^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \beta = \omega_0$ (o que fazer com $\beta = -\omega_0$?).

Nesse caso, $p = -\beta$, com solução $x = Ae^{-\beta t}$ parece ser a única solução. Ocorre porém

2.3.2

que a solução, nesse caso, é

$$x = A e^{-\beta t} + B t e^{-\beta t} \quad (8).$$

Verifique (8) diretamente por (4) com $\beta = \omega_0$.

O caso em questão é o que se chama de <u>amortecimento crítico</u>. Veja abaixo um possível caso, com $A=0$, dessa situação. A que condições iniciais essa situação corresponderia?

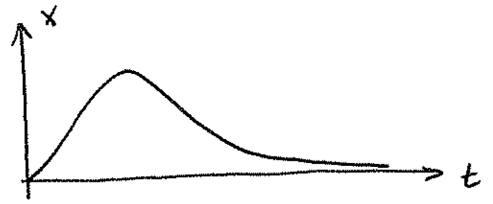


figura 2

Que figura no plano de fases poderia corresponder à figura 2.

b) $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ (amortecimento supercrítico). Nesse caso, se $\Delta = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, temos por (7)

$$p = -\beta \pm \Delta \quad (9),$$

e uma solução geral

$$x(t) = A e^{(-\beta+\Delta)t} + B e^{(-\beta-\Delta)t}$$
$$= e^{-\beta t} \left[A e^{\Delta t} + B e^{-\Delta t} \right] \quad (10).$$

Abaixo um gráfico dessa situação, com $A=0$. Como seria uma figura correspondente no plano de fases?

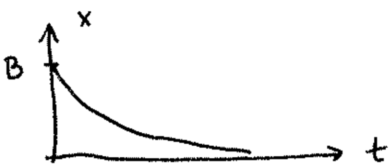


figura 3
(Quais as condições iniciais aqui?)

2.3.3

c) $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$. Nesse caso escreveremos $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)}$ $= \sqrt{-1}\sqrt{\Gamma^2}$, com $\Gamma^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ e $\sqrt{-1} = i$. Então

temos por (7)

$$p = -\beta \pm i\Gamma \quad ,$$

e soluções gerais

$$x = A e^{(-\beta + i\Gamma)t} + B e^{(-\beta - i\Gamma)t}$$

$$= e^{-\beta t}\left[A e^{i\Gamma t} + B e^{-i\Gamma t}\right]$$

$$= e^{-\beta t}\left[A\big((\cos \Gamma t) + i \operatorname{sen}(\Gamma t)\big) + B\big((\cos \Gamma t) - i \operatorname{sen}(\Gamma t)\big)\right]$$

$$= e^{-\beta t}\left[\underbrace{(A+B)}_{a}\cos \Gamma t + \underbrace{i(A-B)}_{b}\operatorname{sen}\Gamma t\right] \quad ;$$

$$x = e^{-\beta t}(a \cos \Gamma t + b \operatorname{sen}\Gamma t) \; .$$

Esse caso é chamado de amortecimento <u>subcrítico</u>.

Abaixo temos um possível gráfico com $a = 0$. A que condições iniciais ele corresponde? Qual seria uma curva esboço no plano de fases nessa situação?

$x = b e^{-\beta t} \operatorname{sen}\Gamma t$

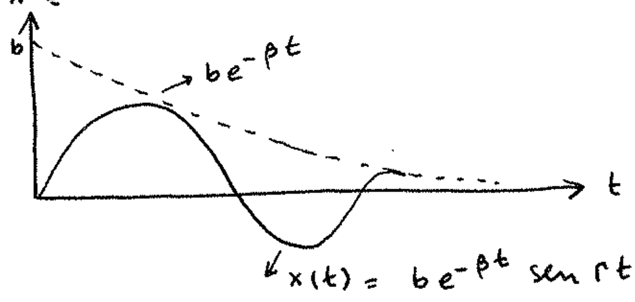


figura 4

note que agora

$$T = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

2.3.4

Alguns esboços, no plano de fases, para situações do oscilador harmônico amortecido.

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$.

Solução geral: $x(t) = e^{-t}(a\cos 2t + b\,\text{sen}\,2t)$, implicando

$\dot{x}(t) = -e^{-t}(a\cos 2t + b\,\text{sen}\,2t) + e^{-t}(-2a\,\text{sen}\,2t + 2b\cos 2t)$.

Se $\dot{x}(0) = 0$, $-e^{-0}(a\cos 2.0 + b\,\text{sen}\,2.0) + e^{-0}(-2a\,\text{sen}\,2.0 + 2b\cos 2.0) = 0$

$\Rightarrow -a + 2b = 0$. Por outro lado, se $x(0) = 1$,

$e^{-0}(a\cos 2.0 + b\,\text{sen}\,2.0) = 1 \Rightarrow a = 1$. Então $b = +1/2$.

Com isso, $x(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\text{sen}\,2t)$ (a1) e

$\dot{x}(t) = -e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\text{sen}\,2t) + e^{-t}(-2\,\text{sen}\,2t + \cos 2t)$ (a2).

(a1) e (a2) são um <u>par</u> de relações definindo uma curva no plano $(x, \dot{x})$ de forma <u>paramétrica</u>, sendo t o parâmetro: podemos "plotar" os pontos $(x, \dot{x})$ calculados com sucessivos valores de t ($t = 0, 1, 2, \ldots$ etc), formando uma linha que "junta" esses pontos.

Podemos também fazer um <u>esboço</u> da seguinte forma. Se $y = \dot{x}$, a equação fica $\dot{y} + 2y + 5x = 0$.
Temos então um <u>par</u>:

$$y = \dot{x} \quad \text{(I)}$$
$$\dot{y} = -2y - 5x \quad \text{(II)} .$$

O ponto <u>inicial</u> é $x = 1$, $y = \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{y} = -2\cdot 0 - 5\cdot 1 = -5$.

Como esperamos <u>oscilações</u> (repetições de valores de x), com $x \to 0$ e $\dot{x} \to 0$ para $t \to \infty$, esperamos uma figura como a abaixo.

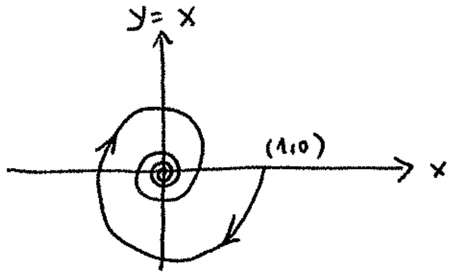


figura 6

b) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 12x = 0$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 1$.

Solução geral : $x(t) = e^{-4t}\left(a e^{2t} + b e^{-2t}\right) \Rightarrow \dot{x}(t) = -4e^{-4t}\left(ae^{2t} + be^{-2t}\right)$ $+ e^{-4t}\left(2a e^{2t} - 2b e^{-2t}\right)$. Aplicando as condições iniciais temos $x(t) = e^{-4t}\left(\frac{7}{4} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t}\right)$. Veja as figuras.

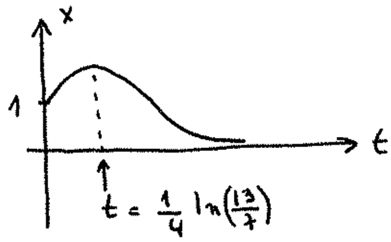


figura 7

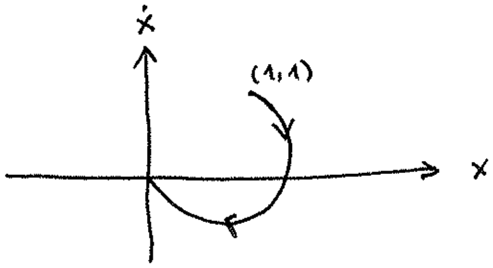


figura 8

2.4.1

a) Na equação $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (oscilador amortecido) não haviam forças externas. Mas

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\frac{b}{m} = 2\beta$, $A = \frac{F_0}{m}$

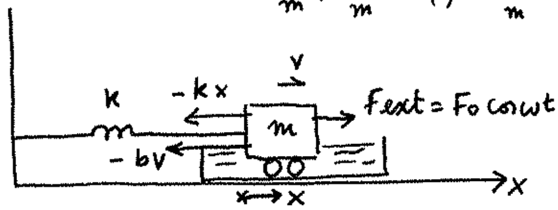


figura 1

a equação $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$ (1) representa a ação, sobre o oscilador, de uma força externa $F_0 \cos\omega t$ (figura ao lado).

A solução de (1) pode ser escrita na forma $x(t) = x_h + x_p$, com x_h obedecendo a $\ddot{x}_h + 2\beta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$, com solução $x_h = (a\cos\Gamma t + b\,\mathrm{sen}\,\Gamma t)e^{-\beta t}$, $\Gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (subamortecimento) e com x_p sendo uma função particular convenientemente escolhida para satisfazer (1).

Na solução

$$x = e^{-\beta t}(a\cos\Gamma t + b\,\mathrm{sen}\,\Gamma t) + x_p(t) \quad (2),$$

a função x_h, que é tal que $\lim_{t\to\infty} e^{-\beta t}(a\cos\Gamma t + b\,\mathrm{sen}\,\Gamma t) \to 0$ é chamada de transiente, desaparecendo no tempo sua influência (de fato, muito pequena para tempos $t > 1/\beta$).

O maior interesse no problema está na função $x_p(t)$, que podemos chamar de permanente. Para encontrar $x_p(t)$ vamos representar x_p de forma complexa, isto é, vamos escrever (1) para $z_p = x_p + i y_p$ (3). Ao final do problema, tomaremos a parte real $x_p = \mathrm{Re}(z_p)$ (3a). Notando que $A\cos\omega t = \mathrm{Re}(A e^{i\omega t})$ (A real), temos (1), para z_p,

$$\ddot{z}_p + 2\beta\dot{z}_p + \omega_0^2 z_p = A e^{i\omega t} \quad (4) .$$

Podemos propor para z_p a forma $z_p = D e^{i(\omega t - \delta)}$, representando uma oscilação de amplitude D adquirindo alguma <u>defasagem</u> δ em relação à força externa. Temos

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_p &= i\omega D e^{i(\omega t-\delta)} \\ &= i\omega z_p \end{aligned}\right\} (5) \quad e \quad \left\{\begin{aligned} \ddot{z}_p &= (i\omega)(i\omega) D e^{i(\omega t - \delta)} \quad (6) \\ &= -\omega^2 z_p \quad (i \cdot i = i^2 = -1). \end{aligned}\right.$$

Colocando (5) e (6) de volta em (4) teremos

$$-\omega^2 z_p + 2\beta i\omega z_p + \omega_0^2 z_p = (-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) D e^{i(\omega t - \delta)} = A e^{i\omega t},$$

ou

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, e^{-i\delta} = \frac{A}{D} \quad (7) ,$$

que, com $e^{-i\delta} = \cos\delta - i\,\mathrm{sen}\,\delta$, nos dá de fato <u>duas</u> equações. Vejamos:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)(\cos\delta - i\,\mathrm{sen}\,\delta) = \frac{A}{D} ;$$

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\cos\delta - (-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, i\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{A}{D} ;$$

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\cos\delta - (-\omega^2 i - 2\beta\omega + \omega_0^2 i)\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{A}{D} ;$$

$$[(-\omega^2 + \omega_0^2)\cos\delta + 2\beta\omega\,\mathrm{sen}\,\delta] + i\,[2\beta\omega\cos\delta - (-\omega^2 + \omega_0^2)\,\mathrm{sen}\,\delta] = \frac{A}{D} \quad (8).$$

Ocorre que, sendo $\frac{A}{D}$ <u>real</u> (A e D reais),

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\cos\delta + 2\beta\omega\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{A}{D} \quad (9) ,$$

$$2\beta\omega\cos\delta - (-\omega^2 + \omega_0^2)\,\mathrm{sen}\,\delta = 0 \quad (10).$$

De (10) temos $(\omega_0^2 - \omega^2)\,\mathrm{sen}\,\delta = 2\beta\omega\cos\delta \Rightarrow tg\,\delta = \frac{\mathrm{sen}\,\delta}{\cos\delta}$ tal que $tg\,\delta = \dfrac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (11). Note que (11) permite conhecer, em princípio, D por (9), sendo $A = F_0/m$ dada (figura 1). Há, no entanto, um truque que permite obter D sem que precisemos calcular δ. Escrevemos (7) e sua complexa conjugada:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, e^{-i\delta} = \frac{A}{D} \quad (7)$$

$$(-\omega^2 - 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, e^{i\delta} = \frac{A}{D} \quad (7')$$

complexo conjugado nos dois lados de (7).

Formamos agora o produto (7) x (7'):

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, e^{-i\delta}\, (-\omega^2 - 2i\beta\omega + \omega_0^2)\, e^{i\delta} = \frac{A}{D}\,\frac{A}{D} \;;$$

$$e^{-i\delta} e^{i\delta} = e^0 = 1$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\,2\beta\omega]\,[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,2\beta\omega] = \frac{A^2}{D^2} \;;$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\beta\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - \underbrace{i^2}_{i^2 = -1} 4\beta^2\omega^2 = \frac{A^2}{D^2} \;;$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = \frac{A^2}{D^2} \;;$$

$$D = \frac{A}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \quad (12)$$

b) Devemos tentar esboçar gráficos de $D(\omega)$ (12) e $\delta(\omega)$ (por (11)). Naturalmente, estamos considerando ω, a frequência da força externa, variável. Observe anteriormente que $x_p = Re(z_p) = D\cos(\omega t - \delta) = Re(De^{i(\omega t - \delta)})$, com D e δ dados por (12) e (11).

No caso de $D(\omega)$, (12) nos mostra que não existem zeros de $D(\omega)$ (valores finitos de ω para os quais $D = 0$). Em $\omega = 0$, $D(\omega) = D(\omega = 0) = A/\omega_0^2$. Não há valores de $D(\omega)$ singulares para nenhum ω e, finalmente, em relação a uma análise de valores escolhidos de ω, nota-se que $\lim_{\omega \to \infty} D(\omega) = 0$ (note que $\omega \to \infty$ não é, propriamente, um valor de ω. Ocorre porém, agora, que $D(\omega)$ tem um máximo, correspondente a $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ mínimo. Temos $(df/d\omega) = 0$ com $2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4\beta^2 2\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 = \omega_R^2$ (13) (eliminamos $\omega = 0$). Podemos então agora esboçar o gráfico abaixo:

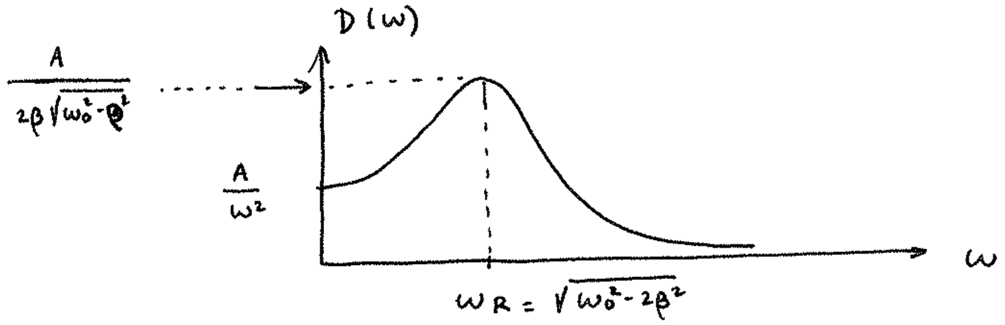


figura 2

Note que, por (12) e (13),

$$D(\omega = \omega_R) = \frac{A}{[(\omega_0^2 - \omega_R^2) + 4\beta^2\omega_R^2]^{1/2}} = \frac{A}{[(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)]^{1/2}}$$

$$= \frac{A}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (14)$$, como indicado na figura 2

$\omega = \omega_R$, corresponde na figura 2 à máxima amplitude D do movimento estacionário, $x_p = D\cos(\omega t - \delta)$, e se a frequência da força externa for ω_R, chamamos essa situação de <u>ressonância</u>

Estamos nesse problema supondo oscilações subamortecidas, isto é, com β suficientemente pequeno. Observe, por (13), que $2\beta^2 > \omega_0^2$ nos leva a ω_R <u>imaginário</u>, isto é, à conclusão de <u>não</u> existência do máximo em $D(\omega)$, que apenas, então, diminui monotonicamente com ω. Nesse caso (β "grande", $\beta > \omega_0/\sqrt{2}$) <u>não</u> ocorre ressonância.

Para um esboço do gráfico de $\delta(\omega)$ devemos examinar (11): $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}$. Com $\omega=0$, $\operatorname{tg}\delta=0$ e poderíamos ter $\delta = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$ etc, ou ainda $\delta = \pi, 3\pi \ldots$ etc. É razoável escolher, no caso, $\delta=0$ para $\omega=0$. Ao aumentarmos assim ω, com $\omega_0^2-\omega^2>0$, lentamente, esperamos um aumento em $\operatorname{tg}\delta$ e, portanto, em δ. Quando $\omega_0^2-\omega^2$ se aproxima de 0, o que ocorre em $\omega_0^2=\omega^2$, $\operatorname{tg}\delta$ "tende a ∞", o que significa $\delta = \pi/2$, já que tomamos δ para aumentar a partir de $\delta=0$, em $\omega=0$, no primeiro quadrante para o ângulo δ. Quando ω é tal que $\omega_0^2-\omega^2<0$ ($\omega^2>\omega_0^2$ ou $\omega>\omega_0$), $\operatorname{tg}\delta$ é <u>negativo</u>, e passamos para o 2º quadrante. Quando $\omega\to\infty$, $\operatorname{tg}\delta$ tende, por "L'Hospital", a 0. Como passamos para o 2º quadrante, devemos esperar, nesse caso, $\delta\to\pi$. A figura abaixo representa essas considerações. Um ciclo trigonométrico auxiliar também está desenhado

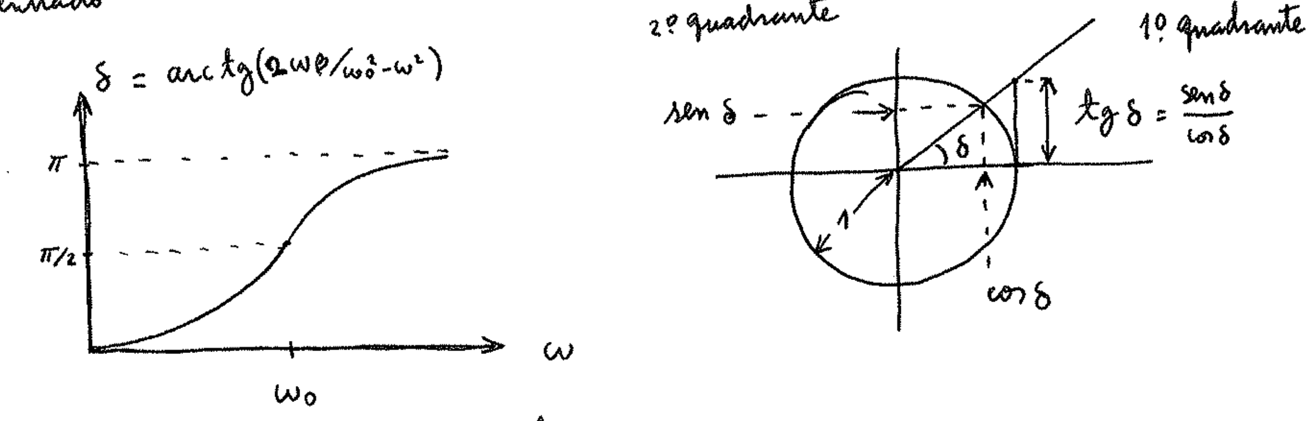


figura 3

Veja que quando $\omega >> \omega_0$ a oscilação fica "180 graus" fora de fase com a força externa.

Quando $\beta \to 0$, (14) mostra que a amplitude $D(\omega_R)$ tende ao infinito: o sistema pode se romper nessa situação.

Pede-se agora para que se verifique que, com β suficientemente pequeno, o fator de qualidade $Q = \frac{\omega_R}{2\beta}$ seja aproximadamente representado por $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, sendo $\Delta\omega$ uma faixa de frequências, em torno da frequência de ressonância, tal que a amplitude caia de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do seu valor na ressonância. A figura abaixo é explicativa da situação.

2.4.7

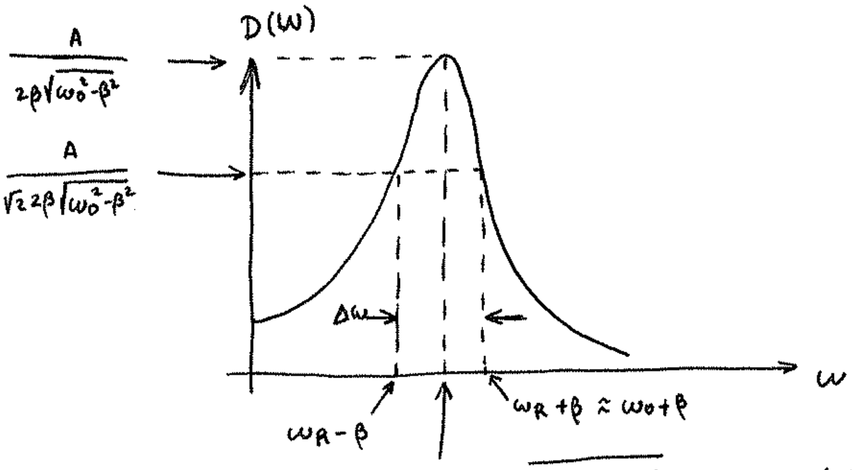


figura 4

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \approx \omega_0 \quad (13)$$

Primeiramente, se β é suficientemente pequeno, em relação a ω_0, faremos $\omega_R = \omega_0$, como indica a figura 4. Nessa aproximação, $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$. Pelo enunciado, portanto, espera-se que $D(\omega_R+\beta) \approx D(\omega_0+\beta) = \frac{A}{\sqrt{2}\,2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \frac{A}{\sqrt{8\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}$,

com $D(\omega)$ dado por (12). De forma exata, a frequência ω que se procura corresponde então a

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} = \frac{A}{\sqrt{8\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}} \Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2 = 8\beta^2\omega_0^2-8\beta^4 \quad (15)$$

Ocorre que a equação (15) é uma equação complicada em ω. Se, em correspondência com a figura 4, esperamos que ω correspondente a (15) se afaste pouco de $\omega_R = \omega_0$ (em aproximação, podemos procurar por soluções $\omega = \omega_0 + \Delta$ (16), na esperança de Δ pequeno. Tomando apenas as ordens mais baixas em Δ temos $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0\Delta$ (17) (desprezamos Δ^2 em ω^2).

Inserindo (17) em (15) temos

2.4.8

$$(-2\omega_0 \Delta)^2 + 4\beta^2 (\omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta) = 8\beta^2 \omega_0^2 - 8\beta^4$$

$$4\omega_0^2 \Delta^2 + 4\beta^2 \omega_0^2 + 8\omega_0 \beta^2 \Delta = 8\beta^2 \omega_0^2 - 8\beta^4 \quad (16)$$

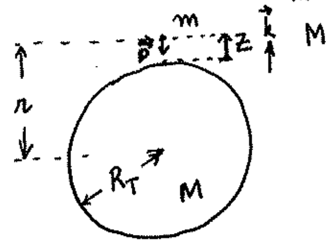
Agora, em (16), se esperamos que Δ e β sejam pequenos na mesma ordem, desprezamos $\beta^2 \Delta$ e β^4, com o que (16) fica

$$4\omega_0^2 \Delta^2 = 4\beta^2 \omega_0^2 \Rightarrow \Delta = \pm \beta \quad ,$$

como sugerido no enunciado e na figura 4.

2.5.1

a) R_T = raio do planeta, de massa M



$U = \Phi m$

figura 1

Acompanhando a figura 1, em que z, a altura de m em relação ao solo, é muito pequena comparada com R_T, a energia potencial de m, escolhida a convenção pela qual $U \to 0$ com $r \to \infty$, é

$U = -\frac{GMm}{r}$ (1), sendo $G = 6.67 \times 10^{-11}$ (SI) a constante universal de gravitação. Pela figura e por (1)

$$U = -\frac{GMm}{R_T + z} = -\frac{GMm}{R_T}\frac{1}{(1+\frac{z}{R_T})} \quad (2)$$

Ocorre que se z é <u>pequena</u>, vale a <u>aproximação</u> $\frac{1}{1+\frac{z}{R_T}} \simeq 1 - \frac{z}{R}$,

com o que (2) fica, aproximadamente

$$U = -\frac{GMm}{R_T}\left(1 - \frac{z}{R}\right) = -\frac{GMm}{R_T} + \frac{GMm}{R_T^2} z \quad (3).$$

Definindo $g = \frac{GM}{R_T^2}$ (que com $R_T = 6.37 \times 10^6$ m e $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg, para a Terra, fica $9.83 \ m/s^2$, como esperado) temos

$$U = -\frac{GMm}{R_T} + mgz \quad (4).$$

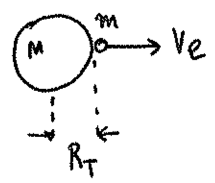
Note que, como $-\frac{GMm}{R_T}$ é uma <u>constante</u>, podemos simplesmente reescrever (4) na forma $U = mgz$, com o que $\vec{P} = -\frac{dU}{dz}\vec{k} = -mg\vec{k}$, como já sabíamos. Nessa aproximação o potencial gravitacional é $\Phi = \frac{U}{m} = gz$.

2.5.2

b) O <u>escape</u> de um corpo de massa m da influência gravitacional do corpo de massa M corresponde à situação ao lado, em que o corpo, inicialmente na superfície do planeta, é lançado com a velocidade V_e e, ao final, está em <u>repouso</u> e infinitamente afastado.

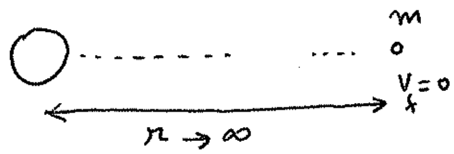
figura 2

início



$$E_i = \frac{m}{2} V_e^2 - \frac{GMm}{R_T}$$

final



$$E_f = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{m}{2}(V_f)^2 = 0$$

Como a energia se conserva temos

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{mV_e^2}{2} - \frac{GMm}{R_T} = 0 \Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \quad (\simeq 11\,Km/s \text{ para a Terra})$$

c)

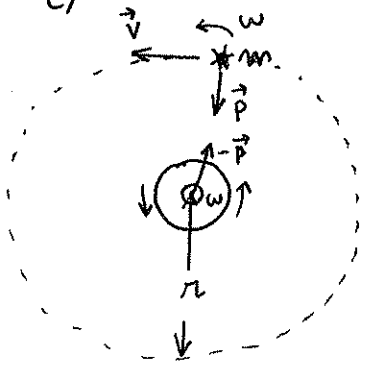


figura 3

O satélite geoestacionário tem a mesma velocidade angular ω do planeta.

Temos

$$|\vec{P}| = \underbrace{\frac{GMm}{r^2}}_{\text{força peso (única força no satélite)}} = \underbrace{m}_{\text{massa}} \overbrace{\frac{V^2}{r}}^{\text{aceleração}} = \frac{m(\omega r)^2}{r} \;;$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r^2} = \omega^2 r \Rightarrow r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}.$$

Então espera-se que uma única trajetória circular, com r calculado acima, seja necessária para qualquer satélite geoestacionário.

2.6.1

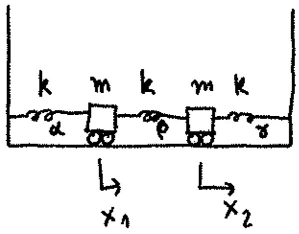
a) 

figura 1

Acompanhamos a figura ao lado, em que x_1 e x_2 são deslocamentos das massas indicadas em relação às suas posições de equilíbrio.

A energia potencial do sistema é

$$U(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{1}{2} k x_1^2}_{\text{mola } \alpha} + \underbrace{\frac{1}{2} k (x_2-x_1)^2}_{\text{mola } \beta} + \underbrace{\frac{1}{2} k x_2^2}_{\text{mola } \gamma} \quad (1),$$

de forma que a 2ª lei de Newton, para cada massa, fica

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k x_1 + k(x_2-x_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m} x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0 \quad (2);$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -k(x_2-x_1) - k x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{2k}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0 \quad (3).$$

Se definimos $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, (2) e (3) ficam

$$\ddot{x}_1 + \frac{2k}{m} x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \quad (4);$$

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (5).$$

O que significa buscar modos normais de oscilação? Significa buscar soluções oscilatórias para (4) e (5) na forma geral $x_1 = A e^{i\omega t}$ (6) e $x_2 = B e^{i\omega t}$ (7), isto é, vibrações das massas com a mesma frequência e distintas "amplitudes" A e B. Temos, por (6) e (7),

$$\ddot{x}_1 = (i\omega)^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 A e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$\text{e} \quad \ddot{x}_2 = (i\omega)^2 B e^{i\omega t} = -\omega^2 B e^{i\omega t} \quad (9).$$

Colocando (6), (7), (8) e (9) em (4) e (5) temos

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\omega_0^2 A e^{i\omega t} - \omega_0^2 B e^{i\omega t} = 0$$

e $-\omega^2 B e^{i\omega t} + 2\omega_0^2 B e^{i\omega t} - \omega_0^2 A e^{i\omega t} = 0$.

Eliminando $e^{i\omega t}$, ficamos então com

$$-\omega^2 A + 2\omega_0^2 A - \omega_0^2 B = 0 \Rightarrow (2\omega_0^2 - \omega^2)A - \omega_0^2 B = 0 \quad (10)$$

e $-\omega^2 B + 2\omega_0^2 B - \omega_0^2 A = 0 \Rightarrow -\omega_0^2 A + (2\omega_0^2 - \omega^2)B = 0$ (11).

(10) e (11) deveriam ser encaradas como um sistema de equações para A e B. Parece, no entanto, que apenas $A = 0$ e $B = 0$ são soluções de (10) e (11). Vamos porém nos lembrar do seguinte: pela regra de <u>Cramer</u> o sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = P(x),$$

$$a_{21}x + a_{22}y = Q(y),$$

tem em princípio, com $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,

solução

$$x = \frac{\begin{vmatrix} P & a_{12} \\ Q & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{Pa_{22} - Qa_{12}}{\Delta},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & P \\ a_{21} & Q \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{11}Q - a_{21}P}{\Delta}.$$

Então, de fato, se $P = 0$ e $Q = 0$ $(P = Q = 0)$, em geral apenas $x = 0$ e $y = 0$ são solução do sistema. <u>Se</u>, porém, ocorrer $\Delta = 0$, teremos $x = \frac{0}{0}$ e $y = \frac{0}{0}$, <u>indeterminados</u>. (Lembre-se: se $\frac{n_1}{n_2} = n$, devemos ter $n_1 = n n_2$. Se $n_1 = n_2 = 0$, qualquer valor de r possibilitará $x_1 = r\, x_2$. Exemplos: $0 = 3 \times 0$, $(r=3)$, $0 = 4 \times 0$ $(r=4)$, $0 = \pi \cdot 0$ $(r = \pi)$, etc.). Então, se $P = Q = 0$ e $\Delta = 0$, poderão existir x e y não-nulos que satisfazem o sistema (x), (y).

Do que está escrito acima, e levando em conta que o valor de ω é completamente desconhecido, concluímos que (10) e (11) só poderá ser um sistema com solução não-trivial (trivial seria a solução $A = B = 0$) se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12),$$

chamada às vezes de equação secular. Os possíveis valores de ω (ou ω^2, mais propriamente falando) são chamados de autovalores. Note que, de fato, (10) e (11) podem ser colocadas na forma de uma equação de autovalores para $M = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$, com $\chi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$,

na forma

$$M\chi = \lambda \chi, \quad \text{com } \lambda = \omega^2.$$

Agora (12) vai então fixar valores de ω. Por (12) temos

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2\,\omega_0^2 = 0 \Rightarrow 4\omega_0^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 - \omega_0^4 = 0$$

$\Rightarrow \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 3\omega_0^4 = 0$, que é uma equação do 2º grau para ω^2. Temos

2.6.4

$$\omega^2 = \frac{4\omega_0^2 \pm \sqrt{16\omega_0^4 - 12\omega_0^4}}{2},$$

ou seja $\omega^2 = \omega_1^2 = 3\omega_0^2$ (13) e $\omega^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2$ (14). Descobrimos então que há dois modos de vibração, um com frequência $\omega_1 = \sqrt{3}\,\omega_0$ e outro com $\omega_2 = \omega_0$.

Para seguir, devemos, para cada frequência normal obtida, relacionar A e B, as amplitudes, usando (10) <u>ou</u> (11) para cada valor encontrado de ω. Temos então os casos abaixo:

* $\omega = \omega_1$. Nesse caso, usando (10) e (13) teremos

$$(2\omega_0^2 - 3\omega_0^2)A - \omega_0^2 B = 0 \Rightarrow B = -A.$$

Considerando as formas (6) e (7) teremos então nesse caso

$$x_1 = A e^{i\omega_1 t} \quad (15)$$

$$\text{e } x_2 = -A e^{i\omega_1 t} = e^{i\pi} A e^{i\omega_1 t} = A e^{i(\omega_1 t + \pi)} \quad (16),$$

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0} = -1$$

o que mostra que x_2, <u>nesse modo</u>, terá a mesma amplitude, com oscilações fora de fase em 180° em relação a x_1. Abaixo temos uma representação disso.

$$\xrightarrow{x_1} \qquad \xleftarrow{x_2}$$

Note que o uso de (13) em (11) nos daria o mesmo resultado.

* $\omega = \omega_2$. Nesse caso, usando (10) e (14) teremos

$$(2\omega_0^2 - \omega_0^2) A - \omega_0^2 B = 0 \Rightarrow B = A \quad ,$$

e as formas (6) e (7) nos darão soluções em fase:

$$x_1 = A e^{i\omega_2 t} \qquad (17)$$

$$\text{e } x_2 = A e^{i\omega_2 t} \qquad (18).$$

Abaixo temos uma representação do que ocorre.

Vejamos agora o seguinte: a solução geral, para quaisquer condições iniciais ($x_1(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0)$, $x_2(t=0)$, $\dot{x}_2(t=0)$). superpõe os dois modos. Para $x_1(t)$ isso nos dá

$$x_1(t) = \underbrace{A_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t}}_{\text{modo 1}} + \underbrace{A_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t}}_{\text{Modo 2}} \quad (19),$$

enquanto para $x_2(t)$, dadas as relações entre amplitudes em cada modo,

$$x_2(t) = B_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{B}_1 e^{-i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{B}_2 e^{-i\omega_2 t}$$

$$= -A_1 e^{i\omega_1 t} - \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (20).$$

As formas (19) e (20) estão preparadas para, com as quatro condições iniciais, representar o movimento das massas, notando-se que as constantes que sobraram para o ajuste das condições iniciais, A_1 e $\bar{A}_1$, A_2 e $\bar{A}_2$, são exatamente quatro, como desejado.

Notemos agora que, de (19) e (20),

$$x_1 + x_2 = \eta_2 = 2\left(A_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t}\right) \quad (21)$$

e
$$x_1 - x_2 = \eta_1 = 2\left(A_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t}\right) \quad (22)$$

são variáveis que, embora sem representação física direta, oscilam, cada uma delas, em um único modo. η_1 e η_2 são proporcionais ao que chamamos de coordenadas normais do sistema. De fato, podemos escolher η_1 e η_2 como as coordenadas normais nesse caso. Com elas

$$x_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \quad (23) \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \quad (24)$$

Observe que em termos dessas coordenadas temos

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$$

$$= \frac{m}{2}\frac{1}{4}(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2)^2 + \frac{m}{2}\frac{1}{4}(\dot{\eta}_2 - \dot{\eta}_1)^2 = \frac{m}{4}\dot{\eta}_1^2 + \frac{m}{4}\dot{\eta}_1^2 \quad (25)$$

e

$$U(x_1, x_2) = U(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}k\frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_2)^2 + \frac{1}{2}k(-\eta_1)^2 + \frac{1}{2}k\frac{1}{4}(\eta_2 - \eta_1)^2$$

$$= \frac{3}{4}K\eta_1^2 + \frac{1}{4}\eta_2^2 \quad (26).$$

As expressões acima significam que, em termos das coordenadas normais, além de T, U também não tem termos cruzados, dependentes das duas variáveis.

2.6.7

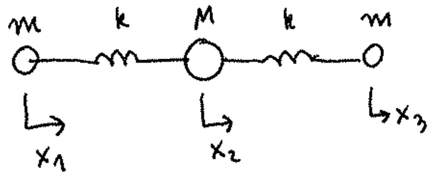
b) 

figura 2

Ao lado temos a situação que poderia ser representativa de vibrações pequenas, por exemplo, numa molécula de CO_2 ($O=C=O$). Em analogia com o item anterior,

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2) \quad (1),$$

com o que ($\omega_0^2 = K/m$, $\Omega_0^2 = K/M$)

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = k(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \quad (2),$$

$$M\ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 + 2\Omega_0^2 x_2 - \Omega_0^2 x_1 - \Omega_0^2 x_3 = 0 \quad (3),$$

$$m\ddot{x}_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -k(x_3 - x_2) \Rightarrow \ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 - \omega_0^2 x_2 = 0 \quad (4).$$

Buscamos modos na forma

$$x_1 = A e^{i\omega t} \ (5), \quad x_2 = B e^{i\omega t} \ (6), \quad x_3 = C e^{i\omega t} \ (7).$$

Colocando (5), (6) e (7) em (2), (3) e (4) temos

$$\left.\begin{array}{l} -\omega^2 A + \omega_0^2 A - \omega_0^2 B = 0 \\ -\omega^2 B + 2\Omega_0^2 B - \Omega_0^2 A - \Omega_0^2 C = 0 \\ -\omega^2 C + \omega_0^2 C - \omega_0^2 B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\omega_0^2 - \omega^2) A - \omega_0^2 B + 0\,C = 0 \quad (8) \\ -\Omega_0^2 A + (2\Omega_0^2 - \omega^2) B - \Omega_0^2 C = 0 \quad (9) \\ 0\,A - \omega_0^2 B + (\omega_0^2 - \omega^2) C = 0 \quad (10) \end{array}$$

A equação secular é agora

$$\begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 & 0 \\ -\Omega_0^2 & 2\Omega_0^2 - \omega^2 & -\Omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{dando}$$

2.6.8

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2\,(2\Omega_0^2-\omega^2)-2\omega_0^2(\omega_0^2-\omega^2)\Omega_0^2=0\ ;$$

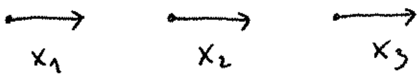
$$(\omega_0^2-\omega^2)\left[(\omega_0^2-\omega^2)(2\Omega_0^2-\omega^2)-2\omega_0^2\Omega_0^2\right]=0\ ;$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)\left[\,\omega_0^2\,2\Omega_0^2-\omega_0^2\omega^2-\omega^2\,2\Omega_0^2-2\omega_0^2\Omega_0^2+\omega^4\right]=0;$$

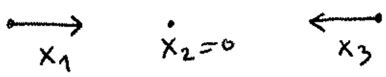
$$(\omega_0^2-\omega^2)\left[\,\omega^2-\omega_0^2-2\Omega_0^2\right]\omega^2=0 \quad (11).$$

As raízes de (11) são $\omega=\omega_1=0$, $\omega=\omega_2=\omega_0$ e $\omega=\omega_3=\sqrt{\omega_0^2+2\Omega_0^2}$.
Temos então 3 casos:

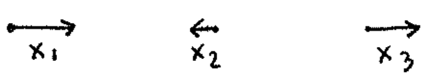
a) $\omega=0$. Por (8), $A=B$ e por (10), $B=C$. As amplitudes são todas iguais mas não há oscilações: $x_1=Ae^{i0t}=A$, $x_2=B$, $x_3=C$. Pode-se mostrar que esse "modo" representa de fato uma translação do sistema. Abaixo um esquema.



b) $\omega=\omega_2=\omega_0$. Por (8), $B=0$. Por (10), também, e consistentemente, $B=0$. Por (9), com $B=0$, $A=-C$. Nesse modo, M está em repouso e as duas outras massas oscilam em oposição. Abaixo um esquema.



c) $\omega=\omega_3=\sqrt{\omega_0^2+2\Omega_0^2} \Rightarrow \omega^2=\omega_0^2+2\Omega_0^2$. Por (8),
$(\omega_0^2-\omega_0^2-2\Omega_0^2)A-\omega_0^2B=0 \Rightarrow B=-\dfrac{2\Omega_0^2}{\omega_0^2}A$. Então, por (10) $-\omega_0^2\left(-\dfrac{2\Omega_0^2}{\omega_0^2}\right)A+(\omega_0^2-\omega_0^2-2\Omega_0^2)C=0 \Rightarrow 2\Omega_0^2A-2\Omega_0^2C=0$
$\Rightarrow C=A$. Então A e B estão em oposição, enquanto A e C estão em fase com a mesma amplitude. Abaixo um esquema.



2.7. (3.7).1

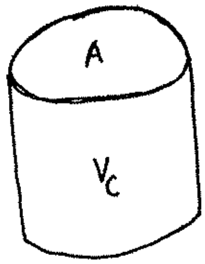


fig.1

$A = 1\,cm^2$

$\rho = 0.8\ g/cm^3$ (densidade do cilindro)

V_c = volume do cilindro

$\longrightarrow$

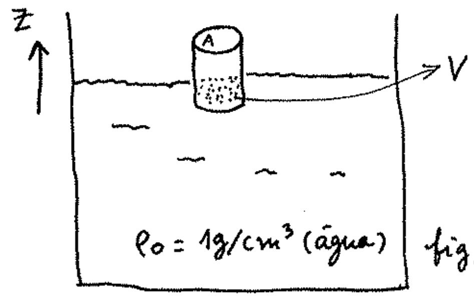


fig.2

O cilindro é colocado na água, com $V = 0{,}8\,cm^3$ sendo um volume submerso quando não há movimento.

Situação de equilíbrio $\longrightarrow$

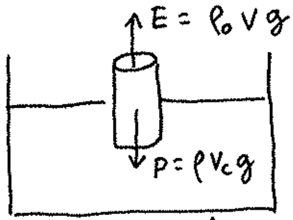


fig.3

$\downarrow$

$$\rho_0 V g = \rho V_c g \Rightarrow \rho_0 V = \rho V_c \quad (1)$$

Oscilações $\longrightarrow$

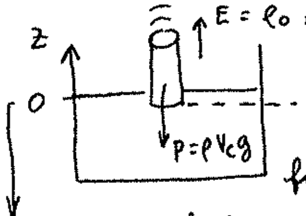


fig.4

$z = -\delta$: coordenada do fundo do cilindro

$z = 0$: nível da água (considerado constante)

$$\underbrace{\rho_0 A \delta g}_{\delta = -z} - \underbrace{\rho V_c g}_{\rho_0 V \text{ por (1)}} = \underbrace{\rho V_c}_{\rho_0 V \text{ por (1)}} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (2)$$

De (2), $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{Ag}{V}}_{\omega_0^2} z = -g \quad (3)$ Solução geral $z = c + \underbrace{a \cos\omega_0 t + b \operatorname{sen}\omega_0 t}_{\text{oscilação com frequência } \omega_0}$

$$\omega_0^2 = \frac{Ag}{V} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{gA}}$$

lembre que V não é V_c!

Calcule T com os dados.

2.7. (3.8).K

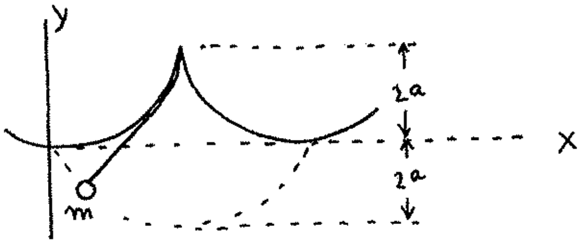


fig 1

$l = 4a$ = comprimento do pêndulo

Coordenadas de m $\begin{cases} x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi) & (1) \\ y = a(\cos\phi - 1) & (2) \end{cases}$

ϕ é um parâmetro não representado na figura 1

$U = mgy = mga(\cos\phi - 1)$ (3)

$T = \frac{m}{2}\left[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right]$ (4)

$\dot{x} = a(\dot{\phi} - \cos\phi\,\dot{\phi})$ (5), $\dot{y} = a(-\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi)$ (6), por (1) e (2).

De (5) e (6),

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\dot{\phi}^2(1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi) + a^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\phi$$

$$= a^2\dot{\phi}^2(2 - 2\cos\phi) \quad (7)$$

Levando em conta (3), (4) e (7) a energia do movimento de m é

$$E = mga(\cos\phi - 1) + ma^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi) (8).$$

$\frac{dE}{dt} = 0$ nos dá, por (8),

$$2a\ddot{\phi}(1 - \cos\phi) + a\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi - g\operatorname{sen}\phi = 0 \quad (9).$$

Acontece que em (9) podemos usar $\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\phi)$ e $\operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$, com o que (9) fica

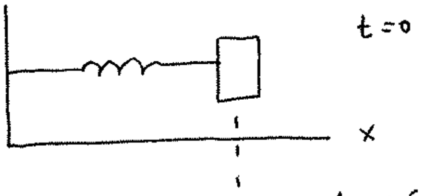
$$a\ddot{\phi}\,4\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} + 2a\dot{\phi}^2\cos\frac{\phi}{2} - 2g\cos\frac{\phi}{2} = 0 \quad (10).$$

Fazendo agora em (10) a substituição $\xi = \cos\frac{\phi}{2}$ (11) teremos

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{4a}\xi = 0 \quad (12),$$

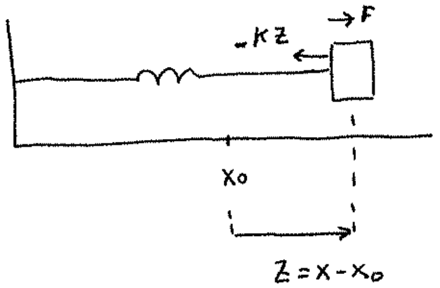
O que mostra que m oscila com $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4a}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

2.7. (3.9).1



x_0 = posição de equilíbrio (e não inicial)

fig 1



F é aplicada no intervalo $0 \leq t \leq t = t_0$

$0 \leq t \leq t_0$: $m \dfrac{d^2 Z}{d t^2} + K Z = F \Rightarrow Z = A \cos \omega_0 t + B\, \mathrm{sen}\, \omega_0 t + \dfrac{F}{K}$ (1),

com $\omega_0^2 = \dfrac{K}{m}$.

Se $\left.\begin{array}{l} Z\ (t=0) = 0\ (2) \\ \dot Z\ (t=0) = 0\ (3) \end{array}\right\}$ mostre por (1) que $A = -\dfrac{F}{K}$ (4) e $B = 0$.

Então, para $0 \leq t \leq t_0$, $\left\{\begin{array}{l} Z(t) = \dfrac{F}{K}(1 - \cos \omega_0 t) \quad (5) \\ \dot Z = \dot Z(t) = \dfrac{F\omega_0}{K}\, \mathrm{sen}\, \omega_0 t \ (6). \end{array}\right.$

Por (5) e (6), portanto, em $t = t_0$, teremos

$Z(t = t_0) = \dfrac{F}{K}(1 - \cos \omega_0 t_0)$ (7) e $\dot Z(t = t_0) = \dfrac{F\omega_0}{K}\, \mathrm{sen}\, \omega_0 t$ (8).

Quando F é liberada, isto é para $t > t_0$, ficamos com

$m \dfrac{d^2 Z}{dt^2} = -KZ \Rightarrow Z = C \cos \omega_0 t + D\, \mathrm{sen}\, \omega_0 t$ (9).

Aplicando as condições (7) e (8) em (9), encontre C e D e mostre que

$$x - x_0 = Z = \frac{F}{K}\left[\cos\omega_0 t_0 \cos\omega_0 t + \mathrm{sen}\,\omega_0 t_0\, \mathrm{sen}\,\omega_0 t - \cos\omega_0 t\right] = \frac{F}{K}\left[\underbrace{\cos\omega_0(t_0 - t)}_{= \cos\omega_0(t - t_0)} - \cos\omega_0 t\right] \quad (10)$$

O pêndulo sem atrito já foi considerado anteriormente.

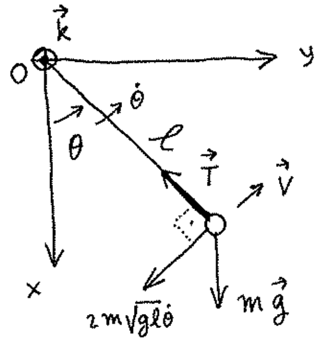


figura 1: $\dot\theta$ foi escolhido para estar no sentido de $\vec{k}$ $(\dot\theta > 0)$. A força de atrito de intensidade $2m\sqrt{g\ell}\,\dot\theta$ se opõe ao movimento, o que explica a direção e o sentido colocados para essa força.

Acompanhamos a figura 1.

$$\vec{L} = \underbrace{m\ell^2}_{\substack{I \\ \text{momento de inércia} \\ \text{de } m \text{ em relação a } O.}} \underbrace{\dot\theta}_{\substack{\omega \\ \text{velocidade angular de } m}} \vec{k} \quad (1)$$

$$\text{Torques:} \begin{cases} \vec{N}_p = \text{"torque do peso"} = -mg\,l\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{k} \quad (2) \\ \vec{N}_{atrito} = -2m\sqrt{g\ell}\,\dot\theta\,\ell\,\vec{k} \quad (3) \end{cases}$$

Como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_p + \vec{N}_{atrito} \quad (4)$$

temos, por (1), (2) e (3),

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot\theta\,\vec{k}\right) = -mg\,l\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{k} - 2m\sqrt{g\ell}\,\dot\theta\,\ell\,\vec{k}$$

ou, "derivando em relação ao tempo e cortando os $\vec{k}$", $m\ell^2\ddot\theta = -mg\ell\,\mathrm{sen}\theta - 2m\sqrt{g\ell}\,\ell\,\dot\theta$ (5).

Se θ é sempre pequeno aproximamos $\mathrm{sen}\theta$ por $\mathrm{sen}\theta = \theta$, até a ordem $O(\theta^3)$, com o que (5) fica

$$\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\theta - 2\frac{\sqrt{g\ell}}{\ell}\dot\theta = 0 \Rightarrow \ddot\theta + 2\underbrace{\frac{\sqrt{g\ell}}{\ell}}_{\beta}\dot\theta + \underbrace{\frac{g}{\ell}}_{\omega_0^2}\theta = 0 \quad (6).$$

Mostre que, se $\theta = e^{pt}$, o amortecimento será crítico com

$$\theta(t) = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}.$$

2.8. (5.2).1

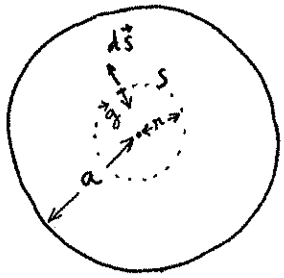


figura 1

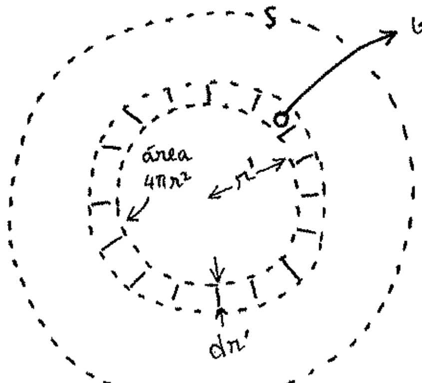
Acompanharemos a figura ao lado. Usaremos

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = -4\pi G \underbrace{M}_{\substack{\text{massa}\\ \text{interna}\\ \text{à superfície}\\ S}} \quad (1)$$

Lei de Gauss da Gravitação

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = -g(r)\, 4\pi r^2$$ por simetria radial (2).

$$M = \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2\, dr'$$ (3) (ver figura 2).



volume $\underbrace{4\pi r'^2}_{\text{"área da base"}} \cdot \underbrace{dr'}_{\text{"altura"}}$ contendo massa $dm = \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr$

figura 2: S é a figura interna (superfície interna) na figura 1. Note que em (3), nos limites de integração, r é o raio interno a S, enquanto que no integrando em (3) e nessa figura r' é o raio de uma casca interna a S.

Colocando (3) e (2) em (1) temos

$$-g(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi G \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2\, dr' \Rightarrow g(r)\, r^2 = 4\pi G \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \quad (4)$$

(4) é uma equação integral para a função $\rho(r)$ se $g(r)$ é conhecida. Derivando (4) em relação a r temos

$$\frac{dg(r)}{dr} r^2 + 2\, g(r)\, r = 4\pi G\, \rho(r)\, r^2 \quad (5).$$

2.8 (5.2).2

Se, por imposição do enunciado, $\frac{dg(r)}{dr} = 0$ (g constante),

temos

$$2g(r)\,r = 4\pi G \rho(r) r^2 \Rightarrow \rho(r) = \frac{g}{2\pi G}\frac{1}{r} \quad (6).$$

Note que a massa M do corpo será

$$M = \int_0^a \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi g}{2\pi G}\int_0^a \frac{1}{r} r^2\, dr$$

$$= \frac{2g}{G}\frac{a^2}{2} = \frac{g a^2}{G} \quad (7).$$

Com a relação (7), (6) fica

$$\rho(r) = \frac{\frac{GM}{a^2}}{2\pi G}\frac{1}{r} = \frac{M}{2\pi a^2}\frac{1}{r} \quad (8)$$

Situação inicial →

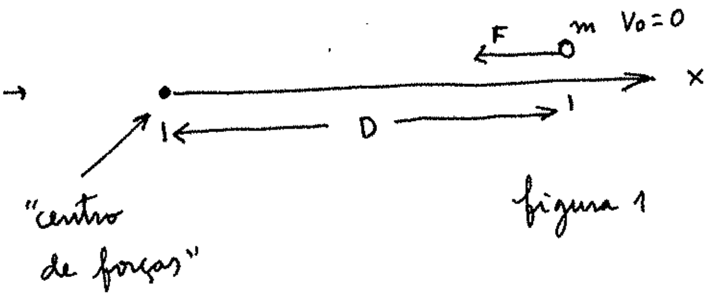


figura 1

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{mk^2}{x^3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} V = -\frac{mk^2}{x^3} \Rightarrow$$

$$V\,dV = -\frac{k^2\,dx}{x^3} \Rightarrow \frac{V^2}{2} = -\frac{k^2\,x^{-3+1}}{-3+1} + C \Rightarrow V^2 = \frac{k^2}{x^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ c' = 2c}}{c'} \quad (1).$$

Dada a situação inicial temos, por (1), $0 = \frac{k^2}{D^2} + c' \Rightarrow$ $c' = -\frac{k^2}{D^2}$ (3). De (1) e (3),

$$V^2 = k^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{D^2} \right) = k^2 \left(\frac{D^2 - x^2}{D^2 x^2} \right) \quad (4).$$

A raiz correta em (4) é

$$V = -k \sqrt{\frac{D^2 - x^2}{D^2 x^2}} \quad (5),$$

porque m está indo no sentido do centro de forças (figura 1), contrário portanto ao sentido de x crescente.

De (5) temos

$$\frac{dx}{dt} = -k \sqrt{\frac{D^2 - x^2}{D^2 x^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{D^2 - x^2}{D^2 x^2}}} = -k\,dt \quad (6).$$

Se $x = D$ em $t = 0$ e $x = 0$ em $t = T$ = tempo para m chegar à origem, temos

$$\int_D^0 \frac{Dx\,dx}{\sqrt{D^2 - x^2}} = -k \int_0^T dt \Rightarrow T = \frac{1}{k} \int_0^D \frac{Dx}{\sqrt{D^2 - x^2}}\,dx \quad (7).$$

Como $\int \frac{Dx}{\sqrt{D^2 - x^2}}\,dx = -D\sqrt{D^2 - x^2}$ temos, por (7),

$$T = \frac{1}{k} \left[-D\sqrt{D^2 - D^2} + D\sqrt{D^2} \right] = \frac{D^2}{k} \quad (8).$$

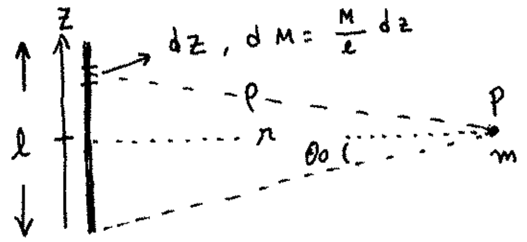


figura 1: pede-se o potencial gravitacional ϕ da barra em P

Potencial em P devido ao segmento dz na barra de comprimento l e massa M:

$$d\phi = \frac{dU}{m} = -\frac{\frac{G\,dM\,m}{\rho}}{m} ;$$

$$d\phi = -\frac{GM}{l}\frac{dz}{\rho} \quad (1).$$

Como $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$ temos

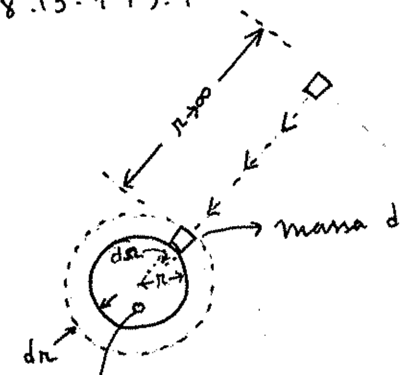
$$d\phi = -\frac{GM}{l}\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad \therefore$$

$$\phi = -\frac{GM}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = -\frac{GM}{l}\left\{\ln\left(\frac{l}{2r}+\sqrt{\frac{l^2}{4r^2}-1}\right)-\ln\left(-\frac{l}{2r}+\sqrt{\frac{l^2}{4r^2}-1}\right)\right\} \quad (2),$$

porque

$$\int\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left(\frac{z}{r}+\sqrt{\frac{z^2}{r^2}-1}\right).$$

2.8.(5.14).1



massa $dm = \dfrac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\, \underbrace{r^2\, dr\, d\Omega}$

$r^2\, d\Omega\, dr$ = volume de dm

massa $m = \dfrac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\, \dfrac{4\pi}{3} r^3$

figura 1: M é a massa final do corpo, que terá raio $r = R$.

na figura 1 estamos acrescentando à massa m "pedaços" de massa dm trazidos de "$r \to \infty$". Cada massa dm "inclui" em m a energia $dU = -\dfrac{Gm\,dm}{r}$ (1).

$$U = \int dU = \int_\Omega \int_0^R -\frac{Gm\,dm}{r} = -G\iint_{\Omega\ 0}^{R} \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\,\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\, r^2\, dr\, \underbrace{d\Omega}_{\int d\Omega = 4\pi}$$

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R}$$

2.9. (12.3).1

$$\ddot{x}_1 + \frac{m}{M}\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (1)$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{m}{M}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 = 0 \quad (2)$$
$$\frac{m}{M} = \alpha^2 \text{ (definição)}$$

Pedem-se os modos <u>normais</u>: oscilações de mesma frequência Ω e amplitudes (e fases) possivelmente diferentes. Ou seja: pedem-se soluções do tipo $x_1 = Ae^{i\Omega t}$ (3) e $x_2 = Be^{i\Omega t}$ (4).

(3) e (4) em (1) e (2):

$$\left.\begin{array}{l} -A\Omega^2 - \alpha^2 B\Omega^2 + \omega_0^2 A = 0 \quad (1') \\ -B\Omega^2 - \alpha^2 A\Omega^2 + \omega_0^2 B = 0 \quad (2') \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(\omega_0^2 - \Omega^2) - B\alpha^2\Omega^2 = 0 \quad (5) \\ -A\alpha^2\Omega^2 + B(\omega_0^2 - \Omega^2) = 0 \quad (6) \end{array}$$

A solução para (5) e (6) é trivial $(A = B = 0)$ a <u>menos</u> que

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & -\alpha^2\Omega^2 \\ -\alpha^2\Omega^2 & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2(1 \pm \alpha^2) \; (7).$$ Então há <u>dois</u> modos.

1º modo: $\Omega = \omega_0\sqrt{1+\alpha^2} = \Omega_1$ $(\Omega_1^2 = \Omega^2 = \omega_0^2(1+\alpha^2))$. Por (5) essa condição nos dá $B = -\frac{A}{\alpha^2+1}$ (8) e oscilações

$$x_1 = Ae^{i\Omega_1 t} \quad (9)$$
$$x_2 = Be^{i\Omega_1 t} = -\frac{A}{\alpha^2+1}e^{i\Omega_1 t} = \frac{A}{\alpha^2+1}e^{i(\Omega_1 t + \pi)} \quad (10)$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Vemos que no primeiro modo x_1 e x_2 oscilam fora de fase em 180° com amplitudes distintas.

2º modo: $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2} = \Omega_2$ $(\Omega_2^2 = \Omega^2 = \omega_0^2(1-\alpha^2))$. Por (5) essa condição nos dá $B = \frac{A}{1-\alpha^2}$ (11). Como $\alpha^2 < 1$, temos oscilações

$$x_1 = Ae^{i\Omega_2 t} \quad (12)$$
$$x_2 = Be^{i\Omega_2 t} = \frac{A}{1-\alpha^2}e^{i\Omega_2 t} \quad (13)$$

em que x_1 e x_2 tem amplitudes distintas e mesma fase.

Nota: A solução geral é

$$x_1 = ae^{i\Omega_1 t} + be^{-i\Omega_1 t} + ce^{i\Omega_2 t} + de^{-i\Omega_2 t},$$
$$x_2 = -\frac{a}{\alpha^2+1}e^{i\Omega_1 t} - \frac{b}{\alpha^2+1}e^{-i\Omega_1 t} + \frac{c}{1-\alpha^2}e^{i\Omega_2 t} + \frac{d}{1-\alpha^2}e^{-i\Omega_2 t}.$$

2.9. (12.12).1

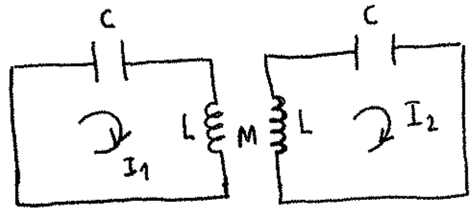


figura 1

$$L\dot{I}_1 + \frac{q_1}{C} + M\dot{I}_2 = 0 \quad (1)$$

$$L\dot{I}_2 + \frac{q_2}{C} + M\dot{I}_1 = 0 \quad (2)$$

Derivando (1) e (2) em relação ao tempo com $\dot{q}_1 = I_1$ e $\dot{q}_2 = I_2$ temos

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 + \frac{q_1}{LC} + \frac{M}{L}\dot{I}_2 &= 0, \\ \dot{I}_2 + \frac{q_2}{LC} + \frac{M}{L}\dot{I}_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \ddot{I}_1 + \frac{1}{LC} I_1 + \frac{M}{L}\ddot{I}_2 &= 0 \quad (3), \\ \ddot{I}_2 + \frac{1}{LC} I_2 + \frac{M}{L}\ddot{I}_1 &= 0 \quad (4). \end{aligned}$$

Se $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ e $\alpha^2 = \frac{M}{L}$, (3) e (4) ficam

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{I}_1 + \alpha^2 \ddot{I}_2 + \omega_0^2 I_1 = 0 \quad (5) \\ \text{e} \quad &\ddot{I}_2 + \alpha^2 \ddot{I}_1 + \omega_0^2 I_2 = 0 \quad (6) \end{aligned}\right\}$$

que são formalmente idênticas à questão 8 dessa lista, problema 12.3 de TM. Faça a análise como lá, trocando x_1 por I_1 e x_2 por I_2.