ÁLGEBRA LINEAR
AULA 7
ESPAÇOS VETORIAIS - PARTE 2

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

1. Combinação Linear
2. Dependência e Independência Linear
3. Exercícios

Combinação Linear

Definição

Sejam os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

é uma ***combinação linear dos vetores*** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V, A \neq \varnothing$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

Observações

1. Para S gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, ou gerado pelo conjunto A, usamos a notação
$$S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$$
ou
$$S = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$
ou ainda
$$S = G(A)$$
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *vetores geradores* e A *conjunto gerador* de S.
2. Caso $A = \varnothing$ então $[\varnothing] = \{0\}$
3. $A \subset G(A)$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$
4. Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer $G(A) = V$.

   Um espaço vetorial V é ***finitamente gerado*** se existe um conjunto finito A, $A \subset V$, tal que $V = G(A)$.

Dependência e Independência Linear

Definição - Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial e $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é ***linearmente independente*** (**LI**), ou os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LI** se a equação

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

admite apenas a ***solução trivial***.

Se existirem soluções $a_i \neq 0$, então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é ***linearmente dependente*** (**LD**), ou os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LD**

Teorema

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

Dependência e Independência Linear

Propriedades - Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial.

1. Se $A = \{\mathbf{v}\} \subset V$ e $\mathbf{v} \neq 0$, então A é **LI**.

   Observação: Por definição o conjunto vazio $\varnothing$ é LI.

2. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD.

3. Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é LD, então A é também LD.

4. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A é também LI.

5. Se $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ é LI e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, w\} \subset V$ é LD, então w é combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Exercícios e demonstrações

EM AULA

Slides e outros materiais serão postados no seguinte site:

`http://wp.ufpel.edu.br/jahnecke/disciplinas/algebra-linear/`

Obs: em junho colocarei o material no meu site.

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`