Primeira lista de questões - Mecânica Geral I

Sugestões de respostas

Convenções de paginação (canto esquerdo de cada folha)

1) Para questões não retiradas do livro*: X. Y. Z, com X = nº da lista (referente as listas 1, 2 ou 3), Y = número do exercício na lista X e Z = página do roteiro de sugestões de respostas referente ao exercício Y.

2) Para questões retiradas do livro: X.V.(Y.Z).K, com X = nº da lista, V = nº do exercício na lista X em que são chamadas as questões no livro, (Y.Z) = número do problema segundo consta no livro (Y = nº do problema, Z = capítulo do livro em questão), K = página do roteiro de sugestões de respostas referente ao problema Y.Z.

* Thornton - Marion, "Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas", tradução da 5ª edição, Cengage, S.P., 2011.

1.1.1

Vamos considerar o movimento circular uniforme e o deslocamento de um ponto, como ao lado, da posição 1 à posição 2. C é o centro da trajetória, de raio R. Em conformidade com

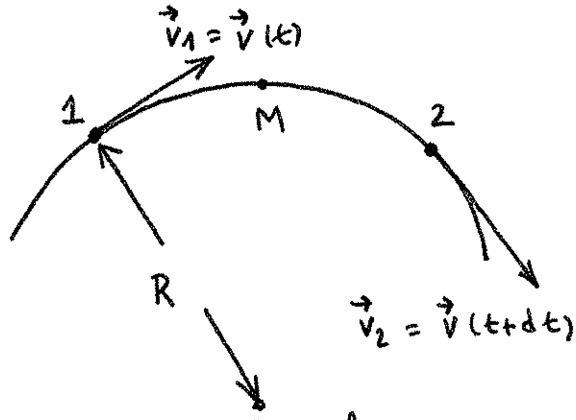


fig1

a figura, o ponto material está na posição 1 no instante t e estará na posição 2 no instante t + dt (dt é um pequeno intervalo de tempo). Sendo circular uniforme o movimento, temos

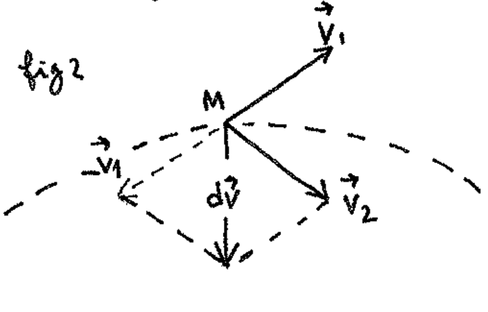
$v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}(t)| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}(t+dt)|$ (velocidade constante em módulo).

Primeiramente, é interessante que se mostre que a aceleração $\vec{a} = \vec{a}(t)$ (instantânea), dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{dt} = \left(\frac{1}{dt}\right)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (1),$$

deve ser um "vetor radial", "voltado para o centro". Para visualizarmos isso, vamos transportar, como na figura abaixo, os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ para o ponto médio da trajetória, M.

fig2



1.1.2

Considerando as figuras 1 e 2, vemos claramente que $d\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ é radial, como desejávamos mostrar. Por outro lado, sendo dt escalar, $\frac{1}{dt}$ é também escalar. Por essa razão $\vec{a} = \left(\frac{1}{dt}\right) d\vec{v}$ deve também ser radial.

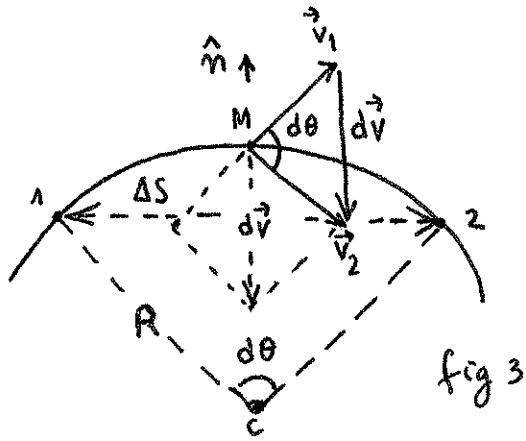


fig 3

A abordagem quantitativa da questão será feita a partir da figura ao lado. Se $d\theta$ é muito pequeno, ΔS, a distância entre os pontos 1 e 2, é muito próxima ao comprimento do arco $\widehat{1M2}$. Você deveria ser capaz de mostrar que o triângulo 12C e o triângulo das velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são semelhantes. Em virtude dessa semelhança temos

$$\frac{\Delta S}{|d\vec{v}|} = \frac{R}{|\vec{v}_1|} = \frac{R}{v} \Rightarrow |d\vec{v}| = \frac{v\Delta S}{R} \quad (2).$$

Como, por (1), $|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt}$ $(dt > 0)$ temos,

por (2), $|\vec{a}| = \dfrac{\frac{v\Delta S}{R}}{dt} = \dfrac{v\,\frac{\Delta S}{dt}}{R} = \dfrac{v^2}{R}$ (3), porque $v = |\vec{v}| = \frac{\Delta S}{dt}$, no limite em que dt, ΔS e $d\theta$ tendem a zero.

$|\hat{n}| = 1$

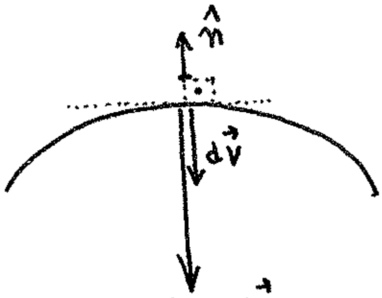


fig 4

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
$= -|\vec{a}|\hat{n}$

fig 4

Para escrevermos uma relação vetorial, uma vez que sabemos que $\vec{a}$ é "radial para o centro", basta adotarmos o vetor unitário $\hat{n}$ como ao lado. Teremos, por ③,

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\,\hat{n} \quad ,$$

sendo o sinal negativo representativo de que $\vec{a}$ e $\hat{n}$ são vetores de sentidos opostos.

Observe que o resultado $|\vec{v}| = \dfrac{\Delta s}{dt} = \dfrac{ds}{dt}$ ou, mais rigorosamente, $|\vec{v}| = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$, sendo $ds =$ arco infinitesimal percorrido no intervalo dt de tempo, é geral e não se restringe ao movimento circular uniforme. Isso pode ser visto com o auxílio da figura 5 ao lado, em que um móvel vai do ponto 1 ao 2. Temos, com $\Delta s = ds > 0$,

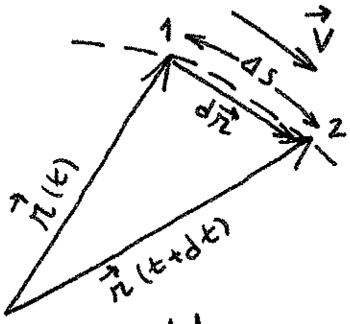


fig5 (adota-se $\Delta s > 0$)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}, \text{ por}$$

regra da cadeia. Ocorre que $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = \dfrac{|d\vec{r}|}{ds} = \dfrac{ds}{ds} = 1$ $(ds > 0)$, e que então $|\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\,\dfrac{ds}{dt}\right| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|\left|\dfrac{ds}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

1.1.4

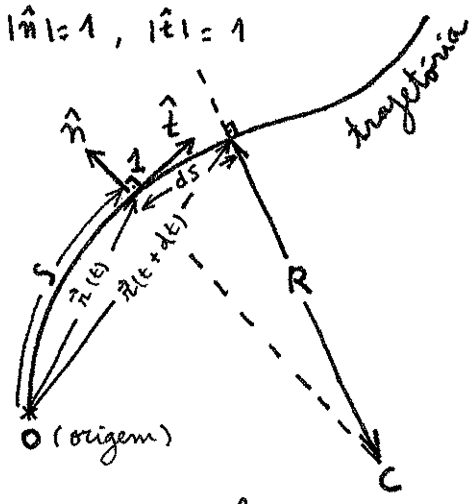


fig 6

Com o auxílio de uma figura como a que está esboçada ao lado, em que a trajetória é plana apenas por comodidade, pode-se mostrar, de forma geral, que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\hat{t} = v\,\hat{t}$$

e que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\hat{t} - \frac{v^2}{R}\,\hat{n} ,$$

sendo R o raio local da trajetória no ponto 1.

1.2.1

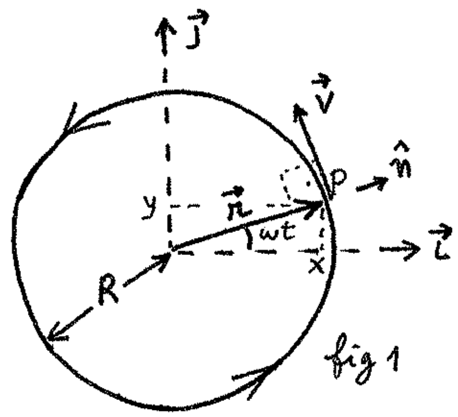


fig 1

$\vec{r}$ = posição do ponto P

A situação está esboçada ao lado, com $|\vec{r}| = R$. De fato a trajetória é circular, porque se escrevemos $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, temos $x = R\cos\omega t$ e $y = R\,\text{sen}\,\omega t$, de onde $\cos\omega t = \frac{x}{R}$ e $\text{sen}\,\omega t = \frac{y}{R}$. Então, como $\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t = 1$, temos $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$, que é a equação de uma circunferência.

Note que podemos, alternativamente, escrever

$$\vec{r} = R\cos\omega t\,\underbrace{(1,0)}_{\vec{i}} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\underbrace{(0,1)}_{\vec{j}} = (R\cos\omega t, 0) + (0, R\,\text{sen}\,\omega t)$$
$$= (R\cos\omega t, R\,\text{sen}\,\omega t) = (x, y).$$

Temos então, de forma talvez mais clara,

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = |\vec{r}|^2 = (x,y)\cdot(x,y) = x^2 + y^2 = R^2\cos^2\omega t + R^2\text{sen}^2\omega t$$
$$= R^2\underbrace{(\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t)}_{=1} = R^2$$

Para a velocidade, teremos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j}) = -R\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{i}$$
$$+ R\omega\cos\omega t\,\vec{j},$$

de onde

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2}$$

$$= \sqrt{(-R\omega \,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j})\cdot(-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j})}$$

$$= \Big[(-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2\,\overbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}^{=1} + (-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)(R\omega\cos\omega t)\,\overbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}^{=0}$$

$$+ (R\omega\cos\omega t)(-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)\,\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{=0} + (R\omega\cos\omega t)^2\,\overbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}^{=1}\Big]^{1/2}$$

$$= \sqrt{R^2\omega^2\,\underbrace{(\mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{=1}} = R\omega,$$

constante porque R e ω são constantes.

Note que $\vec{r}$ e $\vec{V}$ são perpendiculares:

$$\vec{r}\cdot\vec{V} = (R\cos\omega t,\ R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\cdot\overbrace{(-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t,\ R\omega\cos\omega t)}^{=-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}}$$

$$= -R^2\omega\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t + R^2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t = 0$$

Agora,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j})$$

$$= -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{j}$$

$$= -\omega^2(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{j}) = -\omega^2\vec{r}.$$

Observe que $|\vec{a}| = |-\omega^2\vec{r}| = \omega^2|\vec{r}| = \omega^2 R$. Se notamos agora que $\hat{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/R$ (para que $|\hat{n}| = 1$), temos

$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2 R\hat{n} = -\dfrac{V^2}{R}\hat{n}$, porque $V = \omega R$ como provado.

1.3.1

a) Se $\vec{r} = 2\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}$

$$= (2\,\text{sen}\,\omega t, \cos\omega t) = (x, y),$$

temos

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\,\text{sen}\,\omega t \quad (1) \\ y = \cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\omega t = \dfrac{x}{2} \\ \cos\omega t = y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ porque } \text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t = 1.$$

Ocorre que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ é a equação de uma <u>elipse</u>.

Então a trajetória é como esboçado ao lado. $\vec{r}$ é posição da partícula no ponto P. Note o seguinte:

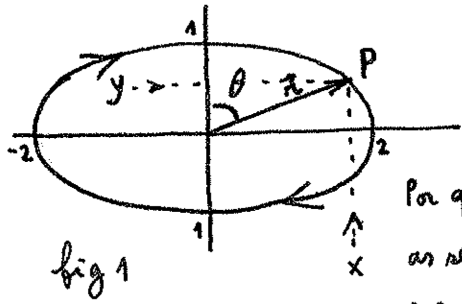


fig 1

Por que as setas na trajetória?

$$\left.\begin{array}{l} x = |\vec{r}|\,\text{sen}\,\theta, \\ y = |\vec{r}|\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \sqrt{x^2+y^2}\,\text{sen}\,\theta, \\ y = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{4\,\text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t}\,\text{sen}\,\theta, \\ y = \sqrt{4\,\text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t}\cos\theta. \end{array}\right. \quad (2)$$

Por comparação dessas expressões com (1), $\theta \neq \omega t$. Observe que por (1) e (2)

$$\frac{x}{y} = 2\,\text{tg}\,\omega t = \text{tg}\,\theta,$$

por onde também vemos que $\theta \neq \omega t$. Se escrevemos

$\theta = \text{arctg}\,(2\,\text{tg}\,\omega t)$ temos um gráfico como abaixo

1.3.2

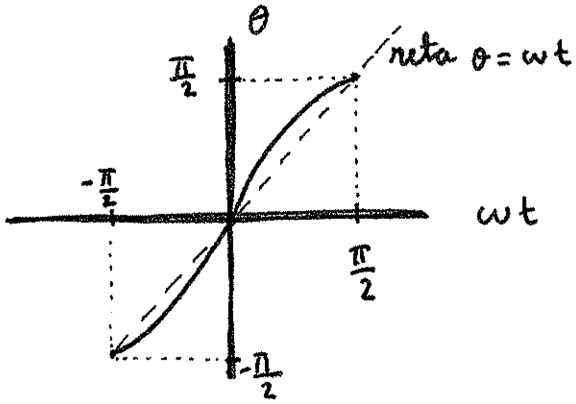


fig 2

Vemos então que o "raio vetor" $\vec{r}$ não executa um movimento com $\dot{\theta}$ constante.

b) Temos agora

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\omega \cos \omega t\, \vec{i} - \omega \,\text{sen}\, \omega t\, \vec{j} \quad ③$$

e $$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -2\omega^2 \,\text{sen}\,\omega t\, \vec{i} - \omega^2 \cos\omega t\, \vec{j} \quad ④$$

$$= -\omega^2 \left(2\,\text{sen}\,\omega t\, \vec{i} + \cos\omega t\, \vec{j}\right) = -\omega^2 \vec{r} \,,$$

o que implica que nesse movimento a aceleração é "centrípeta", embora $|\vec{r}|$ seja agora variável.

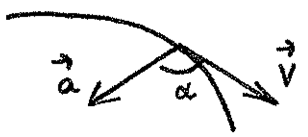


fig 3

Formalmente o ângulo entre $\vec{V}$ e $\vec{a}$, α (figura 3 ao lado) pode ser obtido por $\vec{a}\cdot\vec{V} = |\vec{a}||\vec{V}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{|\vec{a}||\vec{V}|}$.

Por ③ e ④,

$$\cos\alpha = \frac{-4\omega^3 \cos\omega t \,\text{sen}\,\omega t + \omega^3 \,\text{sen}\,\omega t \cos\omega t}{\sqrt{4\omega^2\cos^2\omega t + \omega^2 \,\text{sen}^2\omega t}\ \sqrt{4\omega^4 \,\text{sen}^2\omega t + \omega^4\cos^2\omega t}}$$

$$= -\frac{3\cos\omega t \,\text{sen}\,\omega t}{\sqrt{4\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t}\ \sqrt{4\,\text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t}} = -\frac{\frac{3}{4}\,\text{sen}\,2\omega t}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}\,\text{sen}^2 2\omega t}}$$

1.4.1

O movimento circular uniforme (figura ao lado) tem sua trajetória definida pela relação

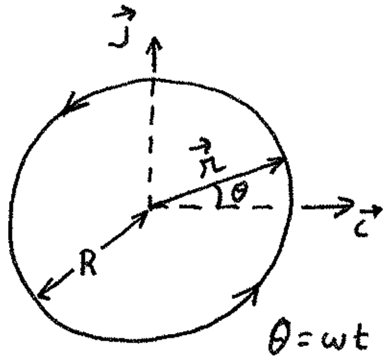


fig 1

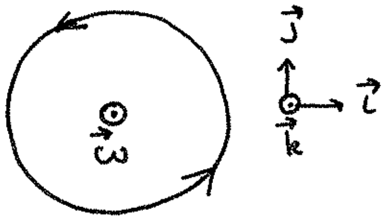
$$\vec{r} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{j} \quad (1)$$

com ω e R constantes, se $\theta\,(t=0)=0$.

Sabemos que $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$ (2)

(questão 2 da presente lista).

Vamos agora <u>definir</u> um vetor $\vec{\omega}$, como sugere a figura ao lado, pela relação



$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} = \omega\vec{k} \quad (3)$$

No caso do movimento circular uniforme, $\dfrac{d\theta}{dt}$ é constante e $\vec{\omega}$ é um vetor constante.

Não é muito difícil mostrar que a definição de $\vec{\omega}$ nos conduz a $\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Vejamos: se $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = (0,0,\omega)$, temos, por (1) e (3),

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\omega t & R\,\mathrm{sen}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = -\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + \omega R\cos\omega t\,\vec{j},$$

que imediatamente reconhecemos como $\vec{v}$ por 2. Alternativa para a obtenção de $\vec{\omega}\times\vec{r}$:

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega\vec{k}\times(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{j})$$

$$= \omega R\cos\omega t\,\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}} + \omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}} = \omega R\cos\omega t(\vec{j}) + \omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t(-\vec{i})$$

$$= -\omega R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{i} + \omega R\cos\omega t\,\vec{j}.$$

Isso tudo significa que a definição do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ é compatível com o que já sabemos, por 1 e 2, sobre um movimento circular uniforme.

Temos agora, se $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\substack{=\vec{0}\text{ se }\vec{\omega}\\ \text{é constante}}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}}.$$

Então, por 2 e 3

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t & R\omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\,[\underbrace{R\cos\omega t\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\vec{j}}_{\vec{r}}]$$

$$= -\omega^2\vec{r}.$$

Isso significa que com a definição de $\vec{\omega}$ obtemos, novamente, a aceleração centrípeta esperada.

1.5.1

Você encontra esse problema discutido no livro, no capítulo 1. Daremos aqui uma alternativa de dedução.

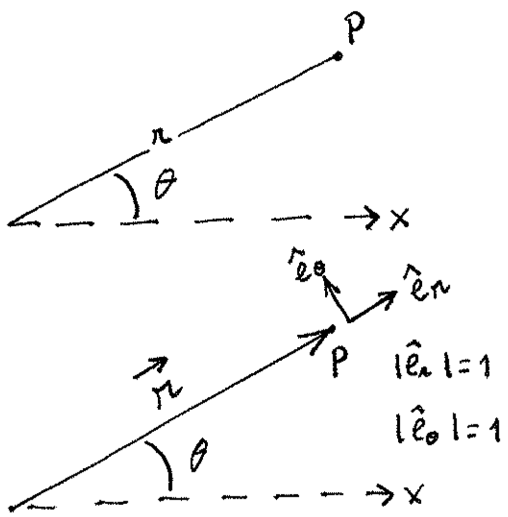


fig 1

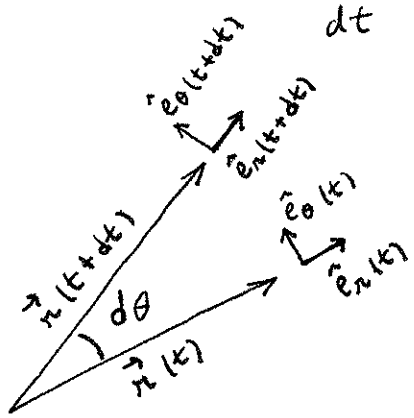
Na figura ao lado as coordenadas polares de P são r e θ. O vetor posição $\vec{r}$ do ponto P se expressa de forma relativamente simples:

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \quad ①$$

Temos a velocidade dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{e}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=\dot{r}}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \quad ②$$

Para terminar o cálculo de $\vec{v}$, devemos obter $\dfrac{d\hat{e}_r}{dt}$.



Nós vamos fazer isso com o auxílio da figura ao lado. Como $|\hat{e}_r|=1$ e $|\hat{e}_\theta|=1$, temos, pela figura,

$$|d\hat{e}_\theta| = |\hat{e}_\theta|\,d\theta = d\theta \quad ③$$

e $$|d\hat{e}_r| = |\hat{e}_r|\,d\theta = d\theta \quad ④.$$

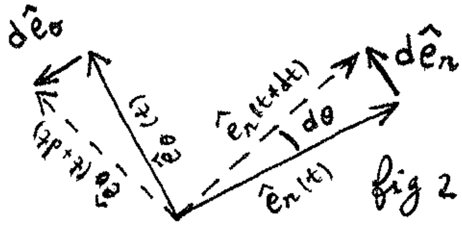


fig 2

1.5.2

Levando em conta ③ e ④ e as direções e sentidos de $d\hat{e}_r$ e $d\hat{e}_\theta$ pela figura 2, temos

$$d\hat{e}_r = d\theta\, \hat{e}_\theta \quad ⑤$$

$$\text{e} \quad d\hat{e}_\theta = -d\theta\, \hat{e}_r \quad ⑥.$$

Por ⑤ e ⑥ temos

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \quad ⑦$$

$$\text{e} \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_r = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r \quad ⑧.$$

Voltando com ⑦ a ② temos

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \quad ⑨.$$

Usando agora ⑨, ⑦ e ⑧ temos a aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

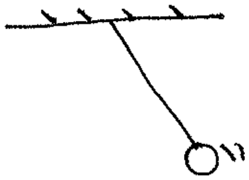
$$= \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

1.6.1

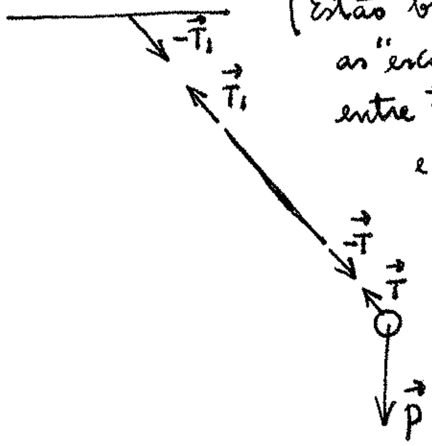
Serão apresentadas aqui algumas propostas parciais de resposta. $\vec{f}$ e $-\vec{f}$ são, em cada figura, um par ação - reação. Alguns efeitos, como presença de ar e outros corpos, serão desconsiderados, de forma que as figuras não são em geral completas.

(a)



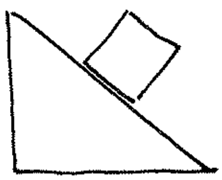
→ forças →

(peso do fio desprezado)

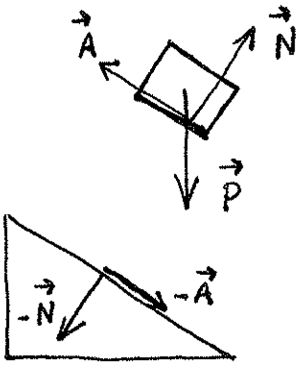


(Estão boas as "escalas" entre $\vec{T}$, $\vec{T}_1$ e $\vec{P}$?)

(b)



→

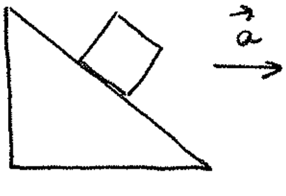


Pode estar completo esse desenho?

Obs: como há repouso, devemos ter $\vec{N} + \vec{A} + \vec{P} = \vec{0}$.

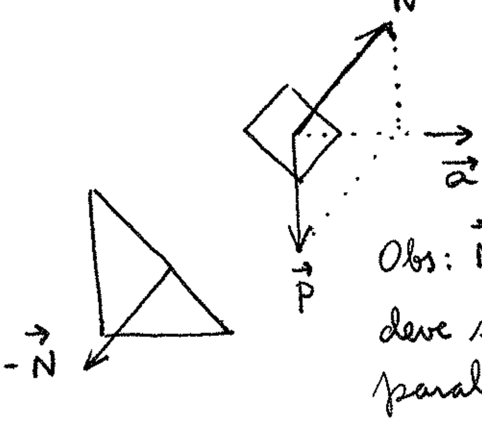
Como garantir que não há rotação?

(C)



→

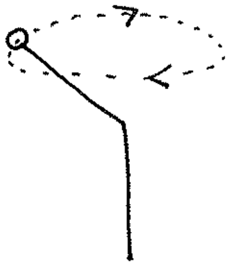
Sem atrito



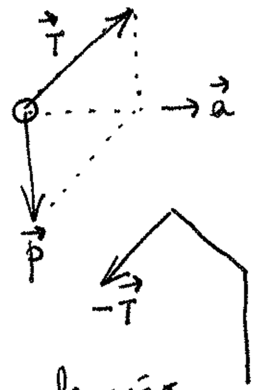
Obs: $\vec{N} + \vec{P}$ deve ser paralelo a $\vec{a}$.

1.6.2

(d)



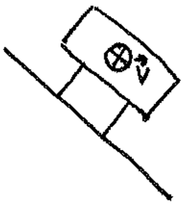
→



$\vec{T}$ é a força do cabo sobre a esfera.

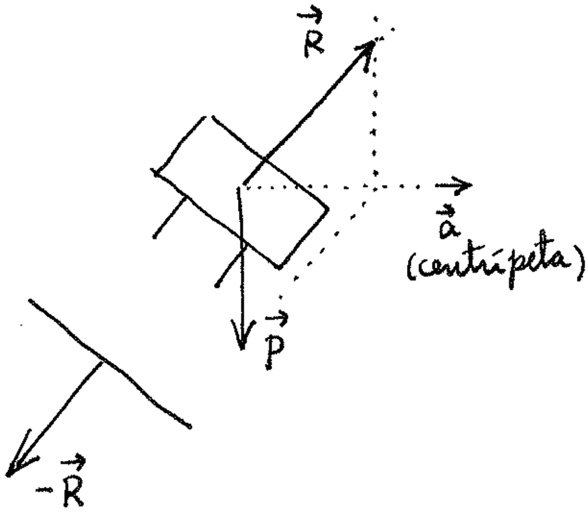
$\vec{a}$ é a aceleração (centrípeta)

(e)



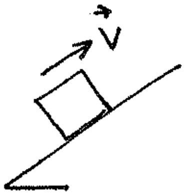
→

Sem atrito



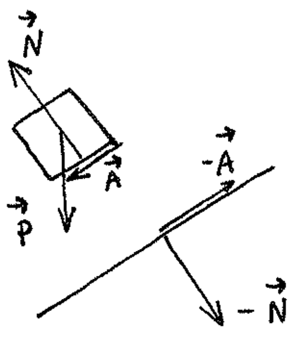
$\vec{R}$ = reação "líquida" do solo. Você pode fazer uma figura melhor?

(f)



→

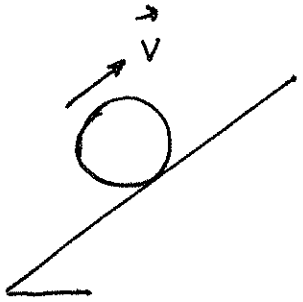
Com atrito

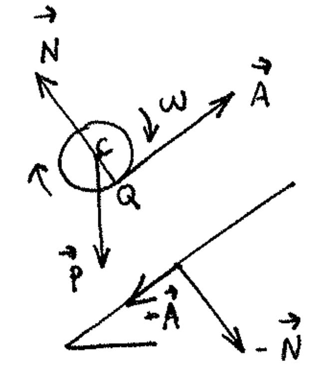


Esperamos um atrito cinético $\vec{A}$ como esboçado, oposto a $\vec{v}$.

1.6.3

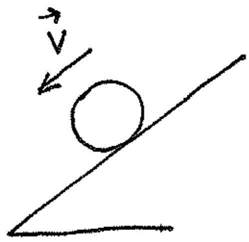
(g)

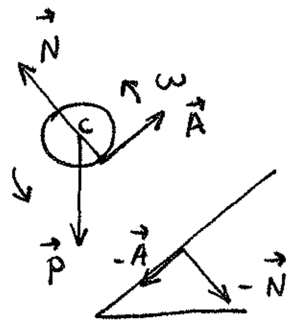




O ponto Q da roda tem sempre, quando em contato com o plano, velocidade nula. $\vec{A}$ é portanto um atrito estático, e deve produzir um torque que diminui ω.

(h)





O torque de $\vec{A}$ em relação a C deve agora aumentar ω.

1.7.1

Primeiramente, é preciso colocar com clareza que, <u>estritamente falando</u>, não existem leis de conservação em mecânica para uma única partícula. Algo sobre outras partículas ou "condições externas" deve sempre ser levado em conta, mesmo que na aparência estejamos falando de apenas uma partícula.

1) Conservação do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ de uma partícula.

Essa lei <u>exige</u> o <u>isolamento</u> da partícula ou uma distância <u>muito grande</u> de um eventual sistema externo de partículas. <u>Nesse caso</u> a força <u>resultante</u> $\vec{F}$ sobre a partícula se <u>anula</u>. Então, se

massa constante

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}},$$

$\vec{F} = \vec{0}$ implicará

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{\text{constante}} \quad (\text{vetor constante}).$$

Nesse caso, em coordenadas cartesianas, temos

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = \overrightarrow{\text{constante}} = (c_x, c_y, c_z)$ se

$p_x = c_x = \text{constante}$, $p_y = c_y = \text{constante}$, $p_z = c_z = \text{constante}$.

É muito raro o caso em que possamos dar um exemplo que se aproxime da condição acima. Uma nave espacial, longe de qualquer planeta e com motores desligados poderia, <u>aproximadamente</u>, represen tar um exemplo.

Um exemplo, um pouco mais próximo, poderia ser dado por duas <u>partículas</u> suficientemente isoladas de influências de arredores. Naturalmente, agora não se pode mais falar em uma partícula <u>única</u> (figura ao lado).

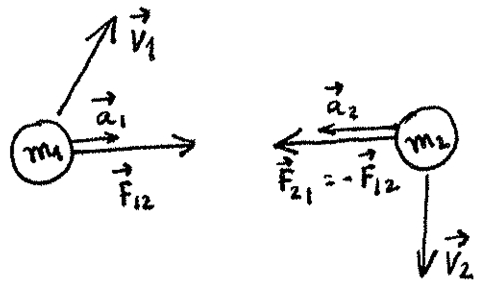


fig 1: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (terceira lei).
$\vec{a}_1 \neq -\vec{a}_2$ (massas distintas)

Uma aplicação aproximada para essa situação seria duas bolas de bilhar numa mesa de jogo, se consideramos as "forças normais" aplicadas pela mesa eliminadas pelos pesos das bolas, tomando o movimento como aproximadamente bidimensional no plano da mesa.

Na figura 1, $\vec{F}_{12}$ é a força sobre a partícula 1 (massa m_1) devida à sua "colisão" (interação) com a partícula 2. $\vec{F}_{21}$, pela mesma convenção, é a força sobre a partícula 2 devida à sua interação com a partícula 1. No caso de bolas de bilhar, $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ só aparecem caso haja <u>contato</u> entre 1 e 2, numa colisão. Porém, m_1 e m_2 poderiam ser as massas de um <u>planeta</u>

1.7.9

Acontece que como $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ temos $d\vec{V}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot d\vec{V}$, e

$$\vec{V}\cdot d\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)\cdot(dV_x, dV_y, dV_z)$$
$$= V_x\,dV_x + V_y\,dV_y + V_z\,dV_z \quad (9).$$

Voltando agora com (9) a (8) temos

$$\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\int_i^f d\vec{V}\cdot\vec{V} = m\int_i^f \vec{V}\cdot d\vec{V} = m\int_i^f V_x\,dV_x + V_y\,dV_y + V_z\,dV_z$$
$$= m\left[\int_i^f V_x\,dV_x + \int_i^f V_y\,dV_y + \int_i^f V_z\,dV_z\right]$$
$$= \frac{m}{2}\underbrace{\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)}_{V_x^2+V_y^2+V_z^2 = |\vec{V}|^2 = V^2 = \vec{V}^2}\Big|_i^f = \frac{m}{2}V_f^2 - \frac{m}{2}V_i^2 = T_f - T_i \quad (10).$$

Ocorre que (10) e (7) se equivalem:

$$\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = T_f - T_i = U_i - U_f \Rightarrow U_f + T_f = U_i + T_i = E = \underline{\text{const.}}$$

Note que $\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = T_f - T_i = \Delta T$ (trabalho da força resultante = variação da energia cinética) é uma relação geral, dependente apenas da 2ª lei de Newton, enquanto que $\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = U_i - U_f = -\Delta U = -(U_f - U_i)$ só é válida se a força for <u>conservativa</u>.

3) Conservação do momento angular. Por definição, o momento angular de uma partícula é

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} = \vec{r}\times(m\vec{V}).$$

d) Atrito. Nesse caso não é possível definir uma função energia potencial U. Então o atrito não é uma força conservativa.

Observe agora:

Apenas se a força é conservativa ($\vec{F} = -\vec{\nabla} U$) a energia $E = T + U$ se conserva.

Vamos agora provar. Se, como abaixo, tomamos uma trajetória de uma partícula, do ponto i (inicial) ao ponto f (final) e se $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, o trabalho de $\vec{F}$ de i a f, subdividindo-se a trajetória num número indefinidamente grande de deslocamentos $d\vec{r}$, é

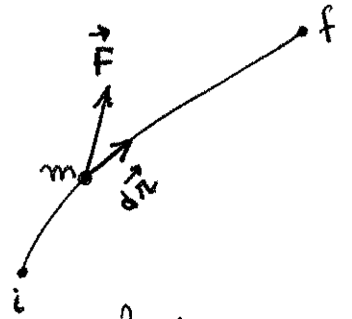


fig 6

$$W_{\vec{F}} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot \overbrace{(dx, dy, dz)}^{d\vec{r} \text{ em componentes}}$$

$$= \int_i^f -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -\int_i^f \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz}_{dU \text{ por cálculo}}$$

$$= -\int_i^f dU = -\left[U_f - U_i\right]$$

$$= U_i - U_f \quad (7)$$

Por outro lado, sendo $\vec{F}$ a única força sobre m,

$$\int_i^f \underbrace{\vec{F}}_{\text{2ª lei de newton}} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \overbrace{m \frac{d\vec{v}}{dt}}^{\vec{F}} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\, d\vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = m \int_i^f d\vec{v} \cdot \vec{v} \quad (8).$$

troco dt de lugar

Ocorre que em ⑥ aparece o vetor $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ que é equivalente a $\hat{r}$ por ①:

$$\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)(x, y, z) = \left(\frac{1}{r}\right)\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} .$$

Por isso reescrevemos ⑥ na forma

$$-\vec{\nabla} U = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = \frac{GMm}{r^2}(-\hat{r})$$

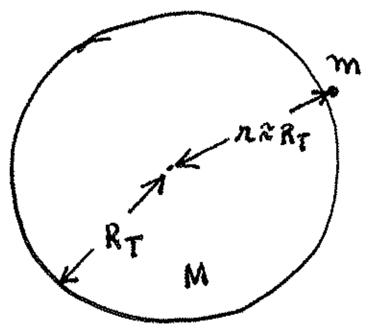
correspondendo perfeitamente à lei universal de gravitação, em que o vetor $-\hat{r}$ faz com que a força sobre m seja de atração a M. Note que a "reação" sobre M, $-\vec{F}$, é $\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, também de atração.

Como exemplo, note na figura ao lado que se M é a massa da Terra e que se m é muito próxima à superfície da Terra,

$$F = |\vec{F}| \cong \frac{GMm}{R_T^2} = m\left(\frac{GM}{R_T^2}\right).$$

↑ igualdade aproximada

fig 5



$M = 5.98 \times 10^{24}$ kg

$R_T = 6.37 \times 10^6$ m (raio da Terra)

Substituindo os valores dados, você pode mostrar que

$\frac{GM}{R_T^2} \simeq 9,8\ m/s^2 = g$, implicando que a força gravitacional (peso) sobre um corpo nas proximidades da Terra tem módulo $P = |\vec{F}| = mg$, como esperado.

1.7.6

e que $\left|\dfrac{\vec{r}}{r}\right| = \dfrac{|\vec{r}|}{r} = 1$, escrevemos simplesmente

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

Nesse caso, $\vec{F}$ = força gravitacional $= -\vec{\nabla} U$ se

$$U = -G\frac{Mm}{r}, \text{ com } G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

= constante gravitacional universal.

Prova:

$$-\vec{\nabla} U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= \left(GMm\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), GMm\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), GMm\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \quad (2)$$

Como $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ($\vec{r} = (x, y, z)$ = posição de m) temos

$$GMm\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = GMm\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= -GMm\,\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x)$$

$$= -GMm\Big[\underbrace{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}_{\frac{1}{r}}\Big]^3 x = -GMm\frac{x}{r^3} \quad (3)$$

e, da mesma forma,

$$GMm\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -GMm\frac{y}{r^3} \quad (4) \quad \text{e} \quad GMm\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -GMm\frac{z}{r^3} \quad (5).$$

Voltando com (3), (4) e (5) para (2) teremos

$$-\vec{\nabla} U = -GMm\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \quad (6).$$

1.7.5

Estamos tomando a origem como ponto no qual $\vec{F} = \vec{0}$.

Provamos agora a afirmação anterior:

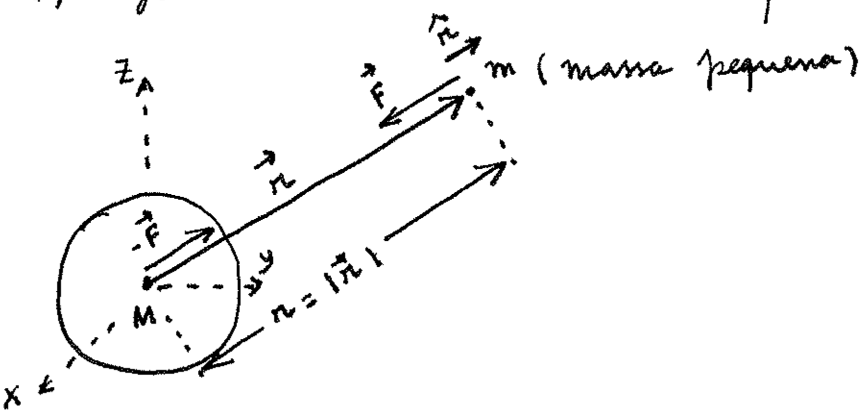
$$-\vec{\nabla} U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}Kx^2\right), -\frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}Kx^2\right), -\frac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{1}{2}Kx^2\right) \right)$$

$$= (-Kx, 0, 0)$$

$$= -Kx \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}} = -Kx\vec{i}.$$

Note que nesse caso, se os movimentos estão mesmo restritos à dimensão x, seria suficiente escrever $F = -\frac{dU}{dx} = -Kx$, estando implícito que a força está sobre o eixo x.

c) gravidade no sentido um pouco mais geral (figura 4)



M = grande massa, praticamente imóvel.

fig 4

Na figura ao lado $\hat{r}$ é um vetor unitário, isto é, tal que $|\hat{r}| = 1$, paralelo ao vetor posição $\vec{r}$ da massa m em relação ao centro da massa M.

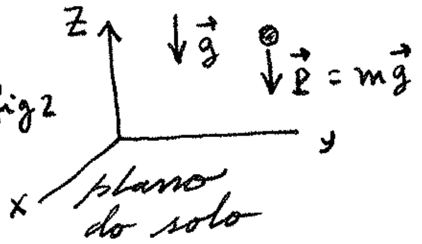
Como $\frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)\vec{r}$ tem direção e sentido de $\vec{r}$, já que $\frac{1}{r}$ é escalar, Primeiramente, vamos definir a energia potencial U de uma partícula (sob a ação de um agente externo) da seguinte forma:

> Se existe uma energia potencial U, a força do agente externo sobre a partícula é
> $$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Nota: a força tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ é chamada de <u>conservativa</u>.

Exemplos: a) gravidade nas proximidades do solo (figura 2)

fig 2



A força peso pode ser obtida por

$$\vec{F} = \vec{P} = -\vec{\nabla} U \quad \text{se} \quad \underline{U = mgz}.$$

Prova:

$$-\vec{\nabla} U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}(mgz), -\frac{\partial}{\partial y}(mgz), -\frac{\partial}{\partial z}(mgz)\right)$$

$$= (0, 0, -mg)$$

$$= m(0,0,-g) = m\vec{g} = \vec{P}.$$

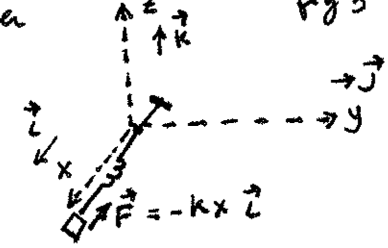
$$\vec{g} = (0,0,-g)$$

Então a força peso $\vec{P}$ é conservativa.

b) força elástica devida a uma mola (fig 3).

Nesse caso $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ se $U = \frac{1}{2} K x^2$.

fig 3



e um satélite, suficientemente afastados de outros corpos celestes. De fato, estamos exigindo o <u>isolamento</u> do sistema 1+2, o que faz com que $\vec{F}_{12}$ seja a <u>única</u> força sobre 1 e $\vec{F}_{21}$ a <u>única</u> força sobre 2. Essas são então forças <u>resultantes</u>, respectivamente, sobre 1 e 2, razão pela qual escrevemos

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} \quad (1)$$

e
$$\vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \frac{d\vec{P}_2}{dt} \quad (2).$$

Como, pela terceira lei de Newton ("ação - reação")

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

(2) é reescrita como

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{P}_2}{dt} \quad (3).$$

<u>Podemos</u> agora "somar" (1) e (3):

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} + (-\vec{F}_{12}) = \vec{0} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt}.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{momento linear total ou do sistema } 1+2 = \overrightarrow{\text{constante}}$$

sob quaisquer condições de movimento (leis específicas sobre $\vec{F}_{12}$ e condições iniciais).

2) Conservação da energia $E = T + U$, sendo T a energia cinética e U a potencial de uma partícula.

1.7.10

Temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F} \quad (1),$$

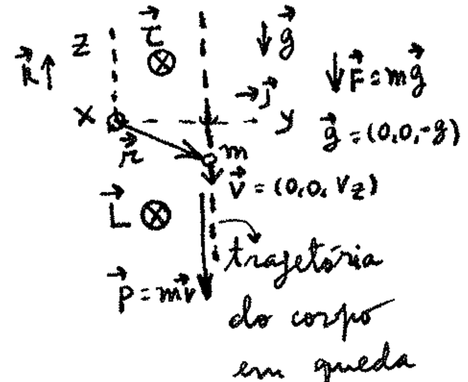
sendo $\vec{F}$ a força resultante. Ocorre que $\vec{v}\times(m\vec{v}) = m\vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}$, porque para qualquer vetor $\vec{A}$,

$$\vec{A}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k} = \vec{0}.$$

Então, voltando a (1), (nota: o livro usa $\vec{N}$ para torque)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau} = \text{torque da força resultante} \quad (2).$$

Apenas para aprender que (2) é só uma nova forma de reescrever a 2ª lei de Newton, vamos aplicá-la ao caso ao lado, da queda livre de um corpo restrita ao eixo Z.



$\vec{r} = (0, y, z)$

fig7: eixo x "para fora" do papel e $\vec{L}$ "para dentro".

Temos

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & mv_z \end{vmatrix} = y m v_z \vec{i}.$$

Como y é constante, $\frac{d\vec{L}}{dt} = y m \dot{v}_z \vec{i}$ (a)

$$= \frac{d}{dt}(y m v_z \vec{i})$$

Por outro lado, o torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix}}_{\vec{F} = m\vec{g} = m(0,0,-g) = (0,0,-mg)} = -myg \quad (b)$$

Equacionando (a) e (b) segundo (2) temos

$$-myg = ym\frac{dv_z}{dt} \Rightarrow m\frac{dv_z}{dt} = -mg \quad (2^{a} \text{ lei}),$$

ou simplesmente $\frac{dv_z}{dt} = -g$, de onde por integração $v_z = v_0 - gt$ e, por $v_z = \frac{dz}{dt}$, $z = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, como sabemos.

Examinemos agora a seguinte situação. Suponhamos que a força $\vec{F}$ seja <u>central</u> (figura ao lado). Um exemplo é a força gravitacional (figura 4). Nesse caso,

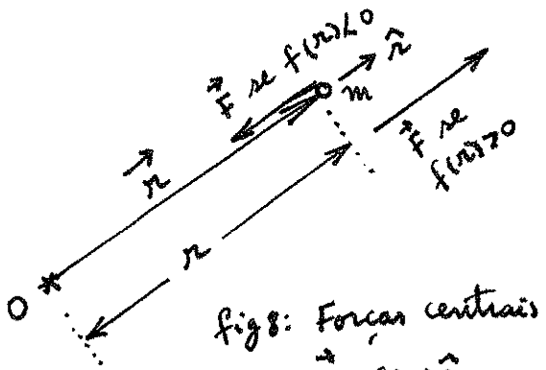


fig 8: Forças centrais
$\vec{F} = f(r)\hat{r}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{f(r)}{r}\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{\vec{r} \times \vec{r} = 0.} = \vec{0} \quad (3)$$

Então, voltando com (3) em (2) temos $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}.$

1.7.12

Como aplicação, consideremos, como ao lado, o movimento de um satélite ao redor de um planeta, ou o de um planeta ao redor do Sol. A massa maior, M, é considerada aproximadamente fixa. Sabendo-se (por uma das leis de Kepler) que a trajetória é <u>elíptica</u> e portanto contida num <u>plano</u>, o momento angular $\vec{L}$, sendo fixo, termina por implicar

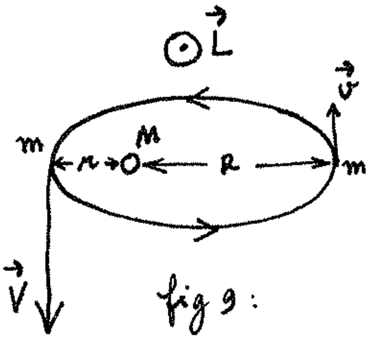


fig 9: $V = |\vec{V}|$, $v = |\vec{v}|$

$$mVr = mvR \Rightarrow Vr = vR,$$

significando que $V > v$. Por que, na figura 9, $\vec{L}$ tem a direção e o sentido indicados?

Notas: 1) Assim como o trabalho de uma força $\vec{F}$ é $W_F = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}$, o <u>impulso</u> de $\vec{F}$ é definido por

$$\vec{I}_F = \int_i^f \vec{F}\,dt \quad \text{(integração temporal de } \vec{F}\text{)}.$$

Se $\vec{F}$ é a força resultante temos

$$\vec{I}_F = \int_i^f \vec{F}\,dt = \int_i^f \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \int_i^f d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p},$$

ou seja, o impulso da força resultante é a variação do momento da partícula. Se a partícula estiver isolada no espaço, $\vec{F} = \vec{0}$ e, portanto $\vec{I}_F = \vec{0} = \Delta\vec{p}$, o que implica $\vec{p}$ constante.

2) É interessante estender a relação $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ para o movimento de um projétil no espaço sob ação da gravidade, retomando o contexto da figura 7, ao lado (fig 10), permitindo-se agora o movimento de m no plano. Acompanhando a figura, temos $\vec{r} = (0, y, z) = y\vec{j} + z\vec{k}$

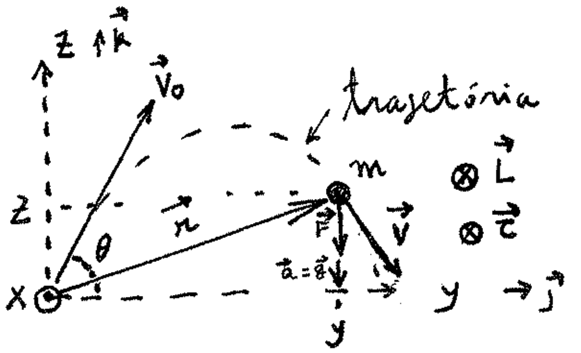


fig 10: lançamento de um projétil a uma velocidade $\vec{V}_0$, da origem. $\vec{F} = (0, 0, -mg) = m\vec{g}$
$V_x = 0$ (movimento no plano yz)

e, portanto, $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(0, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$
$= V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$. Temos

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = -mgy\,\vec{i} \quad (1)$$

e

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & mV_y & mV_z \end{vmatrix} = (m y V_z - m z V_y)\,\vec{i} \quad (2)$$

Se tomamos y e z como variáveis no tempo, como devemos, e se consideramos V_z e V_y também como variáveis, teremos

1.7.14

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \Big(m \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} v_z + m y \frac{dv_z}{dt} - m \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} v_y - m z \frac{dv_y}{dt}\Big)\vec{i}$$

$$= \Big(m y \frac{dv_z}{dt} - m z \frac{dv_y}{dt}\Big)\vec{i} \quad ③ .$$

Equacionando ① e ③ segundo $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ temos

$$-mgy\,\vec{i} = \Big(my\frac{dv_z}{dt} - mz\frac{dv_y}{dt}\Big)\vec{i} \Rightarrow gy = y\frac{dv_z}{dt} - z\frac{dv_y}{dt} \quad ④$$

Observe que, aparentemente, a equação ④ é <u>insuficiente</u> para a análise do movimento. A equação de Newton $\vec{F} = m\vec{a} = \left(m\frac{dv_x}{dt}, m\frac{dv_y}{dt}, m\frac{dv_z}{dt}\right) = \left(0, m\frac{dv_y}{dt}, m\frac{dv_z}{dt}\right)$ nos dá uma expressão completa do movimento, porque com $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ temos

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0 = 0 \quad ⑤ \text{ (compatível com } v_x = 0 \text{, como imposto)},$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = 0 \Rightarrow v_y = \text{constante} = v_0\cos\theta \quad ⑥ ,$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -g \Rightarrow v_z = v_0\,\text{sen}\,\theta - gt \quad ⑦ .$$

Observe que ⑥ torna ④ equivalente a ⑦. Como exercício, mostre que ⑥ e ⑦ implicam $v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\cos\theta \Rightarrow y = \int_0^t v_0\cos\theta\, dt$ $\Rightarrow y = (v_0\cos\theta)t$, $\frac{dz}{dt} = v_0\,\text{sen}\,\theta - gt \Rightarrow z = v_0\,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$ e, por eliminação de t, $z = \text{tg}\,\theta\, y - \frac{1}{2}g\frac{y^2}{v_0^2\cos^2\theta}$, nos dando uma trajetória parabólica. Que resultados teríamos de $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ se fosse levantada a restrição inicial para $\vec{r}$ no plano?

1.8.1

Para abordar um sistema de n partículas nós vamos primeiramente fixar algumas notações, em conformidade com o livro (capítulo 9).

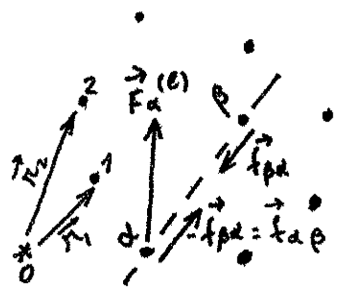


fig 1

A figura 1, ao lado, com $n=9$ (9 partículas), esquematiza um caso de sistema de partículas. Usamos as letras gregas minúsculas α, β, δ, etc para representar o índice de contagem de partículas.

Por exemplo, dada a origem O, a soma vetorial das posições das 9 partículas é o vetor

$$\sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n=9} \vec{r}_\alpha = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots + \vec{r}_8 + \vec{r}_9 .$$

Foram destacadas na figura 1 duas partículas, α e β.

$\vec{f}_{\alpha\beta}$ = força sobre a partícula α devida à interação com a partícula β.

A terceira lei de Newton exige

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha} \quad (1).$$

Uma imposição adicional vai ser feita: $\vec{f}_{\alpha\beta}$ age na direção da linha que une α e β (figura ao lado).

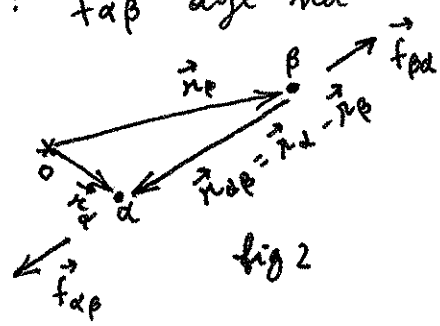


fig 2

1.8.2

Na figura 2, $\vec{f}_{\alpha\beta}$, reinterpretando o que foi dito acima, é um vetor <u>paralelo</u> a $\vec{r}_{\alpha\beta}$. Ora, dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são <u>paralelos</u> se $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ (figura ao lado). Então, se $\vec{f}_{\alpha\beta}$ age na direção que une α e β teremos

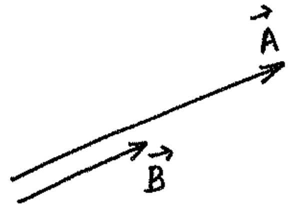


fig 3

$$\vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{0} \quad (2).$$

Com essas observações iniciais, podemos começar.

1) Momento linear do sistema e sua conservação.

$$\vec{P} = \sum_\alpha \vec{P}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \text{momento total}$$
$$= \text{soma dos momentos.}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \quad (3)$$

Temos $m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = m_\alpha \dfrac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha$ = força resultante em α.

Ocorre que $\vec{F}_\alpha = \underbrace{\vec{F}_\alpha^{(e)}}_{} + \underbrace{\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}}_{} \quad (4).$

força em α devida a corpos <u>externos</u> ao sistema

força em α devida a β (a todos os β diferentes da própria partícula α.

Colocando (4) em (3) temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha$$

$$= \sum_\alpha \left(\vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{(e)}}_{\substack{\text{soma das}\\ \text{forças \underline{externas}}\\ \text{sobre o sistema}\\ =\vec{F}^{(e)}}} + \underbrace{\sum_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)}_{\substack{\text{soma das forças internas}\\ \text{ao sistema.}}} \quad ⑤$$

Para investigar a soma das forças internas, façamos um exemplo explícito: consideremos um sistema com 4 partículas ($n=4$). Nesse caso

$$\sum_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^{n=4} \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{\beta\neq 1} \vec{f}_{1\beta}}_{\text{soma 1}} + \underbrace{\sum_{\beta\neq 2} \vec{f}_{2\beta}}_{\text{soma 2}} + \underbrace{\sum_{\beta\neq 3} \vec{f}_{3\beta}}_{\text{soma 3}} + \underbrace{\sum_{\beta\neq 4} \vec{f}_{4\beta}}_{\text{soma 4}}$$

$$\begin{aligned}
= &\left(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{14}\right) && \text{(soma 1)}\\
+ &\left(\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{24}\right) && \text{(soma 2)}\\
+ &\left(\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{f}_{34}\right) && \text{(soma 3)}\\
+ &\left(\vec{f}_{41} + \vec{f}_{42} + \vec{f}_{43}\right) && \text{(soma 4)}
\end{aligned}$$

"leis de ação e reação" $\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$

$$\begin{aligned}
= &\left(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{14}\right)\\
+ &\left(-\vec{f}_{12} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{24}\right)\\
+ &\left(-\vec{f}_{13} - \vec{f}_{23} + \vec{f}_{34}\right)\\
+ &\left(-\vec{f}_{14} - \vec{f}_{42} - \vec{f}_{34}\right) = \vec{0} \quad ⑥
\end{aligned}$$

Isso significa que a soma das forças internas é nula!

Então colocando ⑥ em ⑤ temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)} \qquad (7)$$

taxa de variação do momento total = soma das forças externas sobre o sistema (força externa total)

Note que o livro oferece uma alternativa para a expressão da soma de forças internas que torna a apresentação da questão mais compacta:

$$\sum_{\alpha} \Big(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \Big) = \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} \big(\vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{f}_{\beta\alpha} \big) .$$

notação que apenas representa de outra forma a mesma soma: soma para <u>todos</u> os α <u>e</u> β (diferentes de α)

notação que representa a soma para <u>todos</u> os α e β sujeitos à condição $\beta > \alpha$.

Prove que a linha acima alcança o resultado correto explicitamente, tomando o exemplo de nosso sistema de $n=4$ partículas.

Voltemos agora para a expressão ③, inserindo nela o resultado ⑦. Temos

1.8.5

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha\right) \quad (8).$$

Se definimos $\vec{R}$ = posição do centro de massas por

$$\vec{R} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} \quad (9),$$

sendo $M = \sum_\alpha m_\alpha$ = massa total do sistema, podemos escrever

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = M\vec{R} \quad (10).$$

Inserindo (10) em (8) temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = \frac{d^2}{dt^2}(M\vec{R}) = M\ddot{\vec{R}} \quad (11).$$

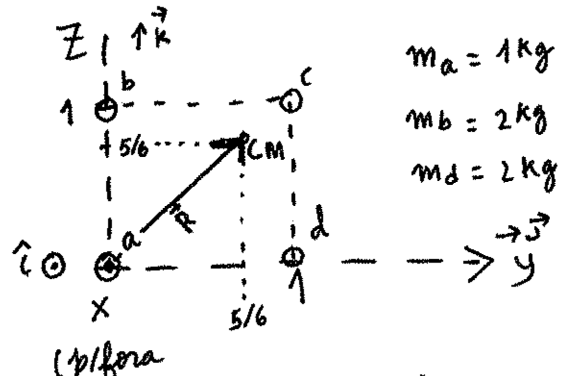
A relação (11) expressa duas coisas importantes:

a) Se é nula a força externa total (sistema isolado ou "externamente equilibrado") o momento total $\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$ é constante e $\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{V}_{CM}$ = velocidade do centro de massas = constante.

b) A força externa total é igual à massa total "vezes" a aceleração do centro de massas $\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}}_{CM} = \vec{a}_{CM}$

1.8.6

Nota: exemplo para $\vec{R}$ (figura abaixo)



$m_a = 1\,kg \quad m_c = 8\,kg$

$m_b = 2\,kg \quad$ CM: centro de massas.

$m_d = 2\,kg$

$\vec{r}_a = \vec{0} = (0,0,0)$

$\vec{r}_b = 1\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{r}_c = 1\vec{j} + 1\vec{k} = (0,1,1)$

$\vec{r}_d = 1\vec{j} = (0,1,0)$.

fig 4

no exemplo da figura 4 $\vec{R} = \dfrac{m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b + m_c\vec{r}_c + m_d\vec{r}_d}{m_a + m_b + m_c + m_d}$:

$$\vec{R} = \frac{1\,(0,0,0) + 2\,(0,0,1) + 8\,(0,1,1) + 2\,(0,1,0)}{1+2+8+2}$$

$$= \frac{(0,10,10)}{12} = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

2) Energia do sistema e sua conservação.

a) T = energia cinética

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \underbrace{(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2}_{} \qquad (12)$$

$$\vec{V}_\alpha^{\,2} = \vec{V}_\alpha \cdot \vec{V}_\alpha = V_\alpha^2 = |\vec{V}_\alpha|^2$$

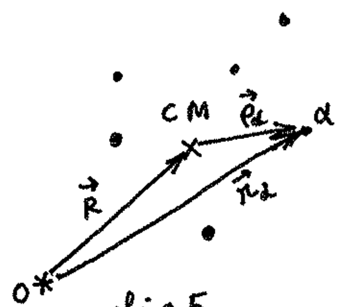


fig 5

Na figura 5, uma partícula α é tomada num sistema de partículas. $\vec{R}$ é a posição do centro de massas e $\vec{\rho}_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{R}$ é a

1.8.7

posição de α em relação ao centro de massas. Então

$$\vec{r}_\alpha = \vec{\rho}_\alpha + \vec{R} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{\rho}}_\alpha + \dot{\vec{R}}$$

e

$$(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2 = (\dot{\vec{r}}_\alpha)\cdot(\dot{\vec{r}}_\alpha) = (\dot{\vec{\rho}}_\alpha + \dot{\vec{R}})\cdot(\dot{\vec{\rho}}_\alpha + \dot{\vec{R}})$$

$$= \underbrace{(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)}_{(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)^2} + \underbrace{(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}\cdot(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)}_{\text{como } \dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{\rho}}_\alpha = \dot{\vec{\rho}}_\alpha\cdot\dot{\vec{R}}\ (\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}),\ \text{isso fica } 2(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot\dot{\vec{R}}} + \underbrace{(\dot{\vec{R}})\cdot(\dot{\vec{R}})}_{(\dot{\vec{R}})^2}.$$

Então

$$(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2 = (\dot{\vec{\rho}}_\alpha)^2 + 2(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot\dot{\vec{R}} + (\dot{\vec{R}})^2 \quad (13).$$

Colocando (13) em (12) temos

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{\rho}}_\alpha)^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha 2(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot\dot{\vec{R}} + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{R}})^2 \quad (14)$$

Agora,

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{\rho}}_\alpha)^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (v'_\alpha)^2 \quad (15)$$ com $\vec{v}'_\alpha = \dot{\vec{\rho}}_\alpha$ = velocidade de α em relação ao centro de massa. Então o primeiro no lado direito de (14) é a energia cinética "interna", em relação ao centro de massas.

Temos

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha 2(\dot{\vec{\rho}}_\alpha)\cdot\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}\cdot\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha\right).$$

Ocorre que

$$\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_\alpha - \vec{R})\right)$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \vec{R}$$

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}_{M\vec{R} \text{ por } 9} - \frac{d\vec{R}}{dt}\underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha\right)}_{M}$$

$$= M\dot{\vec{R}} - M\dot{\vec{R}} = \vec{0}.$$

Então

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha 2 (\dot{\vec{\rho}}_\alpha) \cdot \dot{\vec{R}} = 0 \quad (16).$$

Finalmente

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{R}})^2 = (\dot{\vec{R}})^2 \underbrace{\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}}_{\frac{M}{2}} = \frac{M}{2} V^2 \quad (17), \text{ sendo}$$

$V = |\vec{V}| = |\dot{\vec{R}}|$ = velocidade do centro de massa em módulo.

Voltando com (15), (16) e (17) em (14) temos

$$T = \text{energia cinética do sistema} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\vec{r}}_\alpha)^2$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (v'_\alpha)^2 + \frac{MV^2}{2}$$ = "energia cinética interna" + energia cinética atribuída ao centro de massa. (18).

1.8.9

Quanto à possibilidade de conservação da energia do sistema, a questão se coloca de forma um tanto complicada. O resultado é o seguinte: se

$$E = T + U = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2 + \sum_{\alpha} U_\alpha + \sum_{\alpha<\beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \quad (19)$$

é a energia, sendo U a potencial, composta pelas energias potenciais $U_\alpha(\vec{r}_\alpha)$, devidas às interações de cada partícula com o meio externo e $\bar{U}_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)$, devidas às interações <u>internas</u>, supostamente de <u>pares</u> de partículas, E <u>se conserva</u> se todas as forças forem <u>conservativas</u>, isto é, se

$$F_\alpha^{(e)} = -\vec{\nabla}_\alpha U_\alpha = -\underbrace{\frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha}}_{\text{apenas notação, e não divisão por vetor}} \quad (20) \text{ (gradiente em relação às coordenadas de } \alpha\text{)}$$

e

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha \bar{U}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}{\partial \vec{r}_\alpha} \quad (21).$$

Provemos, dadas as hipóteses. Temos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (22).$$

Primeiramente

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\vec{r}}_\alpha)^2 = \sum_{\alpha} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha \quad (23)$$

Agora,

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{dU_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha<\beta} \frac{d\bar{U}_{\alpha\beta}}{dt} \quad (24)$$

Acontece que

$$\sum_\alpha \frac{dU_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \frac{(\vec{\nabla}_\alpha U_\alpha)\cdot d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \frac{-\vec{F}_\alpha^{(e)}\cdot d\vec{r}_\alpha}{dt}$$

$$= \sum_\alpha -\vec{F}_\alpha^{(e)}\cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \quad (25),$$

pois

$$dU_\alpha = dU_\alpha(\vec{r}_\alpha) = \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha} dz_\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha} \right)\cdot (dx_\alpha, dy_\alpha, dz_\alpha)$$

$$= (\vec{\nabla}_\alpha U_\alpha)\cdot d\vec{r}_\alpha = -\vec{F}_\alpha^{(e)}\cdot d\vec{r}_\alpha$$

(nota: o livro usa a convenção $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Com ela escreve-se

$$dU_\alpha(\vec{r}_\alpha) = \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_{1\alpha}} dx_{1\alpha} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_{2\alpha}} dx_{2\alpha} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_{3\alpha}} dx_{3\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_{i\alpha}} dx_{i\alpha}$$)

Agora,

$$\sum_{\alpha<\beta} \frac{d\bar{U}_{\alpha\beta}}{dt} = \sum_{\alpha<\beta} \frac{\overbrace{(\vec{\nabla}_\alpha \bar{U}_{\alpha\beta})\cdot d\vec{r}_\alpha + (\vec{\nabla}_\beta \bar{U}_{\alpha\beta})\cdot d\vec{r}_\beta}^{\bar{U}_{\alpha\beta} = \bar{U}_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)}}{dt}$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} -\vec{f}_{\alpha\beta}\cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} - \vec{f}_{\beta\alpha}\cdot \frac{d\vec{r}_\beta}{dt}.$$

Supondo a 3ª lei, temos $\vec{f}_{\beta\alpha} = -\vec{f}_{\alpha\beta}$, com o que

$$\sum_{\alpha<\beta} \frac{d\bar{U}_{\alpha\beta}}{dt} = \sum_{\alpha<\beta} -\vec{f}_{\alpha\beta}\cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} + \vec{f}_{\alpha\beta}\cdot \frac{d\vec{r}_\beta}{dt} \quad (26)$$

Ocorre que não é difícil mostrar que (26) equivale a

$$\sum_{\alpha<\beta} \frac{d\bar{U}_{\alpha\beta}}{dt} = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} -\vec{f}_{\alpha\beta}\cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \quad (27).$$

1.8.11

Para ver isso claramente, basta considerarmos um sistema de três partículas. Temos

$$\sum_{\alpha<\beta} -\vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha + \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\beta$$

$$\left.\begin{aligned} = & -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 \\ & -\vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_3 \\ & -\vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_3 \end{aligned}\right\} \text{fatores obedecendo } \beta > \alpha$$

enquanto

$$\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} -\vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} = & -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_1 \\ & +\left(-\vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_2\right) \\ & +\left(-\vec{f}_{31} \cdot d\vec{r}_3 - \vec{f}_{32} \cdot d\vec{r}_3\right) \end{aligned}\right\} \text{reagrupamento}$$

$$\begin{aligned} = & -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \\ & -\vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{f}_{31} \cdot d\vec{r}_3 \\ & -\vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_2 - \vec{f}_{32} \cdot d\vec{r}_3 \end{aligned}$$

$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$ (3.ª lei) nessa coluna

$$\begin{aligned} = & -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 \\ & -\vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{13} \cdot d\vec{r}_3 \\ & -\vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{23} \cdot d\vec{r}_3 \quad , \end{aligned}$$

o que mostra a equivalência. Voltando agora com (27) e (25) em (24) temos

$$\frac{dU}{dt} = \sum_\alpha \left(-\vec{F}_\alpha^{(e)} \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}\right) + \sum_\alpha \left(\sum_{\beta\neq\alpha} -\vec{f}_{\alpha\beta} \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}\right)$$

$$= \sum_\alpha \left(-\vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta\neq\alpha} -\vec{f}_{\alpha\beta}\right) \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha -\vec{F}_\alpha \cdot \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \qquad (28)$$

Colocando agora (28) e (23) em (22) temos finalmente

$$\frac{dE}{dt} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha + \sum_\alpha -\vec{F}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha = 0 ,$$

ou seja, E é constante.

3) Momento angular e sua conservação no sistema.

Temos

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{V}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times (m_\alpha \vec{V}_\alpha) = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{P}_\alpha .$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \quad (29).$$

Ocorre que pela figura 5 $\vec{r}_\alpha = \vec{\rho}_\alpha + \vec{R}$. Então

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\rho}_\alpha + \vec{R}) \times (\dot{\vec{\rho}}_\alpha + \dot{\vec{R}})$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \dot{\vec{\rho}}_\alpha + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \dot{\vec{R}}}_{=\underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha\right)}_{\substack{M\vec{R} - M\vec{R} = \vec{0} \\ \text{por } (9) \\ \text{(ver dedução} \\ \text{da relação } (16))}} \times \dot{\vec{R}}} + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{\rho}}_\alpha}_{\vec{R} \times \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha\right)}_{\vec{0} \text{ como antes}}} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{R}} .$$

Temos então

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \dot{\vec{\rho}}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \dot{\vec{\rho}}_\alpha + \left(\sum_\alpha m_\alpha\right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \times \dot{\vec{\rho}}_\alpha}_{\substack{\text{momento angular} \\ \text{em relação ao CM ("interno")}}} + \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{momento angular do CM.}} \quad (30)$$

1.8.13

Agora, partindo de 29 temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \times \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}}_{=\vec{0}\ (\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0})} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2}$$

$$= \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \underbrace{m\frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2}}_{\vec{F}_\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha$$

Como

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \quad (4),$$

temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \left(\vec{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}}_{\text{torque total externo } \vec{N}^{(e)}} + \underbrace{\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_{\alpha\beta}}_{\text{torque } \vec{N}_{int} \text{ das forças internas}} \quad (31)$$

Ocorre que o seguinte truque é possível:

$$\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_{\alpha\beta} = \sum_\beta \sum_{\alpha\neq\beta} \vec{r}_\beta \times \vec{f}_{\beta\alpha},$$

pois tanto faz para a soma para α e β que comecemos por α ou β. Então

$$\vec{N}_{int} = \frac{1}{2}\left[\sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \sum_\beta \sum_{\alpha\neq\beta} \vec{r}_\beta \times \vec{f}_{\beta\alpha}\right].$$

1.8.14

Na segunda soma do resultado anterior, não importa se a primeira somatória é sobre β ou α, contanto que eliminemos sempre o caso $\alpha=\beta$. Então

$$\vec{N}_{int} = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\beta \times \vec{f}_{\beta\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{f}_{\beta\alpha} .$$

Como, pela terceira lei, $\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$, o resultado acima fica

$$\vec{N}_{int} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{f}_{\beta\alpha} \quad (32)$$

Colocando (2) em (32) temos $\vec{N}_{int} = \vec{0}$ (33).

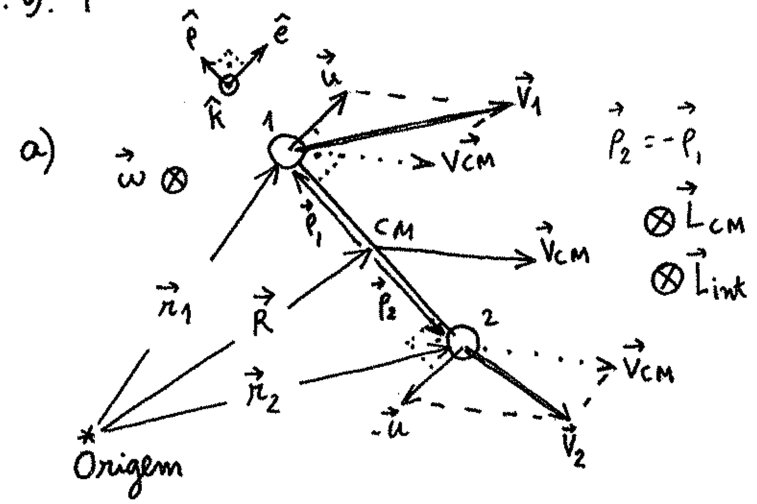
Com isso então (31) fica

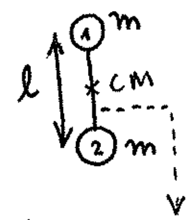
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} = \text{torque total externo},$$

e se $\vec{N}^{(e)} = \vec{0}$ teremos $\vec{L}$ constante.

1.9.1

a)





haste de massa desprezível.

fig 1: halteres e seu movimento:
$\hat{k} \times \hat{\rho} = -\hat{e}$, $\vec{\rho}_1 = \rho_1 \hat{\rho}$,
$\vec{u} = u\,\hat{e}$, $\vec{\omega} = -\omega \hat{k}$

Ao lado temos uma figura explicativa da situação. As velocidades dos corpos 1 e 2 (massas do halteres) são $\vec{V}_1 = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt}$ e $\vec{V}_2 = \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$.

$\vec{V}_{CM} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$. Como

$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}_1$ temos

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{V}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{\rho}_1) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_1}{dt}$$
$$= \vec{V}_{CM} + \vec{u} \quad (\dot{\vec{r}}_1),$$

levando em conta que $\dfrac{d\vec{\rho}_1}{dt} = \vec{u}$ = velocidade de 1 em relação ao centro de massas, localizado no ponto médio do halteres. Se estamos restringindo o movimento do halteres a um <u>plano</u>, é mais fácil ver que

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{V}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{\rho}_2)$$
$$= \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\rho}_2) = \vec{V}_{CM} + \frac{d}{dt}(-\vec{\rho}_1)$$
$$= \vec{V}_{CM} + (-\vec{u}) \quad (\dot{\vec{r}}_2).$$

O movimento de rotação do halteres é o movi mento de 1 e 2 em relação ao CM. Pela restrição que estamos fazendo, essa rotação tem velocidade angular $\vec{\omega}$, como indicado, perpendicular à linha que une as massas 1 e 2. Note pela figura abaixo que essa restrição colocada na questão não é de forma alguma uma necessidade natural.

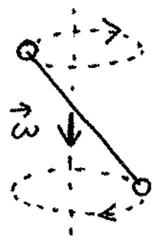


fig 2: outra configuração de rotação do halteres, fora do exigido na questão.

Agora, dadas as restrições e o resultado da questão 4 dessa lista, considerando $|\hat{\rho}|=|\hat{e}|=|\hat{k}|=1$,

$$\vec{u}_1 = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_1$$

$$= (-\omega\hat{k})\times(\underbrace{\rho_1}_{\rho_1 = |\vec{\rho}_1| = \frac{\ell}{2}}\hat{\rho}) = -\omega\frac{\ell}{2}\underbrace{\hat{k}\times\hat{\rho}}_{-\hat{e}} = \omega\frac{\ell}{2}\hat{e} \quad (1)$$

De forma semelhante, a velocidade $-\vec{u}$, de 2, em relação ao centro de massas, é

$$-\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_2 = (-\omega\hat{k})\times\underbrace{(-\rho_1\hat{\rho})}_{\vec{\rho}_2=-\vec{\rho}_1} = -\frac{\omega\ell}{2}\hat{e} \quad (2)$$

Chamaremos de $\vec{L}_{int}$ o momento angular "interno", isto é, o momento angular do sistema em relação ao centro de massas. Temos, se $\vec{L}$ = momento angular total,

$$\vec{L} = \vec{r}_1\times\vec{p}_1 + \vec{r}_2\times\vec{p}_2$$

1.9.3

ou

$$\vec{L} = (\vec{R}+\vec{\rho}_1)\times\underbrace{\left(m\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right)}_{\vec{p}_1 = m\vec{v}_1} + (\vec{R}+\vec{\rho}_2)\times\left(m\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)$$

$$= m(\vec{R}+\vec{\rho}_1)\times\underbrace{(\vec{v}_{CM}+\vec{u})}_{\text{por } (\dot{\vec{r}}_1)} + m(\vec{R}+\underbrace{\vec{\rho}_2}_{\vec{\rho}_2=-\vec{\rho}_1})\times\underbrace{(\vec{v}_{CM}-\vec{u})}_{\text{por } (\vec{r}_2)} \quad ;$$

$$\vec{L} = m\left[\left(\vec{R}\times\vec{v}_{CM} + \vec{R}\times\vec{u} + \vec{\rho}_1\times\vec{v}_{CM} + \vec{\rho}_1\times\vec{u}\right) + \left(\vec{R}\times\vec{v}_{CM} - \vec{R}\times\vec{u} - \vec{\rho}_1\times\vec{v}_{CM} + \vec{\rho}_1\times\vec{u}\right)\right]$$

$$= \vec{R}\times(\underbrace{2m}_{2m=M=\text{massa total}}\vec{v}_{CM}) + 2m\,\vec{\rho}_1\times\vec{u} \quad = \vec{R}\times\underbrace{\vec{P}_{CM}}_{\substack{\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} \\ = \text{momento do CM}}} + 2m\,\vec{\rho}_1\times\vec{u}$$

$$= \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\substack{\vec{R}\times\vec{P}_{CM} \\ = \text{momento} \\ \text{angular} \\ \text{do CM}}} + \underbrace{\vec{L}_{int}}_{\substack{2m\vec{\rho}_1\times\vec{u} \\ = \text{momento} \\ \text{angular} \\ \text{“interno”}}} \quad (3).$$

O momento angular $\vec{L}_{int}$ então, em virtude de (1) e (3) fica

$$\vec{L}_{int} = 2m\,\vec{\rho}_1\times\vec{u} = 2m\underbrace{\rho_1}_{\rho_1=\frac{\ell}{2}}\hat{\rho}\times\left(\frac{\omega\ell}{2}\hat{e}\right) = 2m\frac{\ell}{2}\omega\frac{\ell}{2}\underbrace{\hat{\rho}\times\hat{e}}_{-\hat{k}}$$

$$= \frac{m\ell^2}{2}(-\omega\hat{k})$$

$$= \frac{m\ell^2}{2}\vec{\omega} = I\vec{\omega},$$

se definimos $I = m\ell^2/2$ = <u>momento</u> <u>de</u> <u>inércia</u> do halteres.

1.9.4

A relação $\vec{L}_{int} = I\vec{\omega}$ ④ mostra que $\vec{L}_{int}$ tem a direção e o sentido dados na figura 1.

b) Vamos agora mostrar que se, como sugere a figura ao lado, o halteres é lançado em rotação, como indicado,

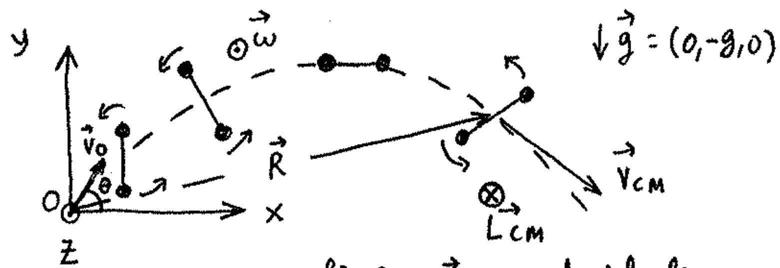


fig 2 : $\vec{v}_0$ = velocidade inicial do CM

com velocidade angular $\vec{\omega}$, o centro de massas vai se movimentar numa trajetória parabólica, com $\vec{v}_{CM}$ tangente a essa trajetória, enquanto a rotação $\vec{\omega}$ do halteres permanece fixa.

Usamos o que foi discutido na questão 8. Temos

$$\underbrace{M\ddot{\vec{R}}}_{} = \vec{F}^{(e)} = \underbrace{\vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)}}_{}$$

massa x aceleração do Centro de massas (M = 2m = massa total)

soma das forças externas

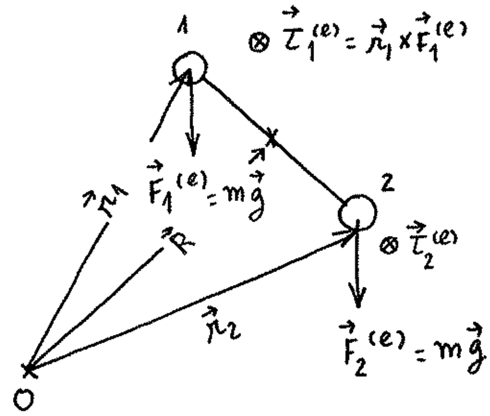


fig 3 (forças internas não desenhadas)

Com o auxílio da figura 3, temos

$$M\ddot{\vec{R}} = m\vec{g} + m\vec{g} \Rightarrow 2m\ddot{\vec{R}} = 2m\vec{g} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{g} \quad ⑤.$$

Se $\vec{R} = (x, y, 0)$, ⑤ fica $(\ddot{x}, \ddot{y}, 0) = (0, -g, 0)$,

1.9.5

o que nos dá

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{constante} = \underbrace{V_0 \cos\theta}_{\substack{\text{componente } x \\ \text{da velocidade} \\ \text{inicial do CM}}} \Rightarrow x = (V_0 \cos\theta)t \quad (6),$$

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = \underbrace{V_0 \operatorname{sen}\theta}_{\substack{\text{componente } y \\ \text{da velocidade} \\ \text{do CM em } t=0.}} - gt \Rightarrow y = (V_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{g}{2}t^2 \quad (7)$$

De (6) escrevemos $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta}$. Colocando isso em (7) teremos

$$y = V_0 \operatorname{sen}\theta \frac{x}{V_0 \cos\theta} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta} = \operatorname{tg}\theta\, x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \quad (8),$$

que é a equação da parábola para a trajetória do CM. Note que $y = 0$ (halteres no solo), é possível com

$$\operatorname{tg}\theta\, x - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = D = \dfrac{2V_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$$

D é o <u>alcance</u> (figura ao lado), máximo para um dado V_0 se $\theta = 45°$

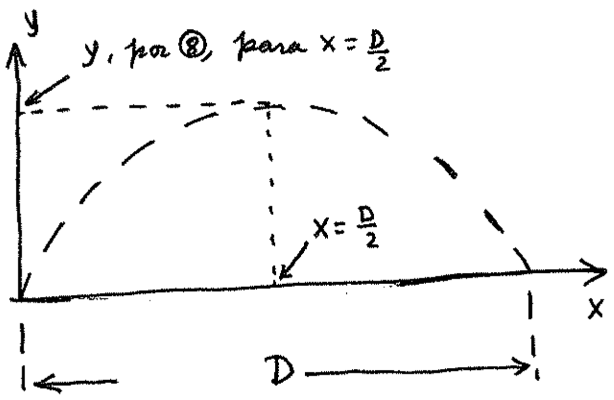


fig 4 : trajetória do CM.

1.9.6

Para o momento angular do sistema, levando em conta a questão 8 e a figura 3, temos

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{CM} + \vec{L}_{int}\right)}_{\text{taxa de variação do momento angular total}} = \underbrace{\vec{\tau}_1^{(e)} + \vec{\tau}_2^{(e)}}_{\text{Torque externo total, soma dos torques externos sobre 1 e 2}} \quad (9)$$

Como

$$\vec{L}_{CM} = \vec{R} \times (\underbrace{M}_{M=2m}\vec{V}_{CM}) = 2m\,\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = 2m\,\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \quad (10),$$

$$\vec{\tau}_1^{(e)} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{(e)} = \vec{r}_1 \times m\vec{g} \quad (11) \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_2^{(e)} = \vec{r}_2 \times m\vec{g} \quad (12),$$

(10), (11) e (12) em (9) nos dá

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{int}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2m\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) + \dot{\vec{L}}_{int} = \underbrace{2m\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}}_{=\vec{0}} + 2m\,\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{L}}_{int}$$

$$= \vec{r}_1 \times m\vec{g} + \vec{r}_2 \times m\vec{g} = \underbrace{(m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2)}_{=M\vec{R}=2m\vec{R},\ \text{em virtude de } \vec{R}=\frac{m\vec{r}_1+m\vec{r}_2}{m+m}} \times \vec{g} = 2m\vec{R} \times \vec{g}. \quad (13)$$

Como, por (5), $\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$, (13) fica

$$2m\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{L}}_{int} = 2m\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{int}}{dt} = \vec{0}, \text{ implicando,}$$

por $\vec{L} = I\vec{\omega}$, $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega}$ constante.

1.10.1

Aplicaremos a relação

$$I = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r_\alpha)^2 ,$$

em que r_α = distância da partícula α ao eixo (figura ao lado).

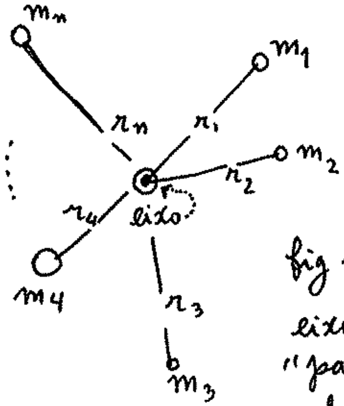
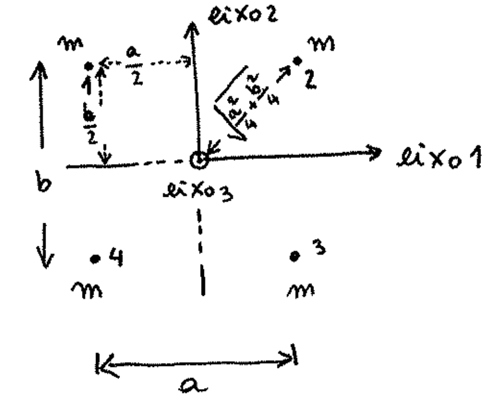


fig 1: eixo "para fora do papel".

Se se trata de um corpo rígido de massa continuamente distribuída, usamos $I = \int dm\, r^2$.

a)



I_1 (em relação ao eixo 1):

$$I_1 = \underbrace{m\left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{massa 1}} + \underbrace{m\left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{massa 2}} + \underbrace{m\left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{massa 3}} + \underbrace{m\left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{massa 4}}$$

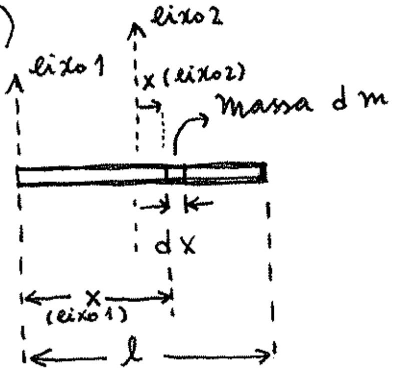
$$= m b^2 .$$

$$I_2 = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m a^2$$

$$I_3 = m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) + m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) + m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) + m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) = m(a^2+b^2)$$

Note que o momento de inércia <u>varia</u> com a escolha do <u>eixo</u>.

b)



Se a barra é homogênea então

$$\frac{dm}{dx} = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \frac{m}{l}\, dx ,$$

o que nos dá

$$I_1 = \int_0^l x^2\, dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx$$

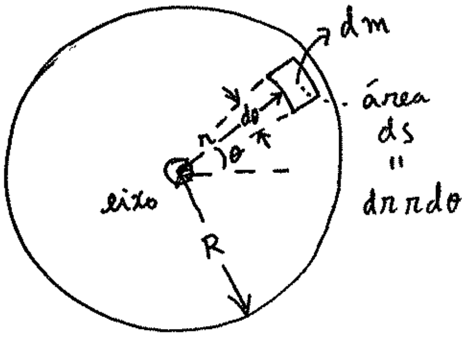
$$= \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{m l^2}{3}$$

1.10.2

Para o eixo 2,

$$I_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\, dm = \frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\, dx = \frac{ml^2}{12}.$$

c)



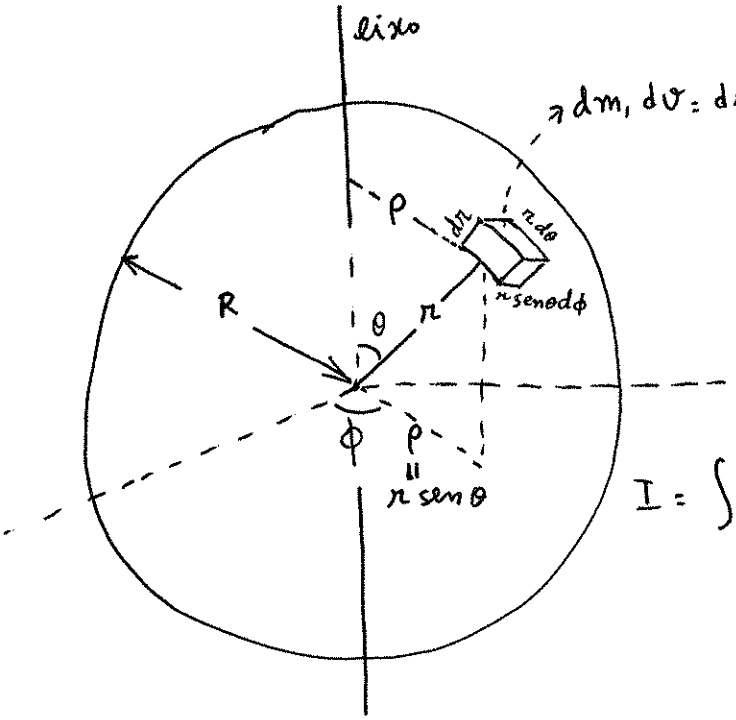
$$I = \int dm\, r^2$$

$$= \int \frac{m}{\pi R^2}\, ds\, r^2 = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr\, r^2$$

$$= \frac{mR^2}{2}$$

$$\frac{dm}{ds} = \frac{m}{\pi R^2} \text{ (disco homogêneo)}$$

d)



Esfera homogênea:

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}$$

$$I = \int \rho^2\, dm = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (r \operatorname{sen}\theta)^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

1.11.1

a)

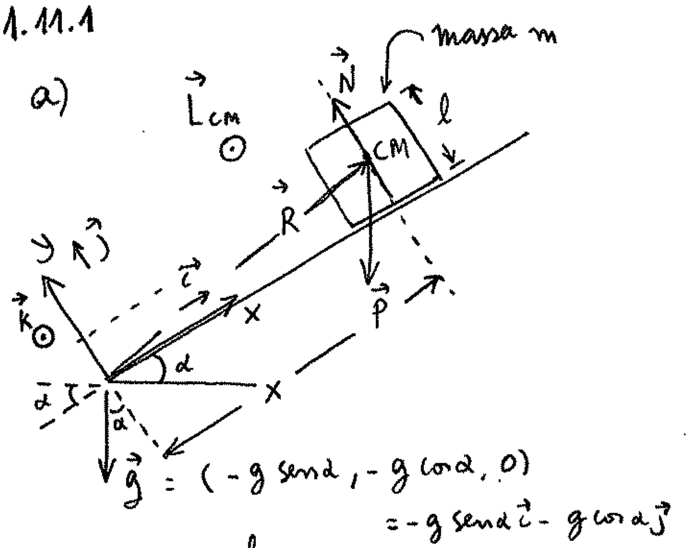


fig 1

Para o bloco (figura 1)

$m\ddot{\vec{R}} = \vec{N} + \vec{P}$ ① (equação do momento p/o centro de massa)

Como $\vec{R} = x\vec{i} + \frac{\ell}{2}\vec{j} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \ddot{x}\,\vec{i}$ $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0\right)$,

$\vec{N} = N\vec{j} = (0, N, 0)$ e $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}$, ① fica

$$m\ddot{x}\,\vec{i} = -mg\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{i} + (N - mg\cos\alpha)\,\vec{j}$$

ou

$$(m\ddot{x}, 0, 0) = (-mg\,\mathrm{sen}\alpha, N - mg\cos\alpha, 0),$$

de onde

$$m\ddot{x} = -mg\,\mathrm{sen}\alpha \Rightarrow \ddot{x} = -g\,\mathrm{sen}\alpha \quad \text{(aceleração do CM) ⓐ}$$

e

$$0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha \quad \text{("reação" normal) Ⓝ.}$$

Equaçãs para o momento angular:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{cm} + \underbrace{\vec{L}_{int}}_{=\vec{0}\ \text{(o corpo não gira em relação ao CM)}}\right) = (x\vec{i}) \times \vec{N} + \vec{R} \times \vec{P} \quad ②.$$

note que, para o torque da força $\vec{N}$, estamos implicitamente assumindo que essa força, como $\vec{P}$, deve "atravessar o CM", para que não se faça um torque capaz de variar $\vec{L}_{int}$. Se houvesse atrito as coisas seriam diferentes.

1.11 . 2

Como

$$\vec{L}_{cm} = \vec{R} \times (m\dot{\vec{R}}) \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = m\underbrace{\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}}_{=\vec{0}} + m\vec{R}\times\ddot{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = m\,\vec{R}\times\ddot{\vec{R}} \quad (3) \quad ,$$

$$x\vec{i} \times \vec{N} = x\vec{i} \times (N\vec{j}) = xN \underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}} = xN\vec{k} = (0,0,xN) \quad (4)$$

e $$\vec{R}\times\vec{P} = (x\vec{i} + \frac{l}{2}\vec{j}) \times (-mg\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j})$$

$$= -x\,mg\,\text{sen}\,\alpha \underbrace{\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}} - x\,mg\cos\alpha \underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}$$

$$-\frac{l}{2}\,mg\,\text{sen}\,\alpha \underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}} - \frac{l}{2}\,mg\cos\alpha \underbrace{\vec{j}\times\vec{j}}_{\vec{0}}$$

$$= (\frac{l}{2}\,mg\,\text{sen}\,\alpha - x\,mg\cos\alpha)\vec{k} \quad (5)$$

temos, colocando (3), (4) e (5) em (2),

$$m\underbrace{\vec{R}\times\ddot{\vec{R}}}_{(x\vec{i} + \frac{l}{2}\vec{j})\times(\ddot{x}\,\vec{i}) \,=\, x\ddot{x}\,\underbrace{\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}} + \frac{l}{2}\ddot{x}\,\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}} = (xN + \frac{l}{2}\,mg\,\text{sen}\,\alpha - x\,mg\cos\alpha)\vec{k}$$

ou

$$-\frac{l}{2}\ddot{x} = xN + \frac{l}{2}\,mg\,\text{sen}\,\alpha - x\,mg\cos\alpha \quad (6),$$

equação que implica que <u>existe</u> uma variação do momento angular do CM no sistema de eixos usado.

Note que em virtude da equação (N) ($N = mg\cos\alpha$), (6) fica

$$-\frac{\ell}{2}\ddot{x} = \frac{\ell}{2} mg \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \ddot{x} = -g\operatorname{sen}\alpha,$$

equivalente à equação (a).

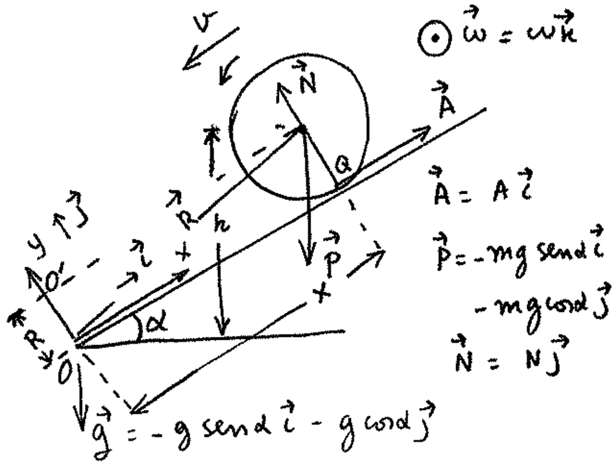


fig 2: cilindro de raio R, massa m. $I = \frac{mR^2}{2}$ em relação ao eixo do cilindro.

Ao lado temos o caso do cilindro. Por comodidade supomos que ele <u>desce</u>, para que $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.

$\vec{R} = x\vec{i} + R\vec{j}$ é a posição do CM. Note que

$$|\vec{R}| \neq R.$$

Como o contato é "puntual", supomos que $\vec{N}$ "atravesse o CM". Quando o ponto Q no cilindro está em contato com a rampa sua velocidade deve ser <u>nula</u>, sendo portanto $\vec{A}$ um atrito <u>estático</u>.

Para o movimento do centro de massas escrevemos

$$m\ddot{\vec{R}} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{A} \Rightarrow \ddot{x}\vec{i} = (A - mg\operatorname{sen}\alpha)\vec{i} + (N - mg\cos\alpha)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ddot{x} = A - mg\operatorname{sen}\alpha \quad (7) \\ 0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha \quad (8) \end{array}\right\}$$

A é <u>desconhecido</u> e o problema não terminou para $\ddot{x}$!

1.11.4

Está clara para você a insuficiência da equação ⑦ para a determinação de $\ddot{x}$? Você pensa estar autorizado, por exemplo, a escrever $A = \mu N$ com μ constante?

Para a equação do momento angular $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(e)}$ = torque "total" devido às forças externas é preciso cuidado. Usaremos o sistema de referência com origem em O. Os resultados finais não devem variar com a escolha de uma outra origem, como O' na figura 2, mas os passos intermediários poderiam dar a impressão de estarmos fazendo algo muito diferente.

Antes de continuar, comece pensando no seguinte: está claro para você que nesse problema $\vec{N}$, $\vec{P}$ e $\vec{A}$ são <u>externas</u>? Externas a quem?

Agora, em relação a O escrevemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\vec{R}\times(m\dot{\vec{R}})} + \underbrace{\vec{L}_{int}}_{I\vec{\omega}}\Big) = \vec{R}\times m\ddot{\vec{R}} + I\dot{\vec{\omega}}$$

lembre-se: $\dot{\vec{R}}\times m\dot{\vec{R}} = \vec{0}$

$$= \vec{R}\times(\underbrace{\vec{N}+\vec{P}+\vec{A}}_{m\ddot{\vec{R}}}) + I\frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \vec{R}\times\vec{P} + \underbrace{(x\vec{i})\times\vec{N}} + \overbrace{(x\vec{i})\times\vec{A}}^{=x\vec{i}\times A\vec{i}=\vec{0}},$$

isso equivale a $\vec{R}\times\vec{N}$:

$$\vec{R}\times\vec{N} = (x\vec{i}+R\vec{j})\times N\vec{j}$$
$$= (x\vec{i})\times N\vec{j} + RN\underbrace{\vec{j}\times\vec{j}}_{=0}$$

$$\therefore\ \vec{R}\times m\ddot{\vec{R}} + I\dot{\vec{\omega}} = \vec{R}\times(\vec{N}+\vec{P}+\vec{A}) + I\dot{\omega}\vec{k} = \vec{R}\times(\vec{N}+\vec{P}),$$ ou ainda

1.11.5

$$\vec{R}\times\vec{A}+I\dot{\omega}\vec{k}=\vec{0} \Rightarrow I\dot{\omega}\vec{k}=-(X\vec{i}+R\vec{j})\times A\vec{i}$$

$$=-RA\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}=RA\vec{k},$$

ou seja,

$$I\dot{\omega}=RA \quad (9).$$

Você, alternativamente, pensando na rotação do cilindro em relação ao centro de massa, poderia imediatamente "manjar" essa equação.

Devemos agora estabelecer a relação que existe entre $\dot{\omega}$ e $\ddot{X}$. Mostraremos que se a velocidade de Q é zero no contato devemos ter a "familiar" relação $V_{CM}=\dot{X}=\omega R \Rightarrow$ $\ddot{X}=\dot{\omega}R$ (10), que colocada em (9) nos dá

$$I\frac{\ddot{X}}{R}=RA \quad (11)$$

Vejamos. Na figura abaixo examinamos a cinemática do ponto Q no cilindro em rotação.

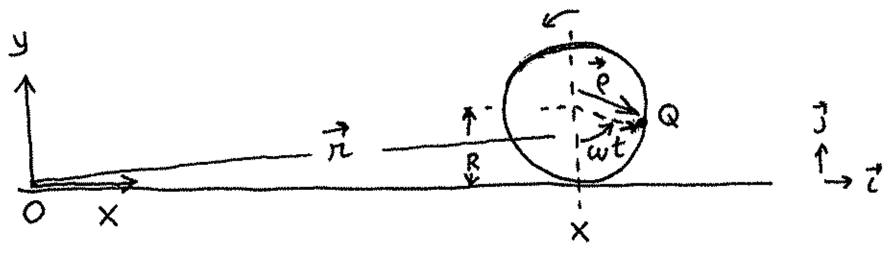


fig 3

1.11.6

Pela figura 3 a posição de Q é

$$\vec{r} = x\vec{i} + R\vec{j} + \vec{\rho}$$

$$= x\vec{i} + R\vec{j} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{i} - R\cos\omega t\,\vec{j} \,.$$

Entao, sendo $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = V_{CM}$,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = V_{cM}\,\vec{i} + \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{0}\,\vec{j} + R\omega\cos\omega t\,\vec{i} + R\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\vec{j} \,.$$

É claro pela figura que, no instante $t=0$, $\omega t = 0$ e Q está em contato com o plano (que está em repouso). Se não há deslizamento,

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \underbrace{V_{CM}\,\vec{i} + R\omega\,\vec{i}}_{} = \vec{0} \Rightarrow V_{CM} = \dot{x} = \omega R \,.$$

Note: em $t=0$, $\cos\omega t = 1$ e $\text{sen}\,\omega t = 0$

Isso explica a equação (10).

Substituindo A por (11) e colocando o resultado em (7) teremos

$$\ddot{x} = \frac{I}{R^2}\ddot{x} - mg\,\text{sen}\,\alpha \quad (12).$$

Observe que se $I = \frac{mR^2}{2}$, teremos $\ddot{x} = -2g\,\text{sen}\,\alpha$, independentemente do valor de R.

b) A razão pela qual a energia $E = \frac{m V_{CM}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh$ se conserva é simples. Sendo $\vec{V}_a = 0$ no contato, é nulo o trabalho de $\vec{A}$!

1.12.1

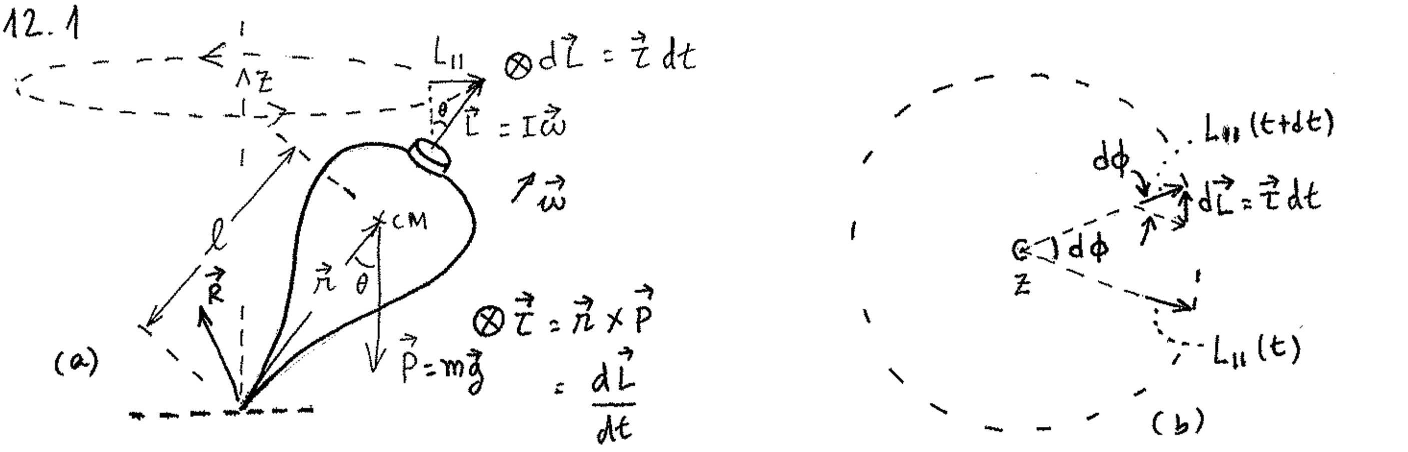


fig 1: precessão de um pião em visões lateral (a) e superior (b).

Nos guiamos pelas figuras acima e pela aproximação em que sendo $|\vec{\omega}|$ relativamente grande o momento angular se aproxima por $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Desconsideramos também a nutação, que faz θ ser variável.

$L_{\parallel}$ faz um movimento circular uniforme: $|d\vec{L}| = L_{\parallel}\,d\phi$ $\Rightarrow |d\vec{L}| = L \operatorname{sen}\theta\, d\phi$. Como $|d\vec{L}| = |\vec{\tau}\,dt| = |\vec{\tau}|dt = |\vec{r}\times\vec{P}|dt = l P \operatorname{sen}\theta\, dt$, temos $l P \operatorname{sen}\theta\, dt = L \operatorname{sen}\theta\, d\phi = I\omega \operatorname{sen}\theta\, d\phi \Rightarrow$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \text{velocidade angular de precessão} = \frac{lP}{I\omega}$$

Um caso semelhante de precessão de $\vec{L}$ está ao lado. O halteres gira apoiado em mancais sem atrito. As forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ aplicadas pelos mancais "produzem" o torque $\vec{\tau}$ necessário.

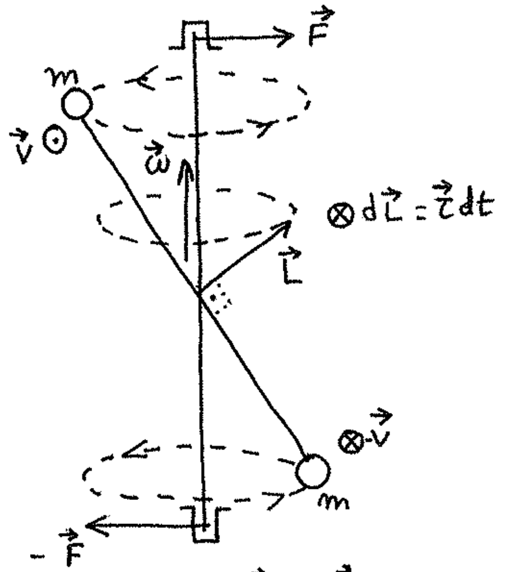


fig 2: $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ são as velocidades das massas.

1.13.1

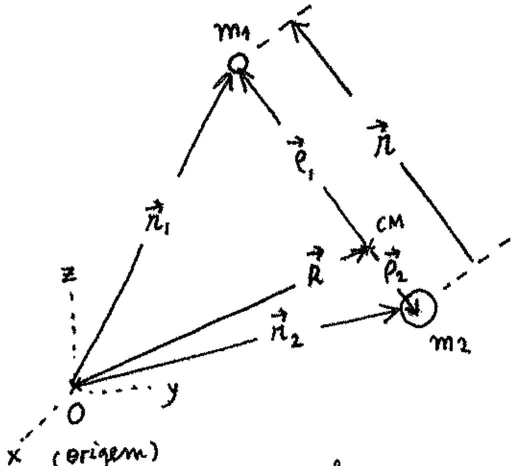


figura 1

Acompanhamos a figura ao lado, com

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad (1).$$

$\vec{r}$ é a posição da massa 1 em relação à massa 2. $\vec{\rho}_1$ é a posição da massa 1 em relação ao centro de massa (CM) e $\vec{\rho}_2$ é a posição da massa 2 em relação ao CM. O é a origem do referencial "de laboratório" (Lab), que vê o centro de massas em movimento.

Pela figura temos

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}_1 \quad (2) \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{\rho}_2 \quad (3) \quad e \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (4).$$

Por (2) e (1), levando (4) em conta,

$$\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r},$$

o que nos dá

$\vec{V}_1'$ = velocidade da massa 1 em relação ao centro de massas

$$= \frac{d\vec{\rho}_1}{dt} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{V}_1' = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{\vec{r}} \quad (5).$$

Agora, por (3) e (1), levando (4) em conta,

$$\vec{\rho}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1+m_2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{r},$$

dando $\vec{V}_2' = \dfrac{d\vec{\rho}_2}{dt} = -\left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)\dot{\vec{r}} \quad (6)$

1.13. 2

Examinando as equações (5) e (6), chamando $\vec{r}$ de $\vec{w}$, é fácil perceber que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_1'$ são antiparalelos. Por (5),

$$\vec{v}_1' = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{w} = \frac{m_2}{m_1}\underbrace{\left(\frac{m_1}{m_2+m_1}\right)\vec{w}}_{(-\vec{v}_2')\ (\text{por } (6))} = \frac{m_2}{m_1}\left(-\vec{v}_2'\right) = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2' \ (7).$$

Isso significa que em relação ao centro de massas (referencial do CM, em que o centro de massas está em repouso) as velocidades das massas 1 e 2 sempre são opostas, antes e depois de uma eventual colisão (figura 2). Além disso, (7) pode ser interpretada assim:

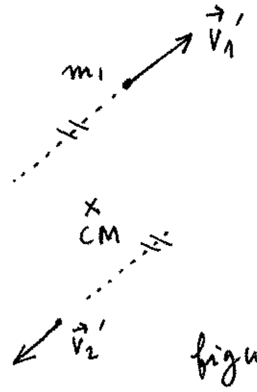


figura 2

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2' \Rightarrow m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_2' \Rightarrow m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \vec{0}.$$

Então, como esperado, $\vec{0}$ é a quantidade de movimento do sistema no referencial do centro de massas, que automaticamente se conserva.

Suponhamos agora que ocorre uma colisão e que ela é elástica. Nas figuras abaixo vamos caracterizar o que ocorre nos sistemas lab (de laboratório) e CM (do centro de massas). Vamos considerar que uma

1.13.3

das partículas, inicialmente, estava em repouso.

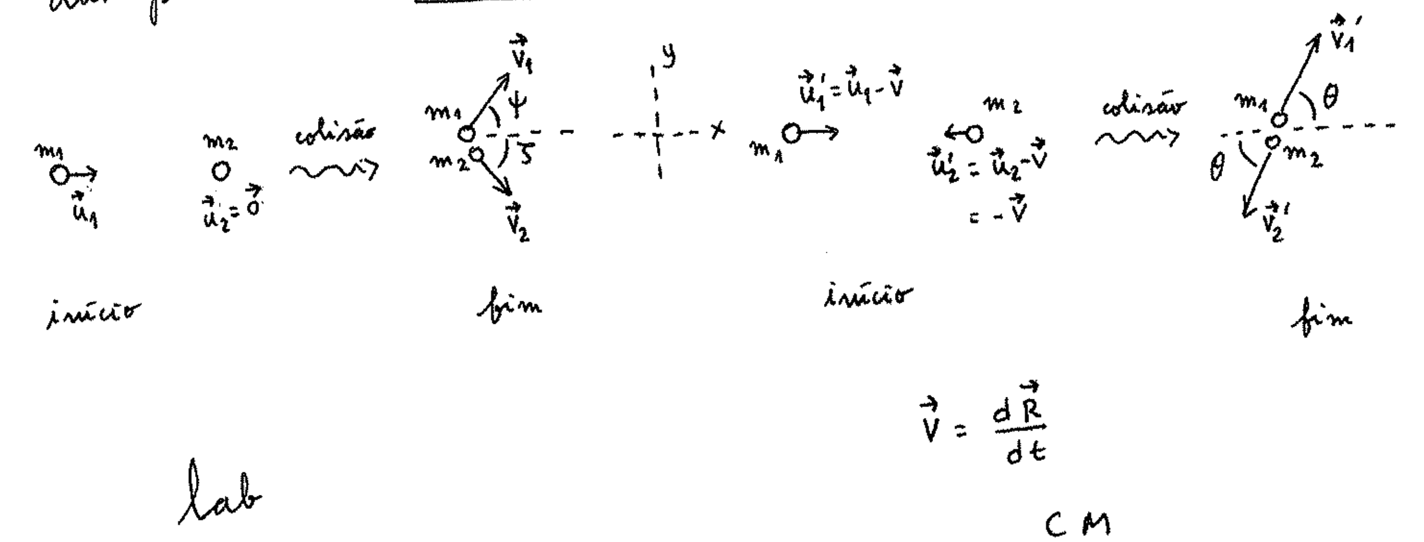


figura 3

Na figura 3 $\vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{u}_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{u}_2}_{=\vec{0}\ (\vec{u}_2=\vec{0})} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_2 =$$ velocidade do

centro de massas, que não varia na colisão.

Agora, podemos aplicar as leis de conservação do momento (sempre válida) e da energia (pois a colisão é elástica) no referencial do centro de massas. Temos, no referencial CM, levando-se em conta o sistema $x\,y$ dado,

$$m_1 u_1' - m_2 u_2' = 0 \quad (8) \text{ (momento inicial)}$$

$$\left.\begin{aligned} & m_1 V_1' \cos\theta - m_2 V_2' \cos\theta = 0 \ (9) \\ & m_1 V_1' \operatorname{sen}\theta - m_2 V_2' \operatorname{sen}\theta = 0 \ (10) \end{aligned}\right\} \text{(momento final)} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 V_1' - m_2 V_2' = 0 \ (11) \\ \text{por (9) } \underline{\text{ou}} \text{ (10).} \end{array}$$

$$\frac{m_1}{2}(u_1')^2 + \frac{m_2}{2}(u_2')^2 = \frac{m_1}{2}(V_1')^2 + \frac{m_2}{2}(V_2')^2 \quad \text{(colisão elástica) (12).}$$

1-13.4

De (8) e (11) temos $u_1' = \frac{m_2}{m_1} u_2'$ (13) e $V_1' = \frac{m_2}{m_1} V_2'$ (14).

Colocando (13) e (14) em (12) temos

$$\frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{m_1^2}(u_2')^2 + \frac{m_2}{2}(u_2')^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)(u_2')^2$$

$$= \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{m_1^2}(V_2')^2 + \frac{m_2}{2}(V_2')^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)(V_2')^2$$

$\Rightarrow u_2' = V_2'$ (15). Voltando com (15) em (12), finalmente, temos

$$\frac{m_1}{2}(u_1')^2 + \frac{m_2}{2}(V_2')^2 = \frac{m_1}{2}(V_1')^2 + \frac{m_2}{2}(V_2')^2 \Rightarrow u_1' = V_1' \quad (16).$$

As relações (15) e (16) mostram que, no referencial do centro de massas a colisão elástica produz apenas um <u>desvio</u> das partículas, sem alteração no seu módulo, como mostra a figura 4.

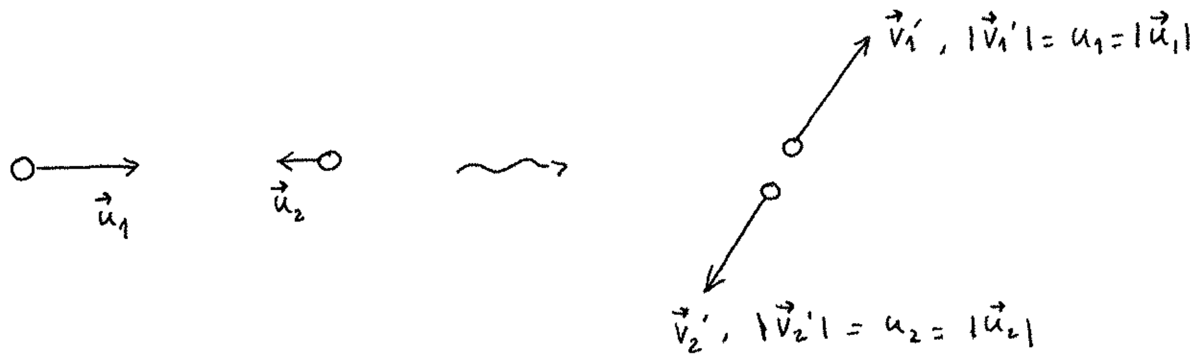


figura 4: colisão elástica no referencial do CM.

1.14.1

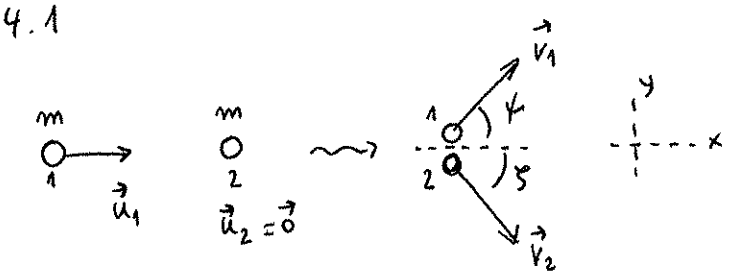


figura 1

Acompanhamos a figura abaixo, no referencial lab (questão 13 dessa lista).

Temos
$$\begin{cases} m u_1 = m v_1 \cos\varphi + m v_2 \cos\xi \ (1) \text{ (conserv. do momento, eixo x)} \\ 0 = m v_1 \operatorname{sen}\varphi + m v_2 \operatorname{sen}\xi \ (2) \text{ (conserv. do momento, eixo y)} \\ \frac{m}{2} u_1^2 = \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 \Rightarrow u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \ \text{(cons. da energia) (3).} \end{cases}$$

Note que a conservação do momento pode também ser escrita como

$$m\vec{u}_1 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (4)$$

Ocorre que de (4) temos
$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = u_1^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$
$$= \underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}_{|\vec{v}_1|^2 = v_1^2} + \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1}_{= \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2} + \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2$$
$$= v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \quad (5)$$

De (5) e (3) temos

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0 \ (6). \therefore$$

ou $\vec{v}_1 = 0$ e $\vec{v}_2 = \vec{u}_1$ para conservar o momento ou então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são <u>perpendiculares</u> ($\varphi + \xi = \pi/2$). Observe, no entanto, que se conhecemos u_1, sobram em geral como incógnitas v_1, v_2, φ e ξ. Como (1), (2) e (3) são apenas 3 equações, os princípios de conservação do momento e energia são insuficientes, em geral, para a resolução do problema.

Uma coisa que é possível é correlacionar (figura abaixo, θ com φ ou ξ (figura 2)

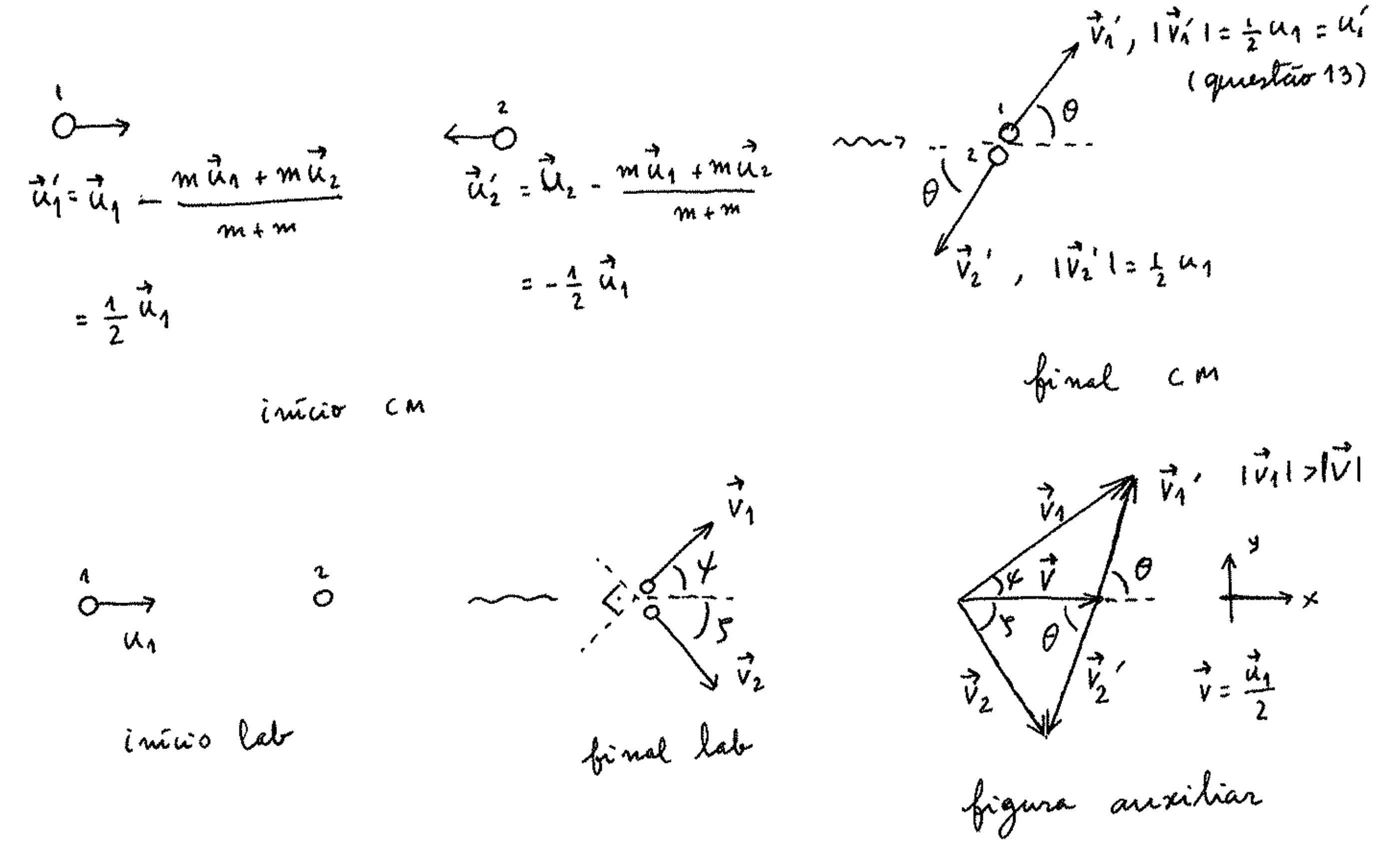


figura 2

A figura auxiliar se explica assim: $\vec{V}$ = velocidade do centro de massas $= \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1+m_2} = \frac{m\vec{u}_1}{2m} = \frac{\vec{u}_1}{2}$.

Na figura auxiliar $\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_1' \Rightarrow \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V}$ = velocidade relativa da partícula 1 em relação ao CM. Da mesma forma $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}$. Então a figura auxiliar corresponde precisamente às definições de $\vec{V}_1'$ e $\vec{V}_2'$. Observe (ver questão 13) que no referencial CM $\vec{V}_1'$ e $\vec{V}_2'$ são antiparalelos, sendo θ o desvio da partícula 1 no CM.

Pela figura auxiliar temos

$$V_1 \cos \psi = V + V_1' \cos \theta \quad \text{(eixo x)} \quad (7)$$

e $$V_1 \operatorname{sen} \psi = V_1' \operatorname{sen} \theta \quad \text{(eixo y)} \quad (8).$$

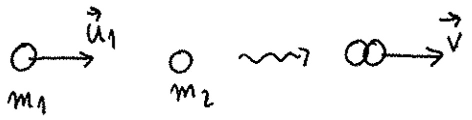
Dividindo (8) por (7) temos $$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_1' \operatorname{sen} \theta}{V + V_1' \cos \theta} \quad (9).$$ Ocorre que pela figura 2 temos $V_1' = |\vec{V}_1'| = \frac{1}{2} u_1$ e $V = \frac{1}{2} u_1$. Então (9) fica

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{1}{2} u_1 \operatorname{sen} \theta}{\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_1 \cos \theta} \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} \quad (10).$$

(10) se escreve formalmente como $\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}\right)$. Como vimos, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$

1.15.1

a)



início

final: m_1 e m_2 grudadas

figura 1

Pode ocorrer desvio nesse caso?

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \quad \text{(momento)}$$

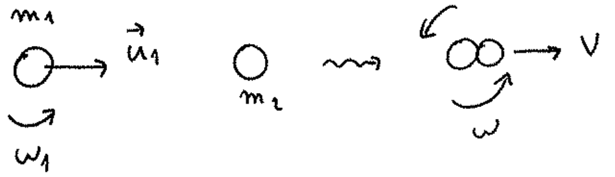
$$\Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad (1)$$

$$\Delta E = \frac{m_1 + m_2}{2} V^2 - \frac{m_1}{2} u_1^2$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \right)^2 - \frac{m_1}{2} u_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right] u_1^2 = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} u_1^2$$

b)



início (momentos de inércia I_1 e I_2)

final (momento de inércia I)

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \quad \text{(momento)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad (1)$$

$$I_1 \omega_1 = I \omega \quad \text{(momento angular)}$$

$$\Delta E = \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2} V^2 - \frac{m_1}{2} u_1^2}_{\text{translação}} + \underbrace{\frac{I}{2} \omega^2 - \frac{I_1}{2} \omega_1^2}_{\text{rotação}}$$

Termine o cálculo de ΔE. Podemos escrever $I = I_1 + I_2$?

1.16. (2.2).1

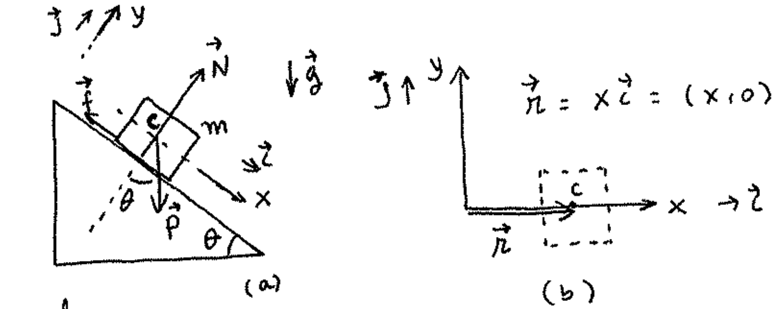


figura 1:

$\vec{g} = g\,\text{sen}\,\theta\,\vec{i} - g\cos\theta\,\vec{j}$

$= (g\,\text{sen}\,\theta, -g\cos\theta)$

na figura 1 (a) temos as forças sobre o bloco na hipótese de que ainda há um equilíbrio estático. $\vec{f}$ é a força de atrito, que na hipótese de o bloco estar "subindo" teria sentido contrário ao indicado.

Você deve estar em condições de escrever $\vec{N} = N\vec{j}$ (1) (N sendo a projeção de $\vec{N}$ sobre o eixo y), $\vec{P} = mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{i} - mg\cos\theta\,\vec{j}$ (2) $= m\vec{g}$ e $\vec{f} = f\,\vec{i}$ (3) (f sendo a projeção de $\vec{f}$ sobre o eixo x: $f<0$ na hipótese da figura). Pela figura 1 (b), a aceleração é $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i}) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ (4). Juntando tudo isso a segunda lei de Newton fica sendo

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow N\vec{j} + mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{i} - mg\cos\theta\,\vec{j} + f\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$$

$$\Rightarrow (mg\,\text{sen}\,\theta + f)\vec{i} + (N - mg\cos\theta)\vec{j} = m\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\ddot{x}}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\,\text{sen}\,\theta + f = m\ddot{x} & (5) \\ N - mg\cos\theta = 0 & (6) \end{cases}$$

A equação (5), acima, nos interessa. Imediatamente antes do escorregamento $\ddot{x} = 0$ e $f = -\mu_s|\vec{N}| = -\mu_s N$ (supomos $N>0$). (5) fica então $mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_s N = 0$ (7). Você deve poder mostrar que substituindo N por (6) em (7) temos $\text{tg}\,\theta = \mu_s$ (8). O valor máximo de θ corresponde a uma solução "razoável" de (8) tal que $\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\theta_{max} = \mu_s$.

1.16.(2.5).1

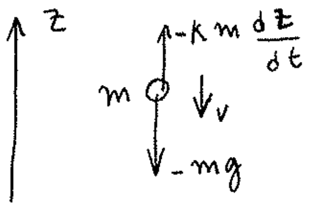


figura 1

Note que supomos, ao lado, $v = \frac{dz}{dt} < 0$. $-km\frac{dz}{dt}$ será <u>positiva</u>, representando força de resistência no sentido <u>positivo</u>, se opondo a v.

2ª lei: $m\frac{dv}{dt} = -kmv - mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv - g \Rightarrow \frac{dv}{kv+g} = -dt$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v+\frac{g}{k}} = -k\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v+\frac{g}{k}} = -k\int_0^t dt \quad (1)$$

(v_0 = velocidade em $t=0$, v = velocidade no instante t). Devemos obter

$I = \int \frac{dv}{v+\frac{g}{k}}$. Com $u = v + \frac{g}{k}$, $du = dv$ e então

$I = \int \frac{du}{u} = \ln u$ (considerando $u>0$).

Então, voltando a (1)

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v+\frac{g}{k}} = \ln\left(v+\frac{g}{k}\right) - \ln\left(v_0 - \frac{g}{k}\right) = \ln\left[\frac{\left(v+\frac{g}{k}\right)}{\left(v_0+\frac{g}{k}\right)}\right] = -kt$$

$$\Rightarrow e^{-kt} = \frac{v+\frac{g}{k}}{v_0+\frac{g}{k}} \Rightarrow v = -\frac{g}{k} + \left(v_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} \quad (2)$$

Como $v = \frac{dz}{dt}$, $dz = \left[-\frac{g}{k} + \left(v_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt}\right]dt \Rightarrow$

1.16. (2.5). 2

$$\int_{z(0)=h}^{z} dz = \int_0^t \left[-\frac{g}{k} + \left(V_0 + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} \right] dt$$

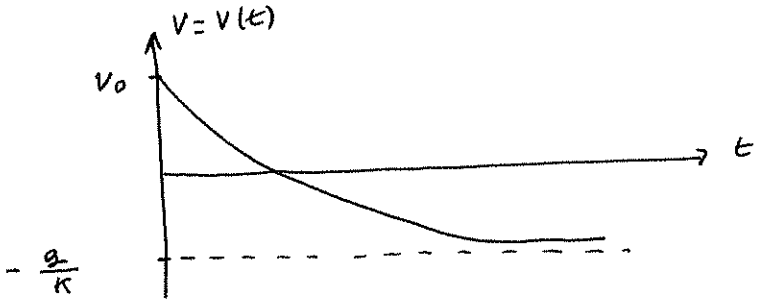
$$\Rightarrow z = h - \frac{g}{k} t - \frac{k V_0 + g}{k^2} \left(e^{-kt} - 1\right) \quad (3).$$

Observação: fazendo $e^{-kt} = 1 - kt - \frac{k^2 t^2}{2} + \dots$ (k pequeno),

mostre que $z = h - V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - \underbrace{\frac{V_0 k}{2} t^2}_{} + \dots$

primeira correção devida ao atrito

Nota: Você deveria poder levantar o gráfico de $V(t)$ como um esboço. Exemplo abaixo para $V_0 > 0$.



$-\frac{g}{k}$ = vel. terminal (ver livro)

A que movimento poderia corresponder o gráfico acima?

1.16. (2.9).1

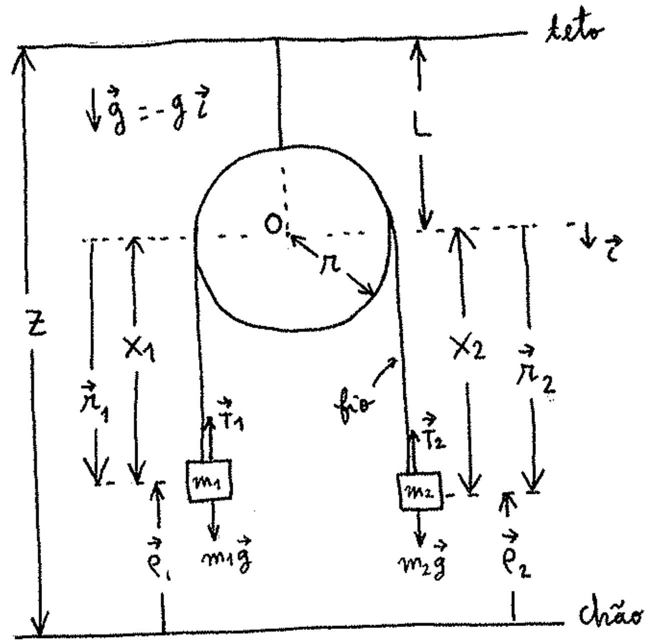


figura 1: máquina de Atwood. Sendo o fio inextensível, $x_1 + x_2 = l_0 =$ constante.

A figura 1 nos serve de referência. Suponha $m_1 > m_2$.

Dois casos devem ser considerados:

a) Centro O da polia em repouso ($\ddot{Z} = 0$ e $\ddot{L} = 0$)

Seguindo a figura 1 (origem no centro da polia) $\vec{T}_1 = -T\,\vec{i}$ (1), $\vec{T}_2 = -T\,\vec{i}$ (2) e $x_1 + x_2 = l_0 =$ constante (3),

o que implica $\dfrac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = \underbrace{\dfrac{d^2}{dt^2}(l_0)}_{=0\ (l_0\ \text{constante})} \Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$ (4).

As leis de Newton ficam,

para m_1, $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T$ (5)

e, para m_2, $m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T$ (6).

Você pode substituir T, por (5), em (6). Levando depois (4) em conta teremos $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ (7) e $T = 2m_1m_2 g/(m_1 + m_2)$ (8).

b) Se existe aceleração $\alpha = -\ddot{Z}$ do teto em relação ao chão teremos de usar o chão como origem (por que?). Agora as posições, em relação ao solo, são $\vec{\rho}_1$ e $\vec{\rho}_2$. Temos $\vec{\rho}_1 = -(Z - L - x_1)\,\vec{i}$ (9), $\vec{\rho}_2 = -(Z - L - x_2)\,\vec{i}$ (10). As leis de Newton serão agora $m_1\ddot{\vec{\rho}}_1 = (m_1 g - T)\vec{i}$ (11) e $m_2\ddot{\vec{\rho}}_2 = (m_2 g - T)\,\vec{i}$ (12). A condição (4) continua sendo válida.

Você deveria poder mostrar que, nesse caso, $\ddot{x}_1 = (g - \alpha)(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ (13).

1.16 . (2.10) . 1 Movimento da carga q (massa m) no campo $\vec{B} = B_0 \vec{j} = (0, B_0, 0)$, lançada com velocidade $\vec{V}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ da posição $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

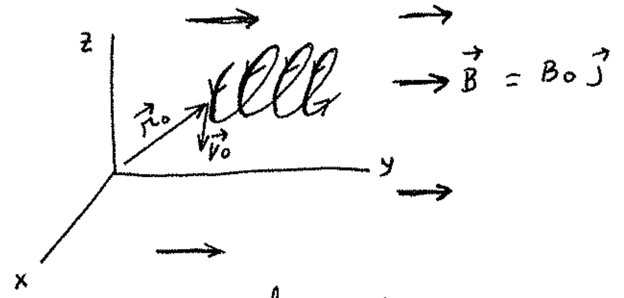


figura 1

Como na figura ao lado, espera-se um movimento helicoidal "contornando" algumas linhas de $\vec{B}$.

Temos

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \text{ou}$$

$$q \vec{V} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

. Com $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$

$(u = V_x,\ v = V_y,\ w = V_z)$, temos

$$m \frac{du}{dt} \vec{i} + m \frac{dv}{dt} \vec{j} + m \frac{dw}{dt} \vec{k} = q \vec{V} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= q(-B_0 w,\ 0,\ u B_0)$$

$$= -q B_0 w \vec{i} + 0 \vec{j} + u B_0 \vec{k} \quad ,$$

de onde

$$m \frac{du}{dt} = -q B_0 w \quad (1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = v_y = \text{constante} \Rightarrow y = ut + y_0 \quad (2)$$

$$m \frac{dw}{dt} = q B_0 u \quad (3)$$

Agora (1) e (3) podem ser escritas como um par de equações acopladas ,

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = -\frac{qB_0}{m} w \Rightarrow \quad \dot{u} = -\alpha\, w \quad (4),$$

$$\frac{dw}{dt} = \dot{w} = \frac{qB_0}{m} u \Rightarrow \quad \dot{w} = \alpha\, u \quad (5), \quad \text{com } \alpha = \frac{qB_0}{m} \ (6).$$

Derivamos (4): $\ddot{u} = -\alpha \dot{w}$ (7). Colocando (5) em (7) temos

$$\ddot{u} = -\alpha\,(\alpha u) \Rightarrow \quad \ddot{u} + \alpha^2 u = 0 \quad \Rightarrow \ u = u(t) = A\cos\alpha t + B\,\text{sen}\,\alpha t \quad (8)$$

Se $u(t=0) = u_0 = \dot{x}_0$ = componente x da velocidade inicial, temos

$$u(t=0) = A\cos\alpha\cdot 0 + B\,\text{sen}\,\alpha\cdot 0 = A = u_0 = \dot{x}_0 .$$

Então, voltando a (8),

$$u = \dot{x}_0 \cos\alpha t + B\,\text{sen}\,\alpha t \quad (9).$$

Como $u = \frac{dx}{dt}$, temos, por (9), $\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \cos\alpha t + B\,\text{sen}\,\alpha t$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha t - \frac{B}{\alpha}\cos\alpha t + C \quad (10)$$

Se $x(t=0) = x_0$ = componente x da posição inicial, temos

$$x(t=0) = x_0 = \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha\cdot 0 - \frac{B}{\alpha}\cos\alpha\cdot 0 + C = x_0 \Rightarrow \quad C = x_0 + \frac{B}{\alpha}$$

de onde, voltando a (10),

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha t - \frac{B}{\alpha}(-1 + \cos\alpha t) + x_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha t + \frac{B}{\alpha}(1 - \cos\alpha t) \quad (11).$$

Evidentemente o problema não termina aqui. Colocando (9) em (5) temos

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \alpha u = \alpha \dot{x}_0 \cos\alpha t + \alpha B\,\text{sen}\,\alpha t \,,$$ de onde

1.16. (2.10).3

$$W = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t - B \cos \alpha t + D \quad (12).$$

Ocorre que (12) deve ser compatível com (4), $\dot{u} = -\alpha W$.

Com u dada por (9) e W por (12) temos

$$-\dot{x}_0 \alpha \operatorname{sen} \alpha t + B\alpha \cos \alpha t = -\alpha \left(\dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t - B \cos \alpha t + D \right),$$

de onde $D = 0$. Voltando a (12) isso implica

$$W = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t - B \cos \alpha t \quad (13).$$

Como em $t=0$ $W = W(t=0) = W_0 = \dot{z}_0$, temos

$$\dot{z}_0 = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot 0 - B \cos \alpha \cdot 0 \Rightarrow B = -\dot{z}_0 \quad (14)$$

Com isso (13) fica

$$W = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t + \dot{z}_0 \cos \alpha t \quad (15)$$

Além disso, voltando a (9) e (10) devemos ter, por (14),

$$u = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t - \dot{z}_0 \operatorname{sen} \alpha t \quad (16)$$

e

$$x(t) = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t - \frac{\dot{z}_0}{\alpha} (1 - \cos \alpha t) \quad (17).$$

Retornando a (15), com $W = \frac{dz}{dt}$,

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x}_0 \operatorname{sen} \alpha t + \dot{z}_0 \cos \alpha t \Rightarrow z(t) = -\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \cos \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + E \quad (18)$$

Como $z(t=0) = -\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \cos \alpha \cdot 0 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cdot 0 + E = z_0$, temos

$E = z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}$ (19), de onde, de volta a (18),

$$z(t) = z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha} (1 - \cos \alpha t) + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t \quad (20).$$

1.16. (2.10).4

A projeção da trajetória sobre o plano xz, como sugere a fig. 1, deve ser circular. De fato, reescrevemos (17) e (20) nas formas

$$X(t) - X_0 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} = \frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t \quad (21)$$

e

$$z(t) - z_0 - \frac{\dot{x}_0}{\alpha} = -\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \cos \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t \quad (22).$$

Ocorre que

$$\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\alpha}\right)^2} \; \frac{\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t}{\sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\alpha}\right)^2}} \quad (23).$$

Se definimos $\frac{(\dot{x}_0/\alpha)}{\sqrt{(\dot{x}_0/\alpha)^2 + (\dot{z}_0/\alpha)^2}} = \cos \theta$ e $\frac{(\dot{z}_0/\alpha)}{\sqrt{(\dot{x}_0/\alpha)^2 + (\dot{z}_0/\alpha)^2}} = \operatorname{sen} \theta$,

reescrevemos (23) na forma

$$\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t = A \operatorname{sen}(\alpha t + \theta) \quad (24),$$

com $A = \sqrt{(\dot{x}_0/\alpha)^2 + (\dot{z}_0/\alpha)^2}$ (25). Com essas definições, temos

$$-\frac{\dot{x}_0}{\alpha} \cos \alpha t + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t = A\left[\left(\frac{-\frac{\dot{x}_0}{\alpha}}{A}\right) \cos \alpha t + \left(\frac{\frac{\dot{z}_0}{\alpha}}{A}\right) \operatorname{sen} \alpha t\right]$$

$$= A\left(-\cos\theta \cos \alpha t + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} \alpha t\right)$$

$$= -A \cos(\alpha t + \theta) \quad (25)$$

Com (24) e (25) reescrevemos (21) e (22) na forma

1.16. (2.10).5

$$x - x_0 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha} = A \operatorname{sen}(\alpha t + \theta) \quad (26)$$

e $$z - z_0 - \frac{\dot{x}_0}{\alpha} = -A \cos(\alpha t + \theta) \quad (27) .$$

Em virtude de (27) e (28) temos

$$\left(x - x_0 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha}\right)^2 + \left(z - z_0 - \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\right)^2 = A^2 ,$$

a equação de uma circunferência no plano xz com centro em $x_c = x_0 - \frac{\dot{z}_0}{\alpha}$ e $z_c = z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}$ e raio

$$A = \sqrt{\frac{(\dot{x}_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(\dot{z}_0)^2}{\alpha^2}} = \frac{m}{q B_0} \sqrt{(\dot{x}_0)^2 + (\dot{z}_0)^2}$$

1.16.(2.11).1

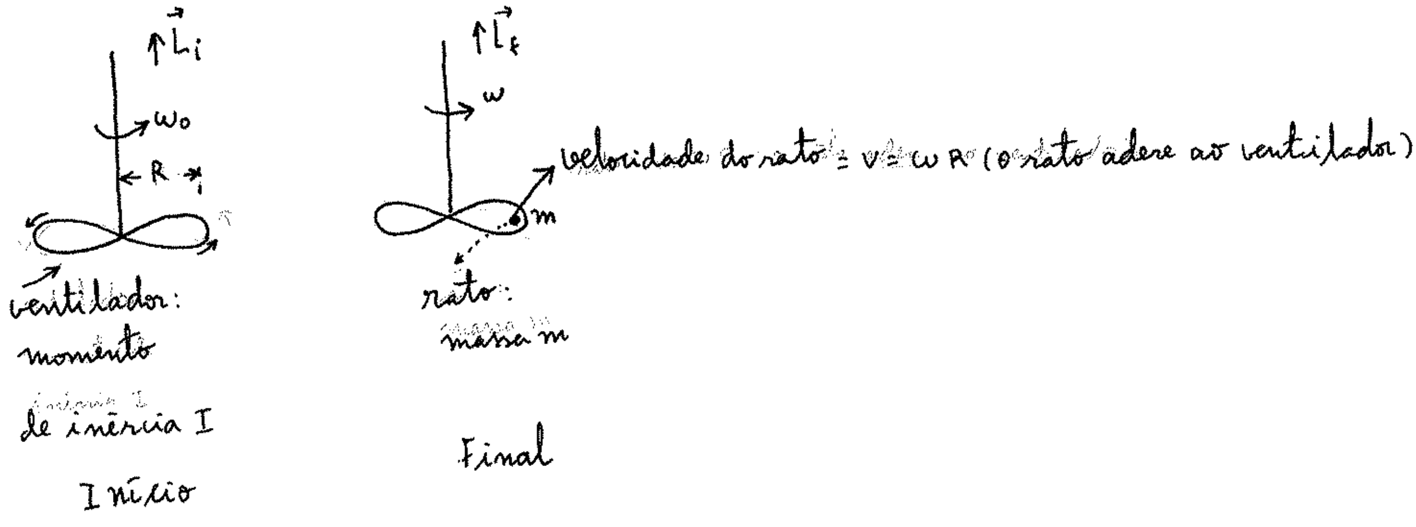


figura 1

A figura 1 serve de apoio. Apenas vamos nos preocupar com a conservação do momento angular. Há uma conservação de energia? E do momento linear?

Em módulo, $L_i = I\omega_0 = L_f = I\omega + \underbrace{m\underbrace{(\omega R)}_{v}R}$ (1)

mvR é um momento angular "de translação" do rato, ao final

De (1),

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I}{I + mR^2} \quad (2).$$

1.16.(2.13).1

Essa questão se encontra bem explicada no texto TM. O modelo de resolução está também analisado em detalhe no problema 2.43 de TM, desenvolvido na questão 17 dessa lista. Vamos aqui então fazer um esboço auxiliar.

Se $U(x) = -Wd^2 \dfrac{x^2+d^2}{x^4+8d^4}$ podemos dizer que $U(x)$ é sempre negativo e que portanto não há x real tal que $U(x)=0$. Por outro lado, se x é suficientemente grande, em módulo, d^2 e d^4 serão desprezíveis e $U(x)$ vai tender a $U(x) = -Wd^2 \dfrac{x^2}{x^4}$ $= -Wd^2 \dfrac{1}{x^2}$, de forma que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$.

Para os extremos, ou pontos de equilíbrio, temos

$$\frac{dU(x)}{dx} = -F(x) = -(\text{força sobre a partícula}) = 0 \text{ , ou}$$

$$\frac{d}{dx}\left[-Wd^2\frac{x^2+d^2}{x^4+8d^4}\right] = -Wd^2\frac{d}{dx}\left[(x^2+d^2)\frac{1}{x^4+8d^4}\right] = -Wd^2\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{(x^2+d^2)(x^4+8d^4)^{-1}}_{\text{produto}}\Big]$$

$$= -Wd^2\left[\left(\frac{d}{dx}(x^2+d^2)\right)(x^4+8d^4)^{-1} + (x^2+d^2)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}(x^4+8d^4)^{-1}\right)}\right]$$

$$= \frac{d(x^4+8d^4)^{-1}}{d(x^4+8d^4)}\,\frac{d(x^4+8d^4)}{dx}$$

cadeia

$$= -(x^4+8d^4)^{-2}\,4x^3$$

$x=0$ é uma possibilidade

$$= -Wd^2\, 2x\left[\frac{-x^4-2d^2x^2+8d^4}{(x^4+8d^4)^2}\right] = 0 \text{ ,}$$

a outra raiz daria x imaginário!

implicando $x^4+2d^2x^2-8d^4 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{-2d^2+\sqrt{4d^4+32d^4}}{2}$

$\Rightarrow x = \pm d\sqrt{2}$, além de $x=0$.

1.16 . (2.13).2

Devemos nos lembrar que $U(x=0) = -Wd^2 \dfrac{0^2+d^2}{0^4+8d^4} = -\dfrac{W}{8}$ e

que $U(x=-d\sqrt{2}) = -Wd^2 \dfrac{2d^2+d^2}{4d^4+8d^4} = -\dfrac{W}{6}$.

Abaixo temos o gráfico de $U(x)$, no qual se notam o ponto de equilíbrio <u>instável</u> $x=0$, no qual $U(x)$ tem um <u>máximo</u> local, e os pontos de equilíbrio estável $x=\pm d\sqrt{2}$, nos quais $U(x)$ é mínimo. Quatro possibilidades para a energia mecânica $E = T + U$ são consideradas. Para $E=E_1$ o movimento é <u>impossível</u>. Para $E=E_2$ a partícula pode oscilar nos espaços D_1 <u>ou</u> D_2. Para $E=E_3$ o movimento ocorre no intervalo D. Finalmente, para $E=E_4>0$ o movimento é não-limitado, isto é, sem pontos de retorno (nos quais $\dot{x}=0$).

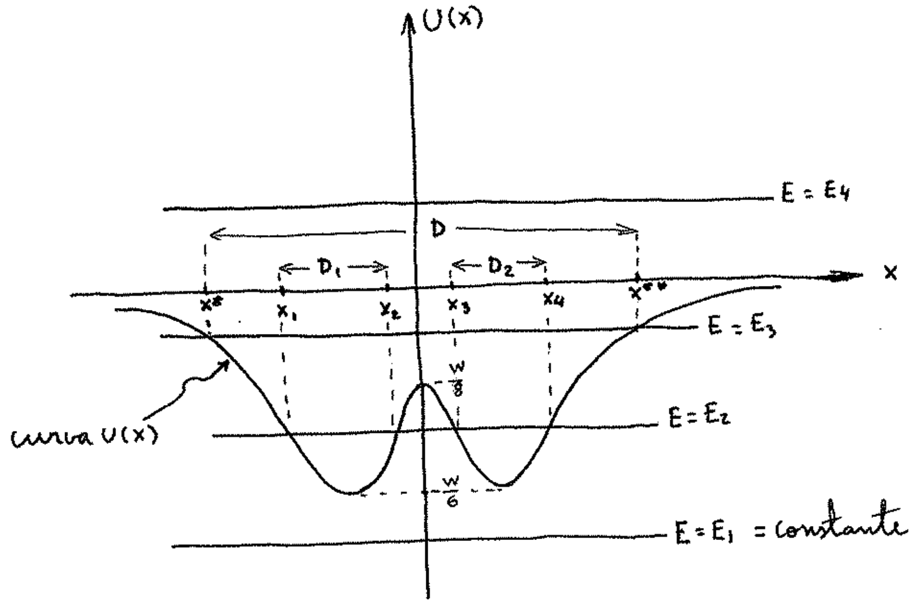


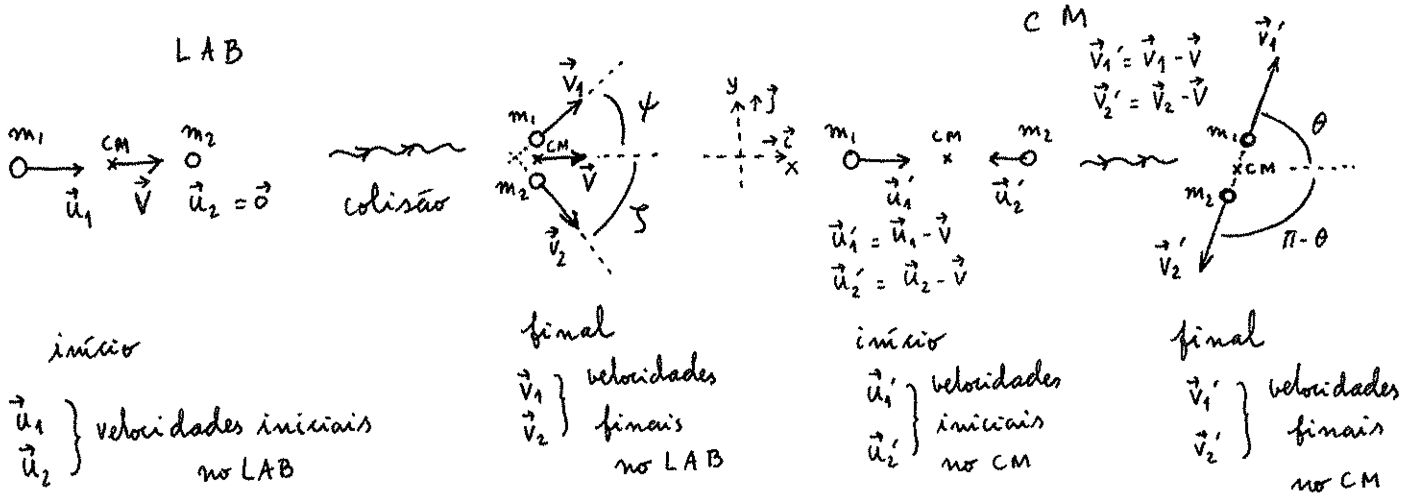
figura 1. Pontos de retorno : a) Para $E=E_2$: x_1 e x_2 ou x_3 e x_4.

b) Para $E=E_3$: x^* e x^{**}.

1.16.(9.6).1

Antes da abordagem do exemplo 9.6 de TM, vamos apresentar alguns resultados preliminares sobre a colisão de duas partículas de massas m_1 e m_2 no caso <u>elástico</u> (caso em que há conservação de energia, além do momento).

A figura abaixo explica as notações utilizadas, de acordo com TM. Consideraremos m_2 inicialmente <u>parada</u> no referencial do laboratório (LAB). No referencial CM (centro de massa) em que o centro de massa permanece em repouso, as duas massas vão ter velocidades iniciais não-nulas. Os dois referenciais são <u>inerciais</u>.



$\vec{V}$ = velocidade do CM no sistema LAB

$$= \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2^{\nearrow\vec{0}}}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{u}_1$$

$$= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \quad (1)$$

a velocidade do CM é a mesma no início e no final por conservação do momento. ISSO OCORRE MESMO SE A ENERGIA NÃO SE CONSERVA.

$\vec{V}'$ = velocidade do CM no sistema CM $= \vec{0}$

$$= \frac{m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2'}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'}{m_1+m_2} \quad (2)$$

figura 1: Colisão de m_1 com m_2 nos sistemas LAB e CM.

Não é muito difícil perceber que, no referencial CM, diferentemente do que ocorre no referencial LAB as partículas m_1 e m_2 terão sempre velocidades na mesma direção e <u>opostas</u>. Pela relação (2) isso fica claro, porque ela implica

$$m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_2' = \underbrace{-\frac{m_1}{m_2}}_{\substack{\text{escalar} \\ \text{negativo}}} \vec{u}_1 \quad (3)$$

e $m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2' = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \vec{V}_1'$ (4).

Devemos agora nos lembrar que se temos dois vetores $\vec{K}$ e $\vec{Q}$ relacionados por $\vec{Q} = -\lambda \vec{K}$, com $\lambda > 0$, esses vetores serão "opostos", na mesma direção (figura abaixo). Então, como na figura 1, $\vec{V}_1'$ e $\vec{V}_2'$ estarão "em oposição".

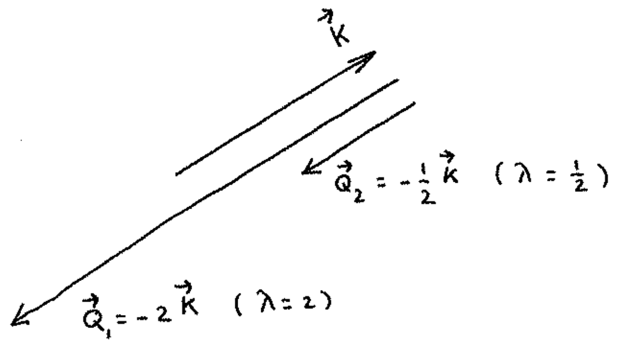


figura 2: Exemplos para $\vec{Q} = -\lambda \vec{K}$ com $\lambda > 0$.

Em termos de <u>módulos</u>, (3) e (4) implicam

$$|\vec{u}_2'| = \left| -\frac{m_1}{m_2} \vec{u}_1' \right| \Rightarrow u_2' = \frac{m_1}{m_2} u_1' \Rightarrow m_2 u_2' = m_1 u_1' \quad (5)$$

e $|\vec{V}_2'| = \left| -\frac{m_1}{m_2} \vec{V}_1' \right| \Rightarrow V_2' = \frac{m_1}{m_2} V_1' \Rightarrow m_2 V_2' = m_1 V_1'$ (6),

em que $u_2' = |\vec{u}_2'|$, $u_1' = |\vec{u}_1'|$, $V_2' = |\vec{V}_2'|$ e $V_1' = |\vec{V}_1'|$.

Considerando agora que a colisão é elástica, deve haver conservação da energia, inclusive no referencial CM.

Então escrevemos

$$\frac{m_1}{2} u_1'^2 + \frac{m_2}{2} u_2'^2 = \frac{m_1}{2} V_1'^2 + \frac{m_2}{2} V_2'^2 \quad (7).$$

Tendo em vista (5) e (6), (7) fica, sendo $u_2' = m_1 u_1' / m_2$ e $V_2' = m_1 V_1'/m_2$,

$$\frac{m_1}{2} u_1'^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 u_1'^2 = \frac{m_1}{2} V_1'^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m_2}\right) V_1'^2 ,$$

de onde

$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) u_1'^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) V_1'^2 \Rightarrow u_1' = V_1' \quad (8).$$

Também, substituindo (5) e (6) em (7) sendo $u_1' = m_2 u_2' / m_1$ e $V_1' = m_2 u_2' / m_1$, teremos

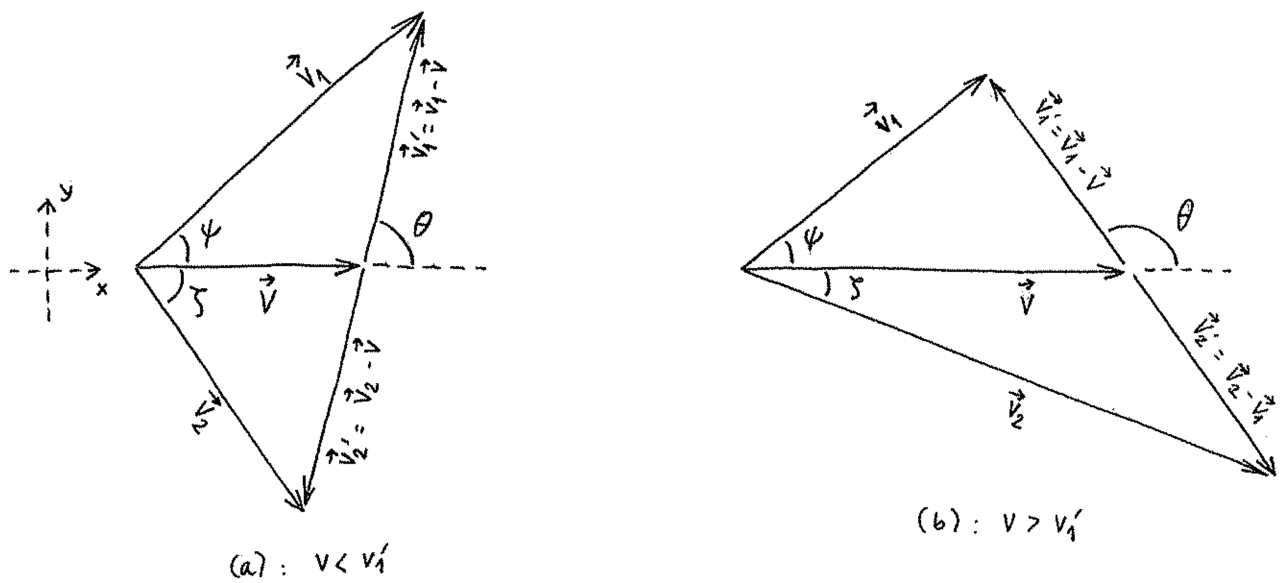
$$\frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 u_2'^2 + \frac{m_2}{2} u_2'^2 = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 V_2'^2 + \frac{m_2}{2} V_2'^2 \Rightarrow u_2' = V_2' \quad (9).$$

As relações (5) e (6), junto com (8) e (9), mostram que a descrição da colisão no sistema CM é relativamente simples, particularmente se a colisão é <u>elástica</u>, porque nesse caso o único processo, no referencial CM, foi um simples <u>desvio</u> das partículas, sem alteração nos módulos das velocidades.

Como as coisas devem ser observadas no referencial LAB, no qual a descrição do movimento não é tão simples, é interessante fazer os cálculos no referencial

1.16. (9.6).4

CM e realizar uma <u>transformação</u> dessas contas para o referencial LAB. Para isso faremos uso da figura abaixo (ver figura 9-11 de TM).



(a) : $V < V_1'$

(b) : $V > V_1'$

figura 3

Registramos na figura 3 os dois casos de geometria da colisão. Examinando o caso (a) da figura 3, podemos escrever

$$\begin{cases} V_1 \operatorname{sen}\psi = V_1' \operatorname{sen}\theta & (10) \\ V_1 \cos\psi = V + V_1' \cos\theta \Rightarrow V_1\cos\psi - V = V_1' \cos\theta & (11) \end{cases},$$

relacionando o ângulo ψ no sistema LAB ao ângulo θ no sistema CM e, para o ângulo ζ,

$$\begin{cases} V_2 \operatorname{sen}\zeta = V_2' \operatorname{sen}\theta & (12) \\ V = V_2\cos\zeta + V_2'\cos\theta \Rightarrow V - V_2\cos\zeta = V_2'\cos\theta & (13) \end{cases}$$

Como ficariam as relações (10), (11), (12) e (13) na geometria (b) da figura 3?

Por exemplo, por (10) e (11),

$$\frac{v_1 \operatorname{sen}\psi}{v_1 \cos\psi} = tg\,\psi = \frac{v_1' \operatorname{sen}\theta}{v_1'\cos\theta + V} \Rightarrow tg\,\psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{V}{v_1'}} \quad (14).$$

Ocorre que, por (8), $V/v_1' = V/u_1'$. Por outro lado, pela figura 1, $V = m_1 u_1/(m_1+m_2)$ e $u_1' = u_1 - V = u_1 - m_1 u_1/(m_1+m_2)$ $= m_2 u_1/(m_1+m_2)$. Então $V/v_1' = V/u_1' = m_1/m_2$ (15). Inserindo (15) em (14) temos

$$tg\,\psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \quad (15).$$

Usando (12) e (13), além de considerações do tipo das usadas para encontrar (15), obtemos

$$tg\,\zeta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{V}{v_2'} - \cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (16).$$

Retornando ao exemplo 9.6 de TM, ele pede o ângulo máximo de espalhamento ψ para $m_1 \gg m_2$ e $m_1 = m_2$ no caso da figura 3 (b) ($V > v_1'$) se entendemos $\vec{V}$ e v_1' dados.

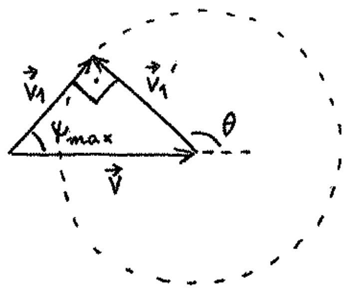


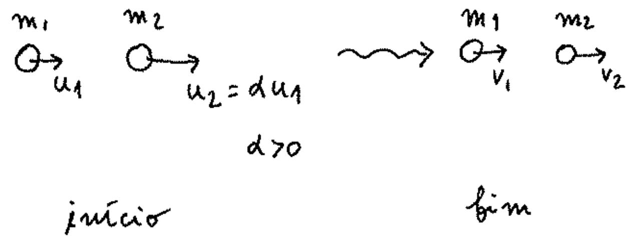
figura 4

A figura 4, caso especial da figura 3(b) sem referência ao ângulo ζ, considera $v_1' = |\vec{v}_1'|$ constante, representado por uma circunferência. Refletindo, você vai verificar que ψ_{max} deve corresponder à situação apresentada.

Temos, pela figura 4, $\operatorname{sen}\psi_{max} = \frac{v_1'}{V}$. Por (8), $v_1' = u_1'$ e, por (15), $(u_1'/V) = m_2/m_1$. Então $\operatorname{sen}\psi_{max} = m_2/m_1$ (17). Se $m_1 \gg m_2$, $\operatorname{sen}\psi_{max} = 0 \Rightarrow \psi_{max} = \pi$ ($\psi_{max} = 0$ não tem sentido). Se $m_1 = m_2$, $\psi_{máx} = \pi/2$.

1.16.(9.7).1

Na colisão elástica ao lado, frontal, sem desvio, pede-se a condição pela qual $V_1 = 0$. Supõe-se energias cinéticas iniciais iguais.



Momento: $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$ (1). Com $u_2 = \alpha u_1$ e se $V_1 = 0$ temos

$$(m_1 + \alpha m_2)\, u_1 = m_2 V_2 \quad (2).$$

Energia: $\dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} + \dfrac{m_2 V_2^2}{2}$, implicando

$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2$. Com $u_2 = \alpha u_1$ e $V_1 = 0$ temos

$$(m_1 + \alpha^2 m_2)\, u_1^2 = m_2 V_2^2 \quad (3).$$

Por (2) e (3),

$$\frac{(m_2 V_2)^2}{m_2 V_2^2} = \frac{(m_1 + \alpha m_2)^2 u_1^2}{(m_1 + \alpha^2 m_2) u_1^2} \Rightarrow \alpha = \frac{m_2 - m_1}{2 m_2} \quad (4) \text{ (mostre isso).}$$

Se as energias cinéticas iniciais são iguais,

$$\frac{m_1}{2} u_1^2 = \frac{m_2}{2} u_2^2 \Rightarrow m_1 u_1^2 = m_2 \alpha^2 u_1^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{m_1}{m_2} \quad (5).$$

Mostre agora que por (4) e (5) teremos $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

1.16.(9.9).1

O coeficiente de restituição é, numa colisão frontal (figura 1),

$$\epsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|} \quad (1).$$

Está implícito que tratamos da colisão de duas massas, m_1 e m_2. Devemos mostrar que na colisão <u>elástica</u> frontal $\epsilon = 1$.

figura 1.

Momento : $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$

Energia : $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad (2)$

De (1) temos $m_1(u_1 - v_1) = -m_2(u_2 - v_2) \quad (3)$ e de (2) temos $m_1(u_1^2 - v_1^2) = -m_2(u_2^2 - v_2^2) \quad (4)$. Então, de (3) e (4),

$$\frac{m_1(u_1 - v_1)}{m_1(u_1^2 - v_1^2)} = \frac{-m_2(u_2 - v_2)}{-m_2(u_2^2 - v_2^2)} \Rightarrow \frac{1}{u_1 + v_1} = \frac{1}{u_2 + v_2} \quad \text{ou}$$

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \quad (5).$$

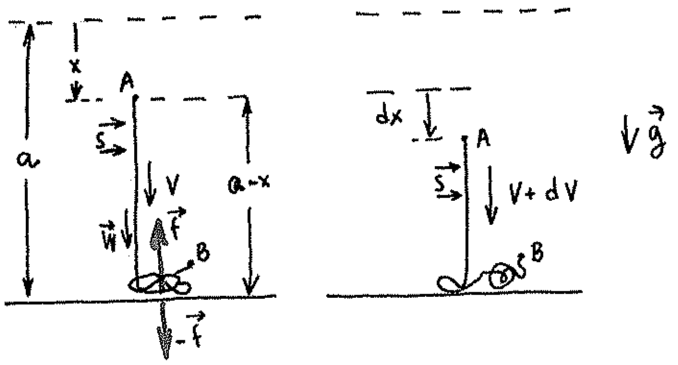
Tomamos (5) e (1) como um sistema, do qual temos

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (6), \quad v_2 = \frac{(m_2 - m_1)u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (7).$$

Entao, com (6) e (7),

$$\epsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|} = \frac{|u_1 - u_2|}{|u_2 - u_1|} = 1$$

1.16. (9.10). 1



instante t

instante t+dt

figura 1

A figura ao lado tenta representar a situação. a é o comprimento total da corda. Nos instantes t e t+dt retratamos duas configurações sucessivas. Sobre a corda atuam as forças $\vec{W}$ (peso) e $\vec{f}$ ("reação" do chão, cuja contrapartida de "ação e reação") é a força $-\vec{f}$ sobre o chão). W é o peso da corda, $\rho a g$ (ρ = densidade linear da corda), em módulo. Se $f = |\vec{f}|$, não ocorre o equilíbrio $f = W$, porque o segmento a-x da corda carrega uma quantidade de movimento variável, na medida em que x é variável. Como s, um segmento da corda que não está em contato com o chão, não está, hipoteticamente, "sob tensão" ou "sob tração", ele deve estar em queda livre. Então supomos que o ponto A da corda está em queda livre. Se a corda foi solta, temos $x = \frac{1}{2} g t^2$ (1). A variação de momento da corda será

$$dp = \rho(a-x-dx)(V+dV) - \rho(a-v)V = (W-f)dt = (\rho a g - f)dt \quad (2)$$

Desprezando o produto infinitesimal $dx\,dV$ e inserindo (1), que implica $dx = g t\, dt$ (3), em (2), teremos $f = -3\rho g x$.

1.16. (9.13)

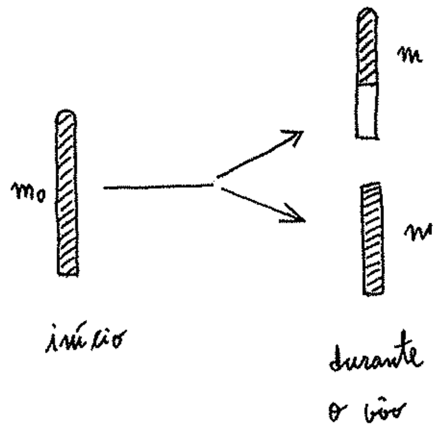


figura 1

Devemos analisar a ação da gravidade sobre um foguete no qual $\alpha = -\frac{dm}{dt}$ = constante é a taxa temporal de queima de combustível.

Na figura 1 temos m_0 = massa inicial do foguete = constante. Se m' é a massa do combustível expelido, após a queima, temos $m_0 = m + m'$. Então

$dm_0 = 0 = dm + dm' \Rightarrow dm = -dm'$ (1).

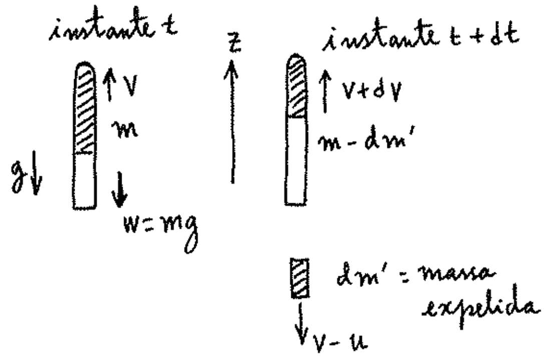


figura 2: Supomos u = velocidade com que os gases são expelidos em relação ao foguete = constante.

Pela figura 2 a variação de momento do sistema deve ser

$$dp = (m - dm')(V + dV) + dm'(V - u) - mV$$
$$= m\,dV - dm'V + dm'V - dm'u$$
$$= m\,dV - u\,dm' \quad (2),$$

desprezando produtos de infinitesimais.

Colocando (1) em (2) temos

$$dp = m\,dV + u\,dm \quad (3).$$

Supomos que a força peso (gravitacional) é a única atuante, de intensidade $W = mg$. Como essa força é contrária ao sentido z crescente, escrevemos, usando (3), $dp = m\,dV + u\,dm = -mg\,dt$. Definindo $\alpha = -\frac{dm}{dt}$ teremos

$$dV = \left(\frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m}\right)dm \Rightarrow V = \frac{g}{\alpha}(m - m_0) + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = \frac{dz}{dt} \quad (4).$$ Então,

considerando $\alpha = \frac{m_0 - m}{t} = -\frac{m - m_0}{t}$, teremos $z(t) = -\frac{gt^2}{2} - u\int_0^t \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right)dt$ (5).

1.17. (2.1). 1

a) Vamos, por simplicidade, neste e nos outros itens, supor um corpo de massa unitária ($m=1$). Se a força é $F(x,t) = f(x)\, g(t)$ temos

$$\frac{dv}{dt} = F(x,t) = f(x)\, g(t) \quad (1).$$

Não deve ser possível integrar (1), em geral, por meio de separação de variáveis. O melhor que podemos fazer, nesse sentido, é tomar a forma

$$\frac{dv}{f(x)} = g(t)\, dt \quad (2).$$

Embora o lado direito seja integrável, o esquerdo ainda não é.

Numa outra busca, procuramos escrever (1) na forma

$$dv - f(x)\, g(t)\, dt = 0 \quad (3).$$

Poderíamos pensar numa função $\psi(v,t,x)$ tal que

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial v} dv + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad \text{("superfícies" } \psi \text{ constante)} \ (4).$$

Comparando (4) e (3) ψ existiria se

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = 1 \ (5), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -f(x)\, g(t) \ (6) \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \ (7).$$

(7) implicaria ψ independente de x: $\psi = \psi(v,t)$ (8). Ocorre que isso é incompatível com (6), em geral.

Outra possibilidade, em princípio, seria considerar para (3) um fator integrante $\mu(v,t,x)$ tal que

$$\mu(v,t,x)\, dv - \mu(v,t,x)\, f(x)\, g(t)\, dt = 0 \quad (9).$$

Agora a comparação entre (9) e (4) nos daria

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \mu(v,t,x) \ (10), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mu(v,t,x)\, f(x)\, g(t) \ (11), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \ (12).$$

1.17. (2.1).2

(12) pode ser aplicada em (10) e (11):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\mu(v,t,x) = 0 \quad (13)$$

supondo diferenciabilidade

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu(v,t,x)\right] f(x)\, g(t) - \mu(v,t,x)\, f'(x)\, g(t) \quad (14).$$

Ocorre que (13) implica $\mu(v,t,x) = \mu(v,t)$ (independência com x) e, em (14), (13) implica

$$\mu(v,t)\, f'(x)\, g(t) = 0 \quad (15).$$

De maneira geral, esperamos que (15) seja possível para alguma $\mu(v,t) \neq 0$. Isso não parece em geral possível, a menos que tenhamos $f'(x) = 0$, o que é muito restritivo.

Essas considerações sobre a integrabilidade de (1) não implicam uma não integrabilidade geral se (1) é pensada como equação diferencial de 2ª ordem. Se $V = dx/dt$, (1) fica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\, g(t) \quad (16).$$

Como exemplo, $\frac{d^2x}{dt^2} = xt$ ($f(x) = x$, $g(t) = t$) é solúvel na forma $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+s}$, sendo uma equação de Airy. Em geral, no entanto, a equação <u>não</u> é linear para qualquer forma de $f(x)$, o que pode ser um complicador.

1.17. (2.1).3

(b) $F(\dot{x},t) = F(v,t) = f(\dot{x})\,g(t) = f(v)\,g(t)$. Nesse caso temos

$$\frac{dv}{dt} = f(v)\,g(t) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = g(t)\,dt \quad (1).$$

Sendo (1) integrável, em geral, a equação do movimento é integrável.

(c) $F(x,\dot{x}) = f(x)\,g(\dot{x}) \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = f(x)\,g(v) \quad (1).$

Reorganizamos (1):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = f(x)\,g(v);$$

$$\frac{v\,dv}{g(v)} = f(x)\,dx \quad (2).$$

(2) é integrável, e portanto a equação do movimento é integrável.

1.17.(2.2).1

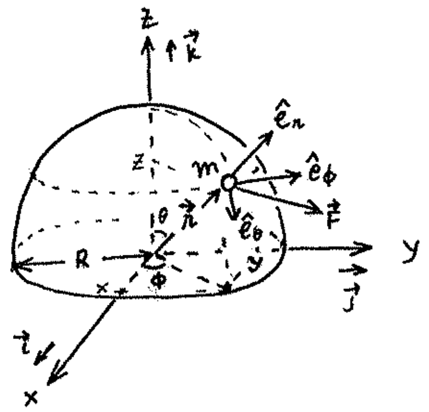


figura 1: partícula sobre uma esfera: $|\vec{r}| = R = r$

$\vec{F}(\theta,\phi) = \vec{F}$ é a força sobre a partícula, de massa m. $x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, $y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = r\cos\theta$.

Na figura 1 temos um esquema da situação. Temos, se $\vec{V}$ é a velocidade de m,

$$\vec{F} = F(\theta,\phi)\hat{e}_r + G(\theta,\phi)\hat{e}_\theta + H(\theta,\phi)\hat{e}_\phi = m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1).$$

Devemos então obter a aceleração $\frac{d\vec{V}}{dt}$ em coordenadas esféricas e aplicar o resultado a (1), no caso especial em que $|\vec{r}| = R$. Com a ajuda da própria figura 1, suspendendo a exigência $|\vec{r}| = R$, vamos então obter a aceleração em coordenadas esféricas.

Primeiramente,

$$\hat{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{i} + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k})}{\partial r}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}}{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi}_{\operatorname{sen}^2\theta(\underbrace{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi}_{1})} + \cos^2\theta}_{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}, \quad (2)$$

1.17.(2.2).2

$$\hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|} = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \,\vec{i} + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \,\vec{j} + r\cos\theta \,\vec{k}\right)}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|}$$

$$= \frac{r\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + r\cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} - r\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + r^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{k} \quad (3),$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|} = \frac{\frac{\partial}{\partial \phi}\left(r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \,\vec{i} + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \,\vec{j} + r\cos\theta \,\vec{k}\right)}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|}$$

$$= \frac{-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} + r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{j}}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi}_{r^2\operatorname{sen}^2\theta\,(\underbrace{\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi}_{=1})}}}_{r\operatorname{sen}\theta}} = -\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} \quad (4).$$

Com a ajuda de (2), (3) e (4) podemos encontrar $\frac{d\hat{e}_r}{dt}$, $\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$ e $\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$ em termos de $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$. Temos

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$= (\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\,\vec{i} + (\dot\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi + \dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\,\vec{j} - \dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$$

$$= \dot\theta\,\underbrace{(\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{k})}_{\hat{e}_\theta \text{ por } (3)} + \dot\phi\,\underbrace{(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{j})}_{\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\phi \text{ por } (4)}$$

$$= \dot\theta\,\hat{e}_\theta + \dot\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\phi \quad (5),$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j} - \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{k}\right) = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\phi \quad (6)$$

e $$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\mathrm{sen}\,\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}\right) = -\dot{\phi}\left(\cos\phi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j}\right) \quad (7)$$

Em analogia com os casos anteriores esperamos que $\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$ se expresse em termos de $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ porque, por (4) e (7), $\hat{e}_\phi \cdot \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = 0$. Por (2) e (3) temos

$$\hat{e}_r\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}^2\theta\cos\phi\,\vec{i} + \mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j} + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\vec{k}$$

e $$\hat{e}_\theta\cos\theta = \cos^2\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j} - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{k}.$$

Então, somando, $\hat{e}_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta = \cos\phi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j}$ (8). Por (7) e (8), então,

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta \quad (9).$$

Agora, para uma situação não restrita ao movimento sobre a esfera, temos, usando (5),

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\left(\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_\phi\right),$$

sendo a aceleração $\vec{a} = (d\vec{v}/dt)$ obtida numa segunda derivação.

Em nosso caso especial, com $|\vec{r}| = R$ constante, $\dot{r} = 0 = \dot{R}$ e portanto

$$\vec{r} = R\,\hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{v} = r\,\dot{\hat{e}}_r = R\left(\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_\phi\right) \quad (10).$$

1.17.(2.2).4

Derivando (10), usando (6) e (9)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = R\left(\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\,\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\,\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}\right)$$

$$= -R\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta\right)\hat{e}_r + R\left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta$$

$$+ R\left(2\dot{\phi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\right)\hat{e}_\phi \quad (11).$$

Voltando com (11) em (1) as três equações do movimento vão ficar

$$F(\theta,\phi) = -mR\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta\right) \quad (12),$$

$$G(\theta,\phi) = mR\left(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\right) \quad (13),$$

$$H(\theta,\phi) = mR\left(2\dot{\phi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\right) \quad (14).$$

1.17.(2.8).1

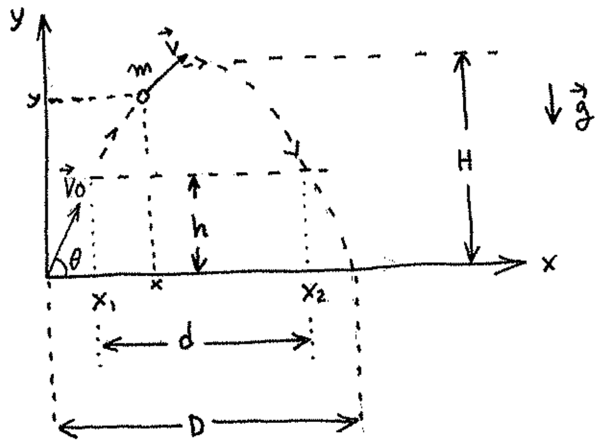


figura 1

Na figura 1 a partícula passa por dois pontos a uma mesma altura h. Pede-se para obter $d = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 4gh}$ no caso em que θ é ajustada para o máximo alcance D.

Para analisar as condições que nos dão o alcance máximo temos de partir de

$$\left.\begin{aligned} x &= V_0 \operatorname{sen}\theta\, t \quad (1) \\ y &= V_0 \cos\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$ que se obtém pela 2ª lei de Newton a uma massa m qualquer.

O alcance D corresponde a $y = 0$. Por (2),

$$V_0 \cos\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \quad (\text{"óbvia"}) \\ t = T = \dfrac{2 V_0 \cos\theta}{g} = \text{"tempo de vôo"} \ (3). \end{cases}$$

D corresponde ao valor de x quando $t = T$. Por (3),

$$D = x\,(t = T) = V_0 \operatorname{sen}\theta \,\frac{2 V_0 \cos\theta}{g} = \frac{2 V_0}{g} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \ (4).$$

Observe que, dado V_0, D é uma função de θ. Então, usando (4),

$$\frac{dD}{d\theta} = \frac{2V_0}{g}\,(\underbrace{\cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta}_{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}) = 0 \text{ na condição de máximo } D \ (5).$$

Então, para D máxima, devemos ter $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow$

$1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{2} = \cos\theta$ (6) $(\theta = 45°)$.

Agora (6) pode ser recolocada em (1) e (2), resultando

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\, t \quad (7)$$

e $$y = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\, t - \frac{1}{2}\, g t^2 \quad (8) .$$

De (7), $t = \sqrt{2}\, x / v_0$, com o que (8) fica $y = x - \frac{g}{v_0^2}\, x^2 \quad (9).$

Os pontos x_1 e x_2 na figura 1 correspondem a $y = h$. Por (9),

$$h = x - \frac{g}{v_0^2}\, x^2 \Rightarrow x^2 - \frac{v_0^2}{g}\, x + \frac{v_0^2 h}{g} = 0 \Rightarrow x = \frac{\frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 - 4\left(\frac{v_0^2}{g}\right) h}}{2} . \quad (10)$$

Ajudados pela figura 1, vemos que x_1 é a <u>menor</u> das raízes em (10) e x_2 é a maior:

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 4h \right)} \quad (11)$$

e $$x_2 = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 4h \right)} \quad (12) .$$

Então

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 4h \right)}$$

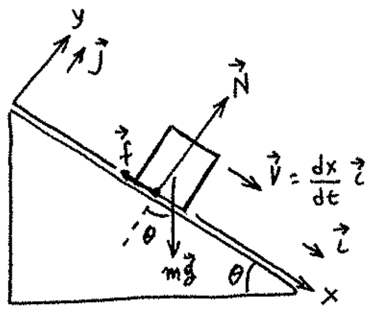
$$= \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \left(v_0^2 - 4gh \right)} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh} \quad (13).$$

1.17. (2.15).1

A figura 1, ao lado, nos serve de guia. Se o bloco percorre no eixo x uma distância d, partindo do repouso, pede-se para mostrar que

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{Kg \operatorname{sen}\theta}}$$

é o intervalo de tempo de percurso.



$f = |\vec{f}| = Kmv^2$

fig 1

As equações de newton são

$$-mg\cos\theta + N = 0 \quad (1) \quad (\text{eixo } y)$$

$$\text{e} \quad mg \operatorname{sen}\theta - Kmv^2 = m\frac{dv}{dt} \; (2) (\text{eixo } x).$$

Já que (1) apenas fixa N, somente (2) nos interessa. de (2),

$$\frac{dv}{dt} = g\operatorname{sen}\theta - Kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{g\operatorname{sen}\theta - Kv^2} = dt \Rightarrow \int_{\underbrace{v(t=0)=0}_{\text{repouso em } t=0}}^{t} \frac{dv}{g\operatorname{sen}\theta - Kv^2} = \int_0^t dt \; (3).$$

Como

$$I = \int \frac{dv}{g\operatorname{sen}\theta - Kv^2} = \frac{1}{2\sqrt{Kg\operatorname{sen}\theta}} \ln\left(\frac{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} + \sqrt{K}\,v}{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} - \sqrt{K}\,v}\right) \; (4),$$

(3) fica

$$\frac{1}{2\sqrt{Kg\operatorname{sen}\theta}} \ln\left(\frac{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} + \sqrt{K}\,v}{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} - \sqrt{K}\,v}\right) - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{Kg\operatorname{sen}\theta}} \ln\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta}}{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta}}}_{1}\Bigg)}_{\ln 1 = 0 \; (I \text{ em } v=0)} = \int_0^t dt = t \; ;$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} + \sqrt{K}\,v}{\sqrt{g\operatorname{sen}\theta} - \sqrt{K}\,v}\right) = 2\sqrt{Kg\operatorname{sen}\theta}\; t \quad (5)$$

1.17. (2.15).2

(5) deve ser elaborada para obtermos $v(t)$. Se $\ln a = b$, $e^b = a$.
aplicando isso a (5) teremos

$$\frac{\sqrt{g \,\text{sen}\,\theta} + \sqrt{K}\, v}{\sqrt{g \,\text{sen}\,\theta} - \sqrt{K}\, v} = e^{2\sqrt{Kg \,\text{sen}\,\theta}\, t} \quad (6),$$

de onde

$$\sqrt{g \,\text{sen}\,\theta} + \sqrt{K}\, v = \sqrt{g\,\text{sen}\,\theta}\; e^{2\sqrt{Kg \,\text{sen}\,\theta}\, t} - \sqrt{K}\, v\, e^{2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t} \;;$$

$$\sqrt{K}\, v \left(1 + e^{2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t}\right) = \sqrt{g\,\text{sen}\,\theta}\left(e^{2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t} - 1\right) \;;$$

$$v = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{K}}\; \frac{e^{2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t} - 1}{e^{2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t} + 1} = v(t) \quad (7).$$

Uma possível forma conveniente de expressar (7) usa as definições de seno e coseno hiperbólicos, senh e cosh. Temos

$$\left.\begin{aligned} \text{senh}\,\epsilon &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\epsilon} - e^{-\epsilon}\right) \\ \cosh \epsilon &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\epsilon} + e^{-\epsilon}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{tangente hiperbólica de } \epsilon = \tanh \epsilon = \frac{\text{senh}\,\epsilon}{\cosh \epsilon} = \frac{e^{\epsilon} - e^{-\epsilon}}{e^{\epsilon} + e^{-\epsilon}}.$$

Rearranjando,

$$\text{tgh}\,\epsilon = \frac{e^{-\epsilon}\left(e^{2\epsilon} - 1\right)}{e^{-\epsilon}\left(e^{2\epsilon} + 1\right)} = \frac{e^{2\epsilon} - 1}{e^{2\epsilon} + 1} \quad (8).$$

Usando (8) em (7) teremos, com $2\epsilon = 2\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\, t$,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{K}}\; \text{tgh}\left(\sqrt{Kg\,\text{sen}\,\theta}\; t\right) \quad (9).$$

Agora

1.17. (2.15). 3

$$dx = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\theta}{K}}\ \text{tgh}\left(\sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) dt \Rightarrow x(t) = \int_0^t dx = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\theta}{K}} \int_0^t \text{tgh}\left(\sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) dt \quad (10).$$

Agora,

$$\int \text{tgh}\ \gamma t\ dt = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\cosh \gamma t\right) \quad (11).$$

Aplicando (11) em (10) teremos

$$x(t) = \sqrt{\frac{g\,\text{sen}\theta}{K}}\ \frac{1}{\sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}} \left[\ln\left(\cosh \sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) - \ln\left(\underbrace{\cosh 0}\right) \right];$$

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1 \therefore$$

$$\ln \cosh 0 = \ln 1 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{K} \ln\left(\cosh \sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) \quad (12).$$

(12), com $x = d$, corresponde ao resultado desejado. Prova:

$$x = \frac{1}{K} \ln\left(\cosh \sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) \Rightarrow \ln\left(\cosh \sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) = xK = Kd$$

$$\Rightarrow e^{Kd} = \cosh\left(\sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t\right) \Rightarrow \sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}\ t = \cosh^{-1}\left(e^{Kd}\right);$$

se $\alpha = \cosh \epsilon$, $\epsilon = \underbrace{\text{arcosh}\ \alpha}_{\text{"arco coseno hiperbólico"}} = \cosh^{-1} \alpha$

$$t = \frac{\cosh^{-1}\left(e^{Kd}\right)}{\sqrt{Kg\,\text{sen}\theta}} \quad (13).$$

1.17. (2.25). 1

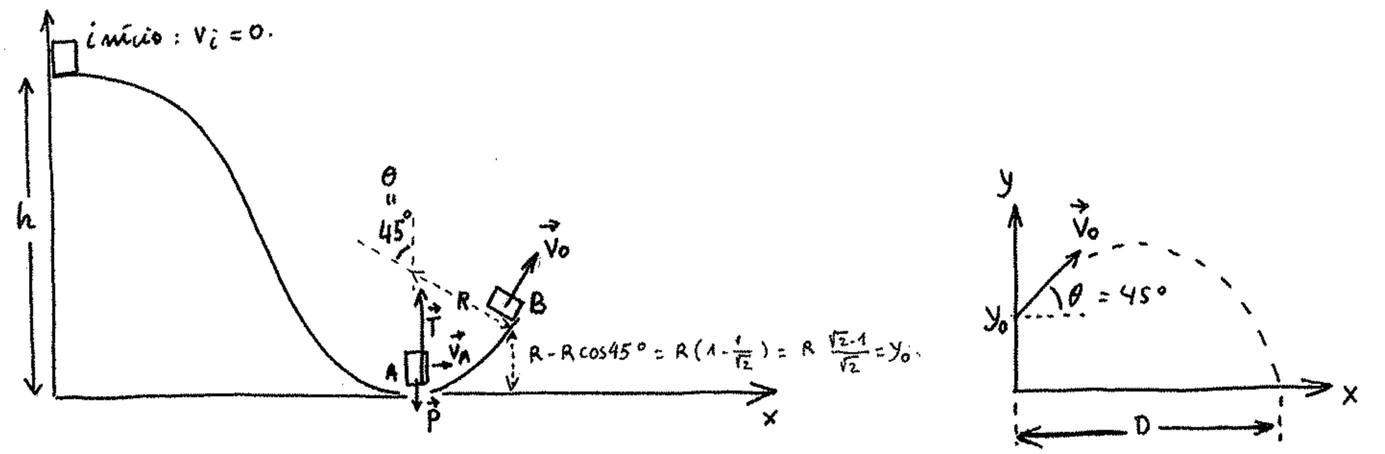


figura 1 (a) (b)

A figura 1 representa o que ocorre. Deduza primeiro relações para depois colocar dados oferecidos pelo problema.

a) Obtenha a força (em intensidade) T na posição A usando

$$mgh = m\frac{v_A^2}{2} \quad (1) \qquad e \qquad T - P = m\frac{v_A^2}{R} \quad (2)$$

b)

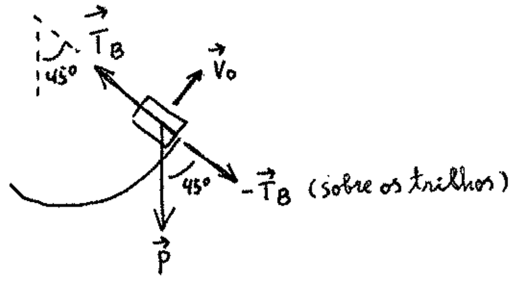


figura 2

Agora $T_B - p\cos 45° = m\frac{v_0^2}{R}$ (3)

e $mgh = \frac{m}{2}v_0^2 + mgy_0$ (4),

de onde obtemos T_B.

c) Usar (4)

d) Calcule D usando a condição $y = 0$ nas equações

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen}\theta\, t \quad (5)$$

$$e \quad x = v_0\cos\theta\, t \quad (6)$$

substituindo t, por (6), em (5).

e)

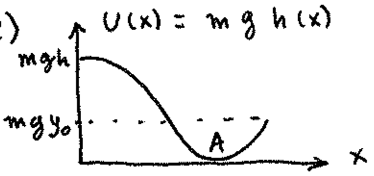
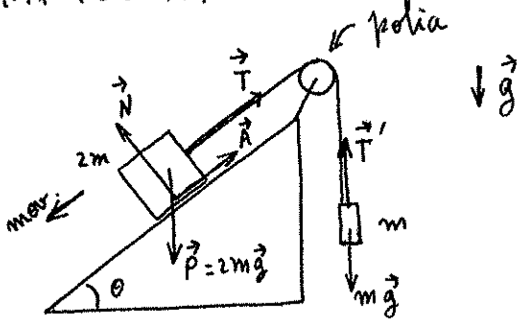


figura 3

A é um ponto de equilíbrio estável. Qual o de equilíbrio instável?

1.17. (2.32).1



Se $T = |\vec{T}|$ e $T' = |\vec{T}'|$, desprezado o momento de inércia da polia, temos $T = T'$. $\vec{A}$ = atrito

figura 1

Na figura 1 estamos supondo um movimento no sentido dado. Porém, pelas condições do problema, ainda não há um movimento e a aceleração é nula. Agora, como estamos no limiar do movimento, $A = |\vec{A}|$ deve ser máxima: $A = \mu_K N$, sendo μ_K = coeficiente de atrito estático.

As equações são

$$\text{para } 2m \left\{ \begin{array}{l} 2mg\,\text{sen}\,\theta - T - \mu_K N = 0 \quad (1) \\ 2mg\cos\theta = N \quad (2) \end{array} \right\} \text{e, para } m,\ T = mg \quad (3)$$

Colocando (2) e (3) em (1) temos

$$2mg\,\text{sen}\,\theta - mg - \mu_K\, 2mg\cos\theta = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\theta - 1 - 2\mu_K\cos\theta = 0 \quad (4)$$

(4) é uma equação para os possíveis valores de θ correspondentes à situação. De (4),

$$2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 2\mu_K\cos\theta \Rightarrow (2\,\text{sen}\,\theta - 1)^2 = (2\mu_K)^2\cos^2\theta = 4\mu_K^2\underbrace{(1-\text{sen}^2\theta)}_{\cos^2\theta = 1-\text{sen}^2\theta}, \text{ ou}$$

$4(1+\mu_K^2)\,\text{sen}^2\theta - 4\,\text{sen}\,\theta + (1-4\mu_K^2) = 0$ (equação de 2º grau para $x = \text{sen}\,\theta$) $\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{1 \pm \mu_K\sqrt{3+4\mu_K^2}}{2(1+\mu_K^2)}$. Então há dois valores possíveis para θ. Como é a figura de forças para o menor θ?

a) Situação na figura ao lado

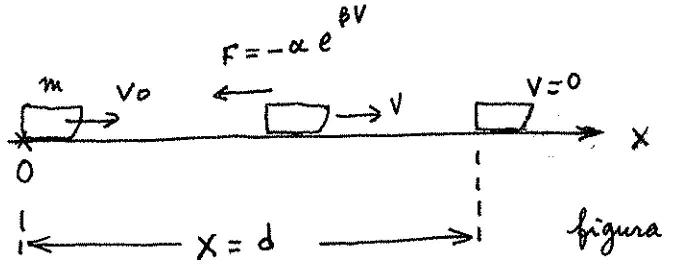


figura 1

Na figura temos três momentos: o lançamento inicial, uma posição intermediária, em que se indica o sentido da força, e uma posição final correspondente à parada do barco, quando sua velocidade cai a zero, em $x = d$. Curiosamente, a expressão $F = -\alpha\, e^{\beta V}$ nos dá uma força $F = -\alpha$, finita, com $V = 0$. Para recobrar um mínimo de realismo, vamos supor que quando $V = 0$ a força "colapsa" para 0, fazendo com que o barco não mais se mova.

Eliminadas outras forças na direção perpendicular a $\overline{OX}$, a segunda lei de Newton nos dá

$$m \frac{dV}{dt} = F = -\alpha e^{\beta V} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{\alpha}{m} e^{\beta V} \Rightarrow \frac{dV}{e^{\beta V}} = -\frac{\alpha}{m} dt$$

$$\Rightarrow e^{-\beta V} dV = -\frac{\alpha}{m} dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} e^{-\beta V} dV = -\frac{\alpha}{m} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\left.\frac{e^{-\beta V}}{-\beta}\right|_{V_0}^{V} = \frac{e^{-\beta V}}{-\beta} - \frac{e^{-\beta V_0}}{-\beta} = -\frac{\alpha}{m} t \Rightarrow e^{-\beta V} = e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-\beta V}\right) = \ln\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t\right) \Rightarrow -\beta V = \ln\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t\right)$$

$$\Rightarrow V = V(t) = -\frac{1}{\beta} \ln\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t\right) \quad (1).$$

Você pode mostrar que, como desejado, $V(t=0)$ em (1) é V_0?

1.17. (2.39).2

b) O instante $t = T$ no qual o corpo pára, como dissemos, deve corresponder a $v = 0$. Temos, por (1)

$$v(t=T) = -\frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}T\right) = 0 \quad \text{se} \quad e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}T = 1,$$

pois $\ln 1 = 0$. Então

$$e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}T = 1 \Rightarrow T = \frac{m}{\alpha\beta}\left(1 - e^{-\beta v_0}\right) \quad (2).$$

Note que o gráfico de $v(t)$ deve corresponder, em esboço, ao que está abaixo.

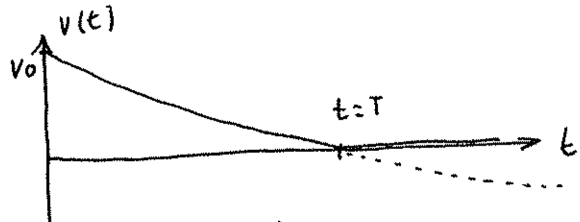


figura 2

O pontilhado corresponde ao que seria a continuidade da função $v(t)$, irrealista, para $t > T$. Assumimos então que $v(t) = 0$ se $t > T$. Você pode explicar a razão pela qual $v(t)$, por (1) é negativa para $t > T$. A que corresponderia isso?

c)
$$d = \int_0^T v(t)\, dt \qquad (\text{por que?})$$

Por (1),

$$d = \int_0^T -\frac{1}{\beta}\ln\left(e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}t\right)dt = -\frac{1}{\beta}\int_0^T \ln\left(e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}t\right)dt. \quad (3)$$

Devemos obter

$$I = \int \ln\left(e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}t\right)dt \quad (4).$$

Chamamos $z = e^{-\beta v_0} + \frac{\alpha\beta}{m}t$, com o que $dz = \frac{\alpha\beta}{m}dt \Rightarrow dt = \frac{m}{\alpha\beta}dz$. Então

1.17 . (2.39) . 3

$$I = \int \ln z \ \frac{m}{\alpha\beta} dz = \frac{m}{\alpha\beta} \int \ln z \, dz .$$ Se nos é <u>dado</u> que

$$\int \ln z \, dz = z \ln z - z \qquad (\text{por que?}) ,$$

temos

$$I = \frac{m}{\alpha\beta} (z \ln z - z) = \frac{m}{\alpha\beta} \left[\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t \right) \ln \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t \right) - \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} t \right) \right] (5).$$

Levando (5) em (3) teremos

$$d = -\frac{1}{\beta} \frac{m}{\alpha\beta} \Bigg[\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} T \right) \ln \overbrace{\left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} T \right)}^{\text{por (2) isso é 1 e } \ln 1 = 0} - \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} T \right)$$

$$- \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} \cdot 0 \right) \ln \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} \cdot 0 \right) + \left(e^{-\beta V_0} + \frac{\alpha\beta}{m} \cdot 0 \right) \Bigg]$$

$$= -\frac{m}{\alpha\beta^2} \left[- e^{-\beta V_0} - \frac{\alpha\beta}{m} T - e^{-\beta V_0} \overbrace{\ln \left(e^{-\beta V_0} \right)}^{\text{por definição de ln, isso é } -\beta V_0} + e^{-\beta V_0} \right]$$

$$= -\frac{m}{\alpha\beta^2} \left[-\frac{\alpha\beta}{m} T + \beta V_0 e^{-\beta V_0} \right] \quad (6).$$

Colocando (2) em (6) temos

$$d = -\frac{m}{\alpha\beta^2} \left[-\frac{\alpha\beta}{m} \frac{m}{\alpha\beta} \left(1 - e^{-\beta V_0} \right) + \beta V_0 e^{-\beta V_0} \right] = \frac{m}{\alpha\beta^2} \left[1 - e^{-\beta V_0} (1 + \beta V_0) \right] \quad (7).$$

1.17.(2.43).1

A partícula (massa m) está sob a ação de uma força

$$F = -kx + \frac{k}{\alpha^2}x^3 \quad , \quad k > 0 \quad (1).$$

Pede-se o levantamento do gráfico de $U(x)$ (esboço) e a discussão dos possíveis movimentos.

Se $F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F(x)\,dx$, temos (calcule!)

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{4\alpha^2}x^4 \quad (2).$$

Em (2) a constante de integração é anulada por conveniência.

Para o esboço do gráfico de $U(x)$, alguns passos são recomendáveis. Vamos sugerir aqui cinco passos, aplicáveis em geral a qualquer função $U(x)$ e que serão usados em (2):

a) Busca de zeros de $U(x)$, ou seja, valores de x tais que $U = 0$.

Em nosso caso, $U(x) = 0$ se $x = 0$, $x = -\alpha\sqrt{2}$ e $x = \alpha\sqrt{2}$ (calcule!).

b) Busca de extremos de $U(x)$. Geralmente, isso pode ser feito, ao menos em parte, pela equação

$$\frac{dU}{dx} = 0 .$$

Em nosso caso, $\frac{dU}{dx} = -F = 0$ nos pontos $x = 0$, $x = \alpha$ e $x = -\alpha$.

Em muitos casos, saberemos se o extremo encontrado é máximo ou mínimo, respectivamente, se $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ ou se $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ no extremo.

1.17. (2.43). 2

Em nosso caso $\frac{d^2U}{dx^2} = k - \frac{3k}{\alpha^2}x^2$. Então o extremo $x=0$ é tal que $\frac{d^2U}{dx^2} = k > 0$ sendo então esse extremo um mínimo. Para $x = \pm\alpha$, $\frac{d^2U}{dx^2} = -2k < 0$, fazendo com que esses extremos sejam máximos.

c) Busca de pontos singulares em que $U(x)$ não é bem definida ou é descontínua.

Em nosso caso $U(x)$ não tem singularidades.

d) Busca de assíntotas.

Em nosso caso $U(x)$ não tem assíntotas.

e) Comportamento em "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$".

Em nosso caso, para $x \to \pm\infty$, $-\frac{k}{4\alpha^2}x^4$ deve predominar sobre $\frac{k}{2}x^2$. Esperamos então "$U(x) \to -\infty$" com $x \to \pm\infty$.

É comum que esses cinco procedimentos sejam suficientes para um bom esboço de $U(x)$. Em nosso caso eles resultam na figura abaixo.

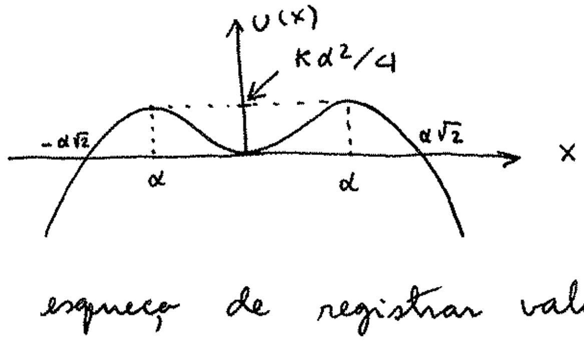


figura 1

Não se esqueça de registrar valores de $U(x)$ nos pontos focalizados pelo procedimento. Em particular, encontre $U(x)$ nos extremos.

Agora que $U(x)$ está construída, o problema pode ser pensado em termos mais físicos. $U(x)$ representa forças sobre o corpo, representado abaixo por um carrinho.

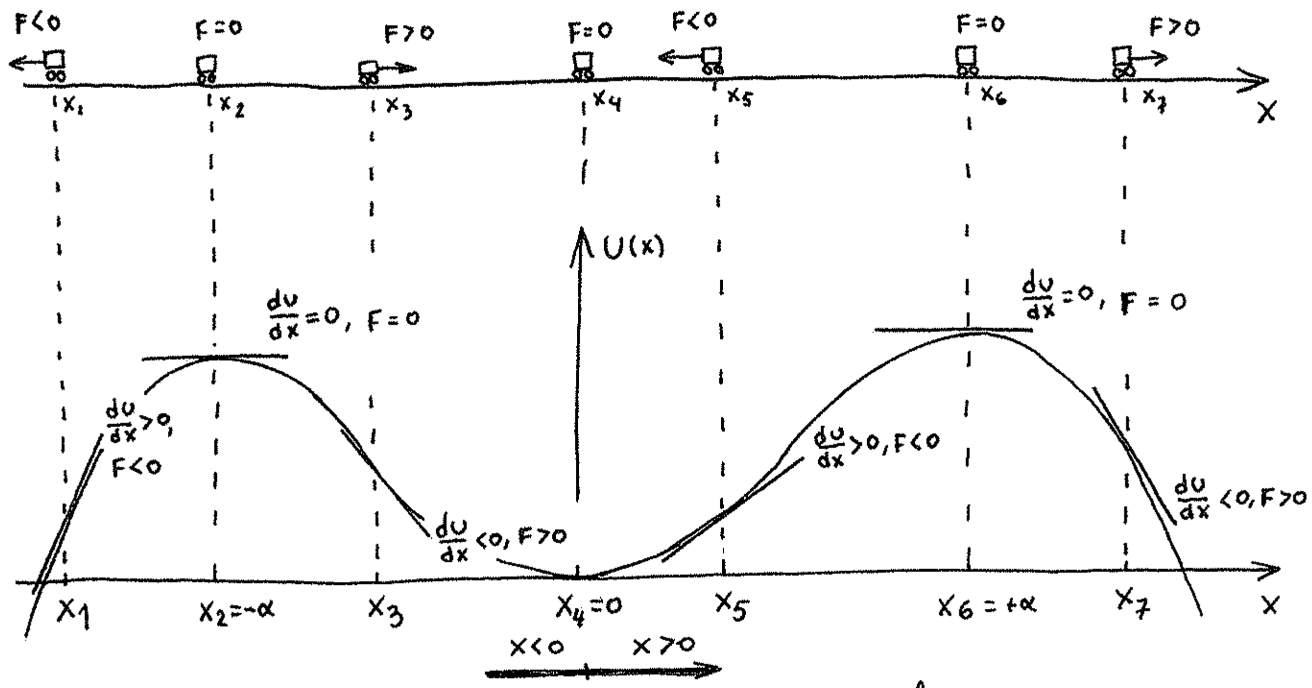


figura 2

Na figura acima o carrinho e as forças a ele aplicadas são "reais" e a curva $U(x)$ é "teórica". Note que $F>0$ no sentido "x crescente" e $F<0$ no sentido "x decrescente". Como $F=-(dU/dx)$, F e (dU/dx) tem sinais contrários. Por isso, por exemplo, em x_1, $dU/dx>0$ e portanto $F<0$. Os extremos de U, x_2, $x_4=0$ e x_6 são pontos com $F=0$, isto é, são pontos de equilíbrio.

$x_2 = -\alpha$ e $x_6 = +\alpha$ são pontos de equilíbrio instáveis porque, por exemplo, as forças em x_1 e x_3, nas proximidades de x_2, tendem a afastar o corpo do ponto de equilíbrio, x_2. Já $x_4 = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, pois as forças nas proximidades desse ponto (x_3 e x_5, por exemplo) tendem a reaproximar o corpo do ponto de equilíbrio. Então

$$U(x) \text{ é } \begin{cases} \text{máxima em pontos de equilíbrio instável.} \\ \text{mínima em pontos de equilíbrio estável.} \end{cases}$$

Observe que o corpo poderia oscilar em torno de $x = 0$, o ponto de equilíbrio estável.

Vejamos agora as coisas sob o aspecto energético.

Como E = energia = $\frac{m}{2} v^2 + U(x)$ = constante, temos

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{\substack{\text{quantidade} \\ \text{necessariamente} \\ \text{positiva ou} \\ \text{nula}}} = E - U(x) \quad (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E - U(x) \geq 0 \text{ ou} \\ E \geq U(x) \quad (4) \end{array}$$

em pontos acessíveis à partícula no seu movimento dada uma energia E.

Note, por (3), que

$v = 0$ quando $E = U(x)$ (6).

O que está dito acima pode ser sintetizado por meio de um gráfico, em que superpomos $U(x)$ com a "curva" $E = E(x) =$ constante (reta paralela ao eixo x). (Note que E = constante está dada pelas condições iniciais x_0 e v_0: $E = \frac{m}{2}v^2 + U(x) = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$).

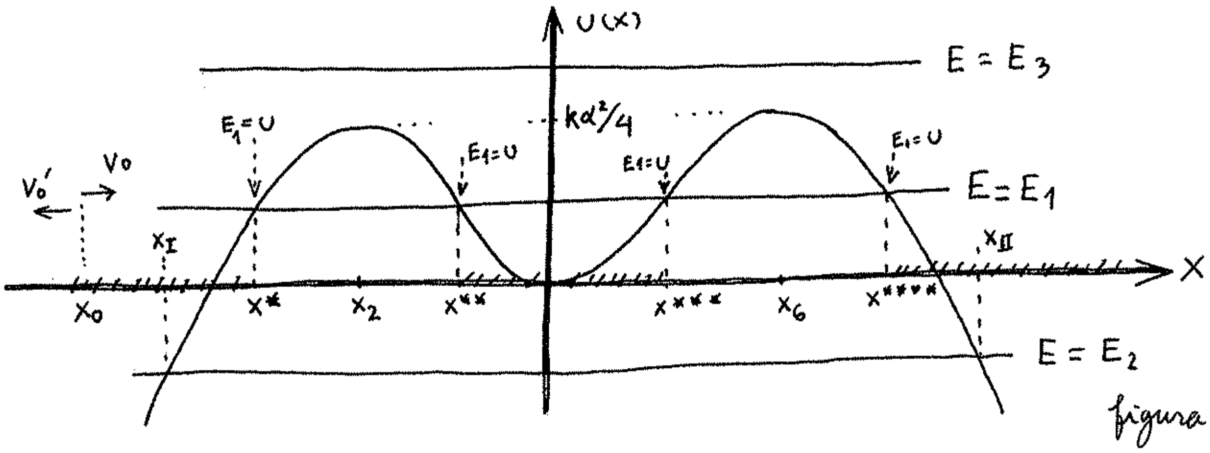


figura 3

Vamos fixar nossa atenção na possível energia $E = E_1$. Estão hachuradas as regiões em que $E = E_1 \geq U$, ou seja, as regiões possíveis para o movimento. Então, por exemplo, se dizemos que a energia é E_1, o corpo automaticamente não pode, de forma alguma (classicamente), estar em posições como x_2 e x_6, em que $E < U$. Suponhamos agora, com $E = E_1$, que as condições iniciais sejam $x_0 < x^*$, numa velocidade inicial tal que $E = E_1 = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$. Nesse caso se, por exemplo, $v_0 > 0$ como na figura, a velocidade se anulará em $x = x^*$ (eq(6)) de forma que a partícula não "subirá o morro de $U(x)$"

até uma posição como x_2: x^* será a máxima aproximação, e o corpo retornará, se afastando ilimitadamente no sentido $x \to -\infty$. O movimento será ilimitado e $x = x^*$ será o ponto de retorno. De forma semelhante $x \geq x^{****}$ é uma região de x acessível com $E = E_1$ num movimento ilimitado com x^{****} sendo um ponto de retorno, com velocidade nula. Observe também que nas regiões de movimento ilimitado o corpo pode não chegar a se aproximar do ponto de retorno. Se, por exemplo, a velocidade inicial em x_0, na figura, for $v_0' = -v_0$, o corpo simplesmente vai se afastar para $x \to -\infty$, sem se aproximar de x^*.

Se a energia for $E = E_1$ e as condições iniciais forem tais que x_0 esteja entre x^{**} e x^{***} (pontos de retorno com $v = 0$ e $E = E_1 = U$) o movimento será de oscilação entre x^{**} e x^{***} (observe as forças nos pontos x_3 e x_5 da figura 2).

Agora, a energia poderia ser, em condições iniciais específicas, $E = E_2$ na figura 3. Nesse caso, apenas movimentos ilimitados com $x < x_I$ ou $x > x_{II}$ seriam possíveis. x_I e x_{II} são agora os pontos de retorno.

1.17 . (2.43) . 7

Se a energia for $E = E_3$ não há pontos de retorno: todos os valores de x são acessíveis e o movimento é totalmente ilimitado.

Note que se a energia for $E = k\,\alpha^2/4$, x_2 e x_6 são pontos de velocidade nula mas não são exatamente de retorno, porque o movimento é totalmente ilimitado.

Finalmente observe o seguinte: para pontos <u>muito próximos</u> de $x=0$ o termo $\frac{1}{2}kx^2$ predomina sobre $-\frac{kx^4}{4\alpha^2}$.

Então o movimento oscilatório com $E > 0$ e E <u>pequena</u> equivale ao de um oscilador harmônico com $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$ (2ª lista, questão 1) e o movimento terá frequência $\omega = \sqrt{k/m}$. Veja a figura abaixo.

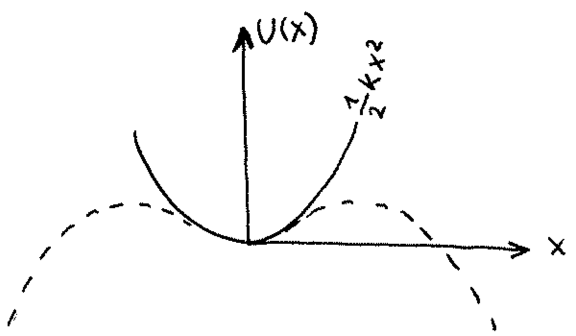


figura 4

Em geral, se $x = a$ é um mínimo de $U(x)$ podemos, em virtude da expansão $U(x) = U(a) + \frac{dU}{dx}\Big|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a}(x-a)^2 + \dots$, aproximar $U(x)$ por $U(x) = U(a) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x-a)^2$, com o que oscilações próximas de $x = a$ (ponto de equilíbrio estável, mínimo de $U(x)$), por analogia com $U(x) = U(a) + \frac{K}{2}(x-a)^2$, que nos dá a força "restauradora" $F = -\frac{dU}{dx} = -k(x-a) = -K\,\Delta x$, terão frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{(d^2U/dx^2)|_{x=a}}{m}} \quad (7).$$

Veja abaixo a figura ilustrativa do que estamos discutindo.

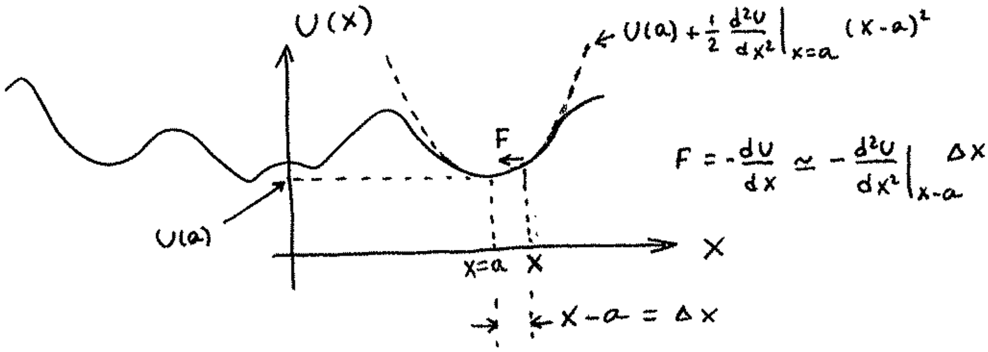


figura 5

Observe que na figura 5 outros máximos e mínimos existem. Pequenas oscilações em torno desses outros mínimos teriam outras frequências compatíveis com a expressão (7).

1.17. (2.47).1

Com os dados $a = 2\,m$ e $U_0 = 2\,J$, temos $U(x) = 2\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$.

usando métodos semelhantes aos expostos na questão 2.43 temos

* Se x é pequeno, $\frac{2}{x}$ predomina sobre $\frac{x}{2}$ e $U(x) \approx 2\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{4}{x}$. Quando $x \to 0$, $U(x) \to +\infty$. Se x é grande, $\frac{x}{2}$ predomina sobre $\frac{2}{x}$ e $U(x) \approx 2\left(\frac{x}{2}\right) = x$.

* Zeros de $U(x)$: $U(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{x}{2} = \frac{4+x^2}{2x} = 0$. Não há zeros reais de $U(x)$.

* Extremos de $U(x)$: $\frac{dU}{dx} = 2\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}\right)$. Então $\frac{dU}{dx} = 0$ para $x = \pm 2$. Como apenas $x > 0$ interessa, $x = 0$ é o ponto de extremo (equilíbrio). Como $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{8}{x^3}$, $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=2} = \frac{8}{2^3} = 1$. Sendo $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ no extremo, o extremo é um mínimo de $U(x)$. O ponto de equilíbrio $F = -\frac{dU}{dx} = 0$ é portanto estável.

Com as informações acima, $U(x)$ tem o esboço abaixo.

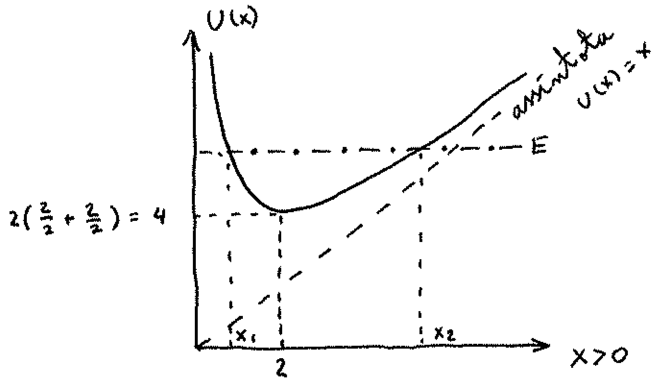


figura 1

Note que só é possível o movimento se $E \geq 4\,J$ e que ele será sempre de oscilação entre pontos de retorno x_1 e x_2, como indicados.

1.17. (2.52).1

$U(x) = U_0 \left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right]$, $U>0$, $a>0$. Usamos os métodos da questão 2.43.

a) $F(x) = -\frac{dU}{dx} = U_0 \left[-4\frac{x}{a^2} + \frac{4x^3}{a^4} \right] = 4U_0 \left[-\frac{x}{a^2} + \frac{x^3}{a^4} \right]$.

b)

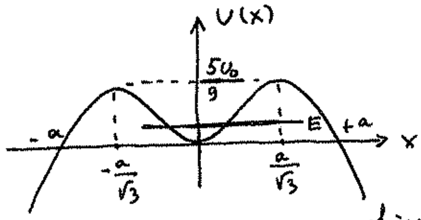


figura 1

$x=0$: ponto de equilíbrio estável

$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$: pontos de equilíbrio instável.

c) Expansão de Taylor em torno de $x = x_\alpha$:

$$U(x) = U(x_\alpha) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_\alpha} (x - x_\alpha) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_\alpha} (x - x_\alpha)^2 + \cdots \quad (1).$$

Num ponto x_α de equilíbrio, $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_\alpha} = 0$. Então, nas proximidades de um ponto de equilíbrio (1) fica, <u>até a ordem</u> $(x-x_\alpha)^2$, $\theta((x-x_\alpha)^2)$,

$$U(x) = U(x_\alpha) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_\alpha} (x-x_\alpha)^2 \quad (2)$$

No caso, o ponto de equilíbrio estável é $x_\alpha = 0$, com $U(x_\alpha = 0) = 0$. Como

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_0 \left[\frac{4}{a^2} - \frac{12x^2}{a^4} \right] , \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x = x_\alpha = 0} = \frac{4U_0}{a^2} \quad (3).$$

Colocando (3) em (2) temos

$$U(x) = 0 + \frac{1}{2}\frac{4U_0}{a^2}(x-0)^2 \Rightarrow U(x) = \frac{2U_0}{a^2}x^2$$ (nas proximidades de $x=0$)(4).

Ocorre que (4) é semelhante a $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$, a energia potencial de um oscilador harmônico, se $\frac{1}{2} k = \frac{2U_0}{a^2} \Rightarrow k = \frac{4U_0}{a^2}$ (5). Então, se m é a massa da partícula em questão, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(4U_0/a^2)/m} = \sqrt{4U_0/a^2 m}$ será a frequência das oscilações com energia E pequena (figura 1).

d) Pela figura 1, se a partícula é lançada de $x=0$ com velocidade v_e (velocidade de escape), digamos para a direita, sua energia deve ser no mínimo $E = 5U_0/9$. Temos

$$E = \frac{5}{9} U_0 = \frac{m}{2} v_e^2 + \underbrace{U(x=0)}_{=0} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{10U_0}{9m}}.$$

e) Podemos obter $x(t)$ da conservação da energia assim procedendo:

$$E = \frac{5}{9} U_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right]$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right] \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - U_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right]\right\}}$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - U_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right]\right\}}} = t.$$

1.17 (2.53).1

Se a questão é colocada em coordenadas cartesianas, convém que se calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, porque caso $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$ a força não é conservativa. Obter o rotacional em coordenadas não-cartesianas é possível mas pode ser trabalhoso.

a) $\vec{F} = (ayz + bx + c,\ axz + bz,\ axy + by)$

Temos
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ayz+bx+c & axz+bz & axy+by \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}\,(ax+b-(ax+b)) + \vec{\jmath}\,(ay-ay) + \vec{k}\,(az-az)$$
$$= \vec{0}.$$

Então a força é conservativa e podemos procurar U por
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$ Então, nesse caso,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -ayz - bx - c \quad (1),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -axz - bz \quad (2),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -axy - by \quad (3).$$

Começando, por exemplo, por (1), temos

$$\underbrace{\int_{y,z}}_{\substack{\text{integral com } y \text{ e } z}} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int_{y,z} (-ayz - bx - c)\,dx,$$

fixos, já que $\frac{\partial U}{\partial x} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z}$ é definida com y e z fixos.

1.17.(2.53).2

de onde

$$\underbrace{\int_{y,z} \partial U}_{\text{"cortando } \partial x = dx\text{"}} = U(x,y,z) - \overbrace{f(y,z)}^{f(y,z) = \text{constante de integração com } y \text{ e } z \text{ fixos}} = -ayz \underbrace{\int_{y,z} dx}_{y \text{ e } z \text{ fixos}} - b\int_{y,z} x\,dx - c\int_{y,z} dx \;;$$

"cortando $\partial x = dx$":

$$\int_{yz} \frac{\partial U}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} = \int_{y,z} \partial U = \int_{y,z} dU)_{\underbrace{y,z}_{\text{fixos}}}$$

$$\therefore \; U(x,y,z) = -ayzx - b\frac{x^2}{2} - cx + f(y,z) \quad (4).$$

(4) deve ser compatível com (2):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-ayzx - \frac{bx^2}{2} - cx + f(y,z)\right\} = -axz - bz \;;$$

$$-azx + 0 + 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -axz - bz \;;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -bz \;, \quad \text{de onde}$$

$$\underbrace{\int_{z} \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}\, dy}_{\text{integração com } z \text{ fixo}} = f(y,z) - \overbrace{g(z)}^{g(z) = \text{constante de integração com } z \text{ fixo}} = \int_{z} (-bz)\, dy$$

$$= \int_z \frac{\partial f}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} = \int_z \partial f = \int_z df)_{\underbrace{z}_{\text{fixo}}}$$

$$\therefore \; f(y,z) = -bzy + g(z) \quad (5)$$

De (4) e (5) $\quad U(x,y,z) = -ayzx - \frac{bx^2}{2} - cx - bzy + g(z) \quad (6).$

(6) deve ser compatível com (3):

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ -ayzx - \frac{bx^2}{2} - cx - bzy + g(z) \right\} = -axy - by \,;$$

$$-ayx - 0 - 0 - by + \underbrace{\frac{dg(z)}{dz}}_{} = -axy - by \,;$$

a derivada parcial se torna aqui ordinária porque z é a única variável em questão

$$\therefore \; \frac{d\,g(z)}{dz} = 0 \;\Rightarrow\; g(z) = K = \text{constante} \quad (7).$$

Então, finalmente, de (6) e (7),

$$U(x,y,z) = -ayzx - \frac{bx^2}{2} - cx - bzy + K$$

b) $\vec{F} = \left(-z\,e^{-x}\,,\, \ln z,\, e^{-x} + \frac{y}{z}\right).$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ze^{-x} & \ln z & e^{-x} + y/x \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\right) + \vec{j}\left(-e^{-x} + e^{-x}\right) + \vec{k}\,(0-0) = \vec{0}.$$

Então deve existir $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$. Como no item anterior,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = z\,e^{-x} \;(1)\;, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\ln z \;(2)\;, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -e^{-x} - \frac{y}{z}\;(3).$$

De (1), $U(x,y,z) = -z\,e^{-x} + f(y,z)$ (4). (4) deve ser compatível com (2): $\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\,e^{-x} + f(y,z)\right) = -\ln z$;

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -\ln z \Rightarrow f(y,z) = -y\ln z + g(z) \quad (5).$$ De (4) e (5) $U(x,y,z) = -z e^{-x} - y\ln z + g(z)$ (6). (6) deve ser compatível com (3): $\frac{\partial}{\partial z}\left(-ze^{-x} - y\ln z + g(z)\right) = -e^{-x} - \frac{y}{z}$;

$$-e^{-x} - y\frac{1}{z} + \frac{dg(z)}{dz} = -e^{-x} - \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{dg(z)}{dz} = 0 \Rightarrow g(z) = K \text{ (const.)} (7).$$

Finalmente, de (6) e (7),

$$U(x,y,z) = -ze^{-x} - y\ln z + K$$

c) $\vec{F} = \frac{a}{r}\hat{e}_r = \frac{a}{r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{a}{r^2}\vec{r}$, $r^2 = x^2+y^2+z^2$, $\vec{r} = (x,y,z)$.

É trabalhoso, embora não muito difícil, obter $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

Ocorre que $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ e que existe $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$.

Temos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{a}{x^2+y^2+z^2}x, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{ax}{x^2+y^2+z^2} \quad (1),$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a}{x^2+y^2+z^2}y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{ay}{x^2+y^2+z^2} \quad (2),$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{a}{x^2+y^2+z^2}z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{az}{x^2+y^2+z^2} \quad (3).$$

Você deveria poder mostrar, mesmo que diretamente, que $U(\vec{r}) = U(r) = -a\ln r + \underbrace{\text{constante}}_{K} = -a\ln(x^2+y^2+z^2)^{1/2} + K$.

1.18. (9.1).1

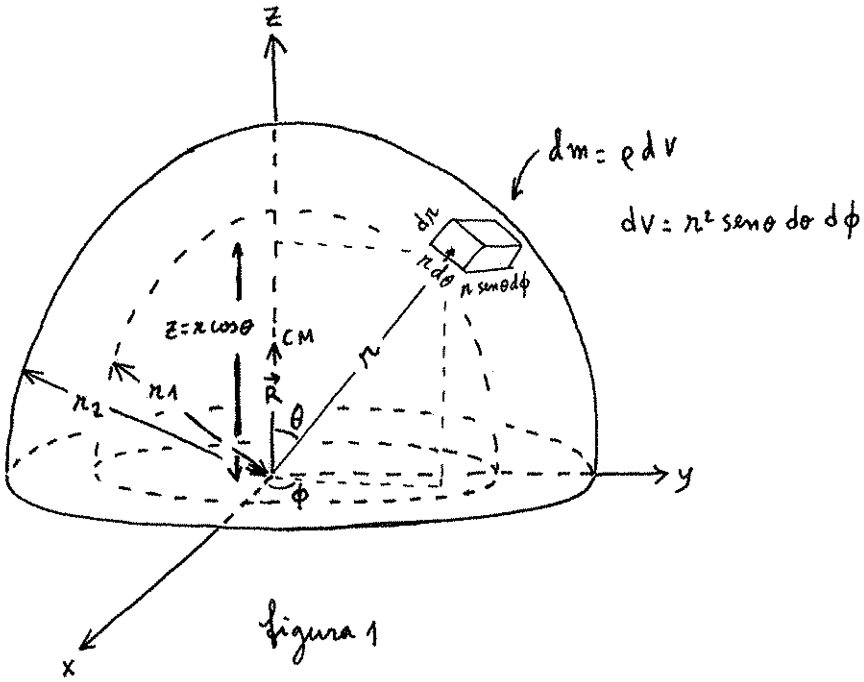


figura 1

Seguimos a figura 1, em que a posição de um volume dV dentro da concha é $\vec{r}$. $\vec{R}$ é a posição do centro de massas, que por simetria é

$\vec{R} = (0, 0, Z)$. Temos, se M = massa total

$$Z = \frac{1}{M}\int z \, dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{r_1}^{r_2} (r\cos\theta)\,\rho\,(r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi)$$

$$= \frac{\pi}{4M}\left(r_2^4 - r_1^4\right)\rho \quad (1).$$

Como $M = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$ (2), temos $Z = \frac{3}{8}\,\frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^3 - r_1^3}$.

1.18.(9.6).1

Devemos considerar duas partículas de massa m sob a ação de forças externas $\vec{F}_1 = 0$ e $\vec{F}_2 = F_0 \vec{i}$. As partículas estão inicialmente na origem. Pede-se a posição do centro de massa e sua velocidade em função do tempo. A figura 1 é auxiliar.

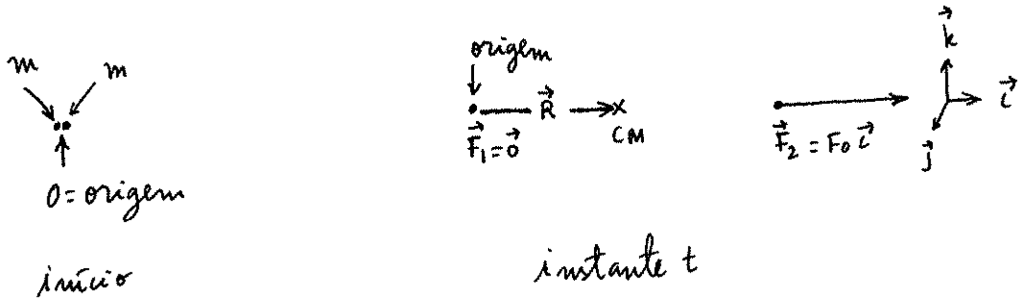


figura 1

Temos $\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\text{força externa total}} = \underbrace{2m}_{\text{massa total}} \; \underbrace{\vec{a}_{CM}}_{\text{aceleração do centro de massas} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}}$ (1) .

Se $\vec{R} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$, (1) fica

$\ddot{x}_{CM} = \dfrac{F_0}{2m}$ (2)

$\ddot{y}_{CM} = 0$ (3)

$\ddot{z}_{CM} = 0$ (4)

Se as partículas partem da origem em repouso,

$x_{CM} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0}{2m}t^2$, $y_{CM} = 0$, $z_{CM} = 0$ (5).

Pelas relações (5) temos $\vec{R} = \left(\frac{1}{2}\frac{F_0}{2m}t^2, 0, 0\right) \Rightarrow \vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$

$= \left(\dfrac{F_0}{2m}t, 0, 0\right)$ (6). A aceleração será $\vec{a}_{CM} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \left(\frac{F_0}{2m}, 0, 0\right)$ (7).

Como seria considerar apenas o movimento da partícula 2 para obter as respostas?

1.18.(9.7).1

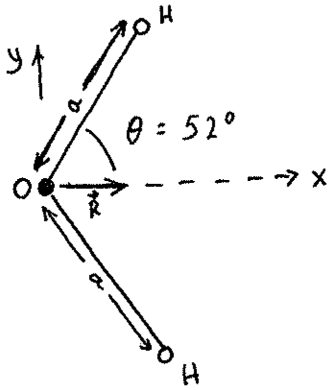


figura 1

Devemos encontrar a posição $\vec{R}$ do centro de massas.

Temos $$\vec{R} = \frac{m_H\,(a\cos\theta,\ a\,\text{sen}\,\theta) + m_H\,(a\cos\theta,\ -a\,\text{sen}\,\theta) + m_O\,(0,0)}{m_H + m_H + m_O}$$

$$= \left(\frac{2 m_H\, a\cos\theta}{2 m_H + m_O},\ 0,\ 0 \right).$$

Coloque os valores da literatura para o cálculo.

1.18.(9.9).1

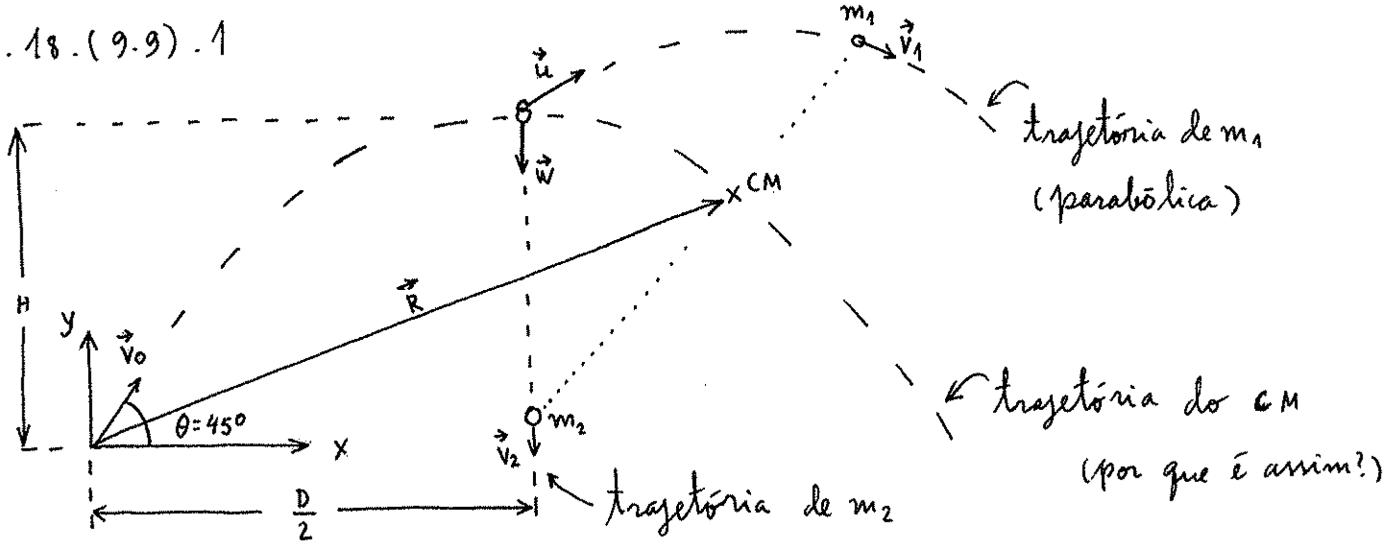


figura 1

Na figura 1 um projétil é lançado com energia E_0 e se parte em duas massas m_1 e m_2, no topo da trajetória, com energia adicional E_0. Devemos calcular as velocidades das massas e a razão m_1/m_2 quando m_1 é máxima.

A massa total é $m = m_1 + m_2$. Temos

$$\vec{R} = \left(v_0 \cos\theta\, t \,,\; v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \right)$$

$$= \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \,,\; \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (1)$$

Sabemos pelo enunciado que $x_2 = \frac{D}{2}$ e $y_2 = H - wt - \frac{1}{2} g t^2$ (2).

Combinando (1) e (2),

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 \frac{D}{2}}{m_1 + m_2} = v_0 \cos\theta\, t$$

e

$$\frac{m_1 y_1 + m_2 \left(H - wt - \frac{1}{2} g t^2 \right)}{m_1 + m_2} = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} v_0 \cos\theta\, t - \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{D}{2} & (3) \\[2ex] y_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} \left(v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \right) - \dfrac{m_2}{m_1} \left(H - wt - \frac{1}{2} g t^2 \right) & (4) \end{cases}$$

Como θ é dado, v_0 é calculável por $E_0 = \frac{m_1 + m_2}{2} v_0^2$, dado E_0. H e D são calculáveis. Falta inferir w.

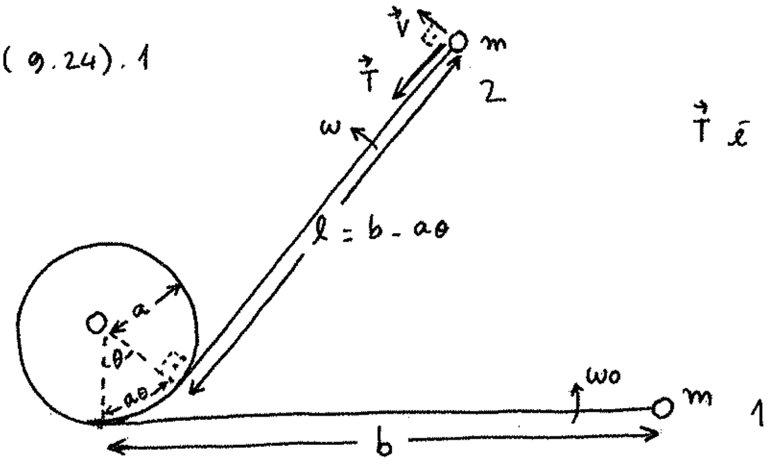
1.18. (9.9).2

W é calculável da seguinte forma: É dito que a separação acrescenta ao movimento uma energia Eo. Então, para a conservação,

$$E_0 + E_0 = \frac{m_1}{2} W^2 + \frac{m_2}{2} \frac{u^2}{2} + (m_1 + m_2) g H \quad (5).$$

Ocorre que $u^2 = u_x^2 + u_y^2$ e essas componentes de $\vec{u}$ podem ser obtidas de (3) e (4), no instante $t = T$ correspondente a $x_{CM} = D/2$ e $y_{CM} = H$, como funções de W. Pode-se então retornar a (5). Como você faria essa questão.

1.18. (9.24). 1



$\vec{T}$ é a força sobre m,
que não realiza trabalho
porque $\vec{T}.\vec{v}=0$

figura 1 : $\vec{T}$ não é central em relação a O, razão pela qual não há conservação de momento angular.

Seguindo a figura 1 e considerando a conservação da energia no movimento de 1 a 2 temos

$$\frac{m}{2}(\omega_0 b)^2 = \frac{m}{2}(\omega \ell)^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 \frac{b}{\ell} = \omega_0 \frac{b}{b-a\theta}.$$

1.18.(9.30).1

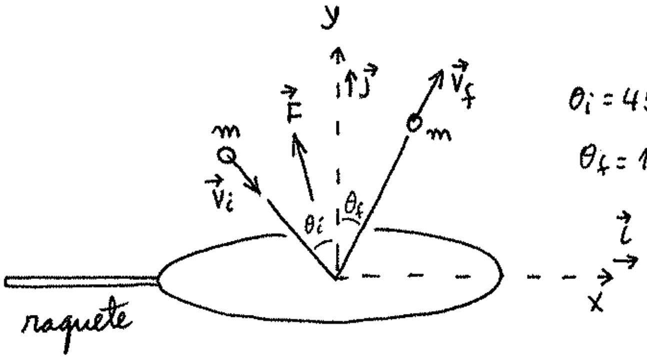


figura 1

$\theta_i = 45°$ $\quad v_i = |\vec{v}_i| = 8\,m/s$

$\theta_f = 15°$ $\quad v_f = |\vec{v}_f| = 16\,m/s$

tempo de interação

$\Delta t = 0.01\,s.$

$m = 60\,g = 0.06\,kg.$

Tendo em vista a figura 1, pergunta-se qual é o impulso $\vec{I}$ sobre a bola e a força $\vec{F}$ sobre ela.

Temos $\vec{v}_i = (v_i \operatorname{sen}\theta_i, -v_i \cos\theta_i)$ (1) e $\vec{v}_f = (v_f \operatorname{sen}\theta_f, v_f \cos\theta_f)$ (2). Por definição de impulso,

$$\vec{I} = \int \vec{F}\, dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \int d\vec{p} = \Delta\vec{p}\,.$$

Então por (1)

$$I = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(v_f \operatorname{sen}\theta_f - v_i \operatorname{sen}\theta_i)\vec{i} + m(v_f \cos\theta_f + v_i\cos\theta_i)\vec{j} \quad (2).$$

Se considerarmos constante a força no intervalo Δt temos

$$\vec{I} = \int \vec{F}\, dt = \vec{F}\int dt = \vec{F}\,\Delta t\,.$$

Então, por (2),

$$\vec{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\,\frac{v_f \operatorname{sen}\theta_f - v_i \operatorname{sen}\theta_i}{\Delta t}\,\vec{i} + m\,\frac{v_f\cos\theta_f + v_i\cos\theta_i}{\Delta t}\,\vec{j} \quad (3).$$

O resultado deve ser $\vec{F} = -9\,\vec{i} + 127\,\vec{j}$ (N).