ÁLGEBRA LINEAR
TRABALHO

Prof. Luís Felipe Kiesow de Macedo

Base e dimensão (1.2)

1 Para quais valores de k o conjunto $B = \{(1,k),(k,4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$?

2 Seja o conjunto $B = \{2, 1-x, 1+x^2\}$. B é base de P_2?
Justifique! (P_2 polinômios de segundo grau).

3 Mostre que o conjunto
$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$
é uma base do $M(2,2)$.

4 Seja $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}$ base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Determine o vetor-coordenada e a matriz-coordenada em relação à base B.

5 Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes casos.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$ subespaço do $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; b = a + c \quad e \quad d = c \right\}$ subespaço de M(2,2).

6 Seja S_1 subespaço do $\mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(a,b,c,d)/a - 2b = 0 \quad e \quad c = 3d\}$. Determine $\dim S_1$ e uma base de S_1.

Espaços Vetoriais Euclidianos (1.2)

7 Consideremos o seguinte produto interno em P_2: $p.q = a_2.b_2 + a_1.b_1 + a_0.b_0$ sendo $p = a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ e $q = b_2.x^2 + b_1.x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcular:

(a) $|p_1 + p_2|$

(b) $\dfrac{p_2}{|p_2|}$

8 Se $u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ matrizes quaisquer de M(2,2).
Dado o produto interno $u.v = a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 + d_1.d_2$ e os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ determine o ângulo entre u e v.

9 No espaço $V = P_2$ consideremos o produto interno $f(t).g(t) = \int_0^1 f(t).g(t)dt$.
Calcule $f(t).g(t)$ e $|f(t)|$ para $f(t) = t^2 - 2t$ e $g(t) = t + 3$.

10 Verifique a desigualdade de Cauchy quando se tem $\vec{u} = (2,-1)$,
$\vec{v} = (-2,-4)$ e o produto interno $\vec{u}.\vec{v} = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$

11 Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, o produto interno usual. Sejam $\vec{u} = (0, m-1, 4)$ e $\vec{v} = (5, m-1, -1)$. Para que valores de m os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais?

12 Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, o seguinte produto interno
$(x_1, y_1, z_1).(x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$.
Determine, em relação a este produto interno, um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

13 Dado o conjunto $B = \{(1, -3, 2), (2, 2, 2), (a, b, c)\}$

(a) Determine o vetor (a, b, c) para que o seja uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

(b) Construir a partir de B uma base ortonormal.

Transformação Linear (1.4)

14 Dentre as transformações $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas pelas seguintes leis, verifique quais são lineares.

(a) $T(x, y) = (y, x)$

(b) $T(x, y) = (|x|, 2y)$

15 Seja $V = \mathbb{R}^2$. Faça o gráfico de um vetor genérico $\vec{v} = (x, y)$ do domínio e de sua imagem $T(\vec{v})$ sob a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

(a) $T(x, y) = (2x, y)$

(b) $T(x, y) = -2(x, y)$

16 Seja $T : M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c, b + c)$.
Verifique se T é linear.

17 Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.

(a) Determine o núcleo de T, a dimensão e uma base para o núcleo encontrado.

(b) Determine a imagem de T, a dimensão e uma base para a imagem encontrada.

18 Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

(a) Encontre $T(x, y)$.

(b) Determine $N(T)$ e $Im(T)$.

19 Consideramos a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as bases $A = \{(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(-1, 1), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $[T]_B^A$.

20 Sejam S e T operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (x - 2y, y)$ e $T(x, y) = (2x, x + 2y)$. Determinar:

(a) $S+T$

(b) $T-S$

(c) $2S+3T$

(d) $S \circ T$

(e) $T \circ S$

(f) $S \circ S$

Autovalores e Autovetores (1.2)

21 Determinar os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

(c) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

22 Determinar os autovalores e os correspondentes autovetores das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23 Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $\vec{u} = (2, 1)$ e triplica o comprimento do vetor $\vec{v} = (1, 2)$, sem alterar as direções nem inverter os sentidos.

(a) Calcule $T(0, 3)$

(b) Determine $T(x, y)$