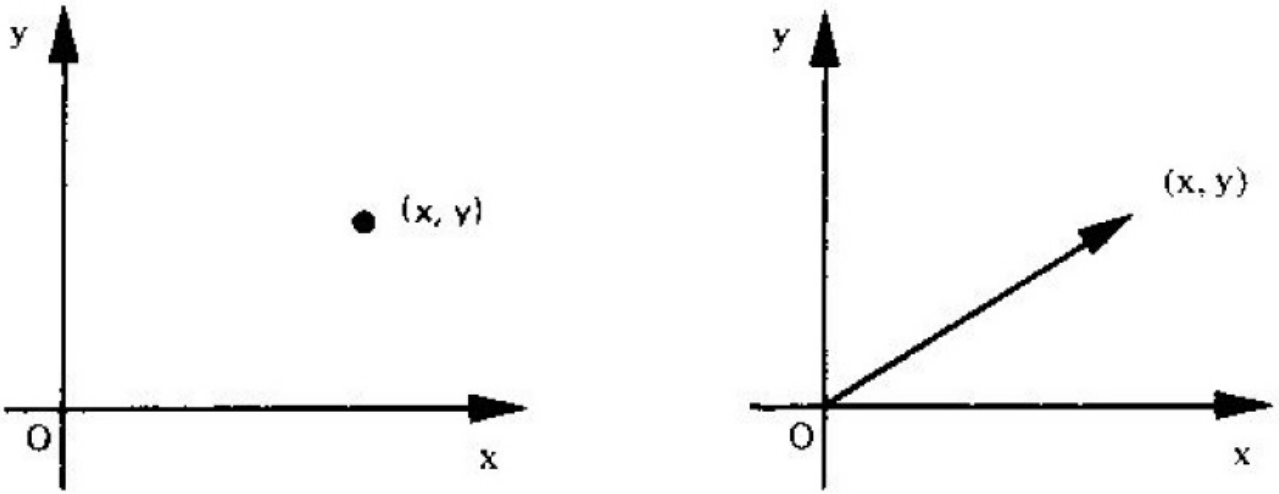
ÁLGEBRA LINEAR
AULA 6
ESPAÇOS VETORIAIS - PARTE 1

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

Introdução

Sabe-se que o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano.



$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\vdots$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}$

Introdução - Vetores no Plano

Operações com Vetores no Plano

Multiplicação de um vetor por um número

Sejam um vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ e um número k. Então

$$\mathbf{w} = k.\mathbf{v} = k(a, b) = (ka, kb)$$

Adição de dois vetores

Se $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (c, d)$ então a soma é dada por

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Introdução

Sejam os conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{M}_{m\times n}$. Nestes conjuntos estão definidas operações de adição e multiplicação por escalar constatando-se uma série de propriedades comuns.

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e se $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{m\times n}$

Propriedades de adição

i $((\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ e $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$

ii $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ e $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$

iii $\mathbf{u}+0 = \mathbf{u}$ e $\mathrm{A}+0 = \mathrm{A}$ (existência de elemento neutro)

iv $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = 0$ e $\mathrm{A}+(-\mathrm{A}) = 0$ (elemento simétrico)

Propriedades multiplicação por escalar

i $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$ e $(\alpha\beta)\mathrm{A} = \alpha(\beta\mathrm{A})$

ii $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$ e $(\alpha+\beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{u}+\beta\mathrm{A}$

iii $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$ e $\alpha(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A}+\alpha\mathrm{B}$

iii $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ e $1\mathrm{A} = \mathrm{A}$

Espaços Vetoriais

Definição

Seja o conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, \alpha \mathbf{u} \in V$$

O conjunto V com estas duas operações é chamado ***espaço vetorial real*** (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem satisfeitos os axiomas $A_1, \ldots, A_4$ e $M_1, \ldots, M_4$.

Introdução - Operações com Vetores no Espaço

A) ***adição***

A_1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

A_2 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

A_3 $\forall \mathbf{u} \in V$, $\exists 0 \in V$, $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$

A_4 $\forall \mathbf{u} \in V$, $\exists \mathbf{-u} \in V$, $\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = 0$

M) ***multiplicação por escalar***

M_1 $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

M_2 $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

M_3 $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

M_4 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Espaços Vetoriais

Exemplo 1

Conjunto dos vetores do espaço

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 2

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 3

$V = \mathrm{M_{m\times n}}$, conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais.

Subespaço Vetorial

Às vezes, é necessário observar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos S que sejam eles próprios espaços vetoriais ”menores”.

Teorema

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto S, não vazio, será um ***subespaço vetorial*** de V se:

i $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$

ii $\forall \mathbf{u} \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha.\mathbf{u} \in S$

Observações:

1. Se estas duas condições são válidas em S, então os oito axiomas de espaço vetorial também se verificam em S. Assim existe a garantia que ao operarmos em S não obteremos um vetor fora de S, e que ele próprio é um espaço vetorial.
2. Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços, o conjunto 0, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V. Estes dois subespaços são chamados de *triviais*.

Intersecção de Subespaços

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. A interseção S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 \cap S_2$, é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $v \in S_1$ e $v \in S_2$.

Teorema

A interseção S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V. De fato:

i se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_1$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_1$
se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_2$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_2$

Portanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_1 \cap S_2 = S$.

ii Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$:
se $\mathbf{v} \in S_1$, então $\lambda.\mathbf{v} \in S_1$
se $\mathbf{v} \in S_2$, então $\lambda.\mathbf{v} \in S_2$

Portanto, $\lambda.\mathbf{v} \in S_1 \cap S_2 = S$.

Soma de Dois Subespaços Vetoriais

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. A soma S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 + S_2$ é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ de V tais que $\mathbf{u} \in S_1$ e $\mathbf{v} \in S_2$.

Teorema

A soma S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V. De fato:

i se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \in S_1$, então $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S_1$
se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \in S_2$, então $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in S_2$
Por outro lado, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in S$ e $\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \in S$
Portanto, $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in S_1 + S_2 = S$

ii Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$:
se $\mathbf{u}_1 \in S_1$, então $\lambda.\mathbf{u}_1 \in S_1$
se $\mathbf{v}_1 \in S_2$, então $\lambda.\mathbf{v}_1 \in S_2$
Por outro lado, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in S$
Logo, $\lambda.(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) = \lambda.\mathbf{u}_1 + \lambda.\mathbf{v}_1 \in S_1 + S_2 = S$.

Soma Direta de Dois Subespaços Vetoriais

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V.
V é a ***soma direta*** de S_1 e S_2, e representamos por $V = S_1 \oplus S_2$, se $V = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Teorema

Se V é a soma direta de S_1 e S_2, $V = S_1 \oplus S_2$, todo o vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma:
$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in S_1$ e $\mathbf{w} \in S_2$

Exercícios e demonstrações

EM AULA

Slides e outros materiais serão postados no seguinte site:

`http://wp.ufpel.edu.br/jahnecke/disciplinas/algebra-linear/`

Obs: em junho colocarei o material no meu site.

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

THANKS!