# ÁLGEBRA LINEAR
# AULA 5
# MÉTODOS ITERATIVOS

**Luís Felipe Kiesow de Macedo**

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

# Introdução



Seja o sistema linear Ax = b, onde:

- A: Matriz dos coeficientes, $n \times n$;
- x: vetor das variáveis, $n \times 1$;
- b: vetor dos termos independentes, $n \times 1$.

Convertemos este sistema em um sistema do tipo x = Cx + g, onde C é matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. $\varphi$(x) = Cx + g função de iteração na forma matricial.

Esquema iterativo:

$x^{(0)}$ (vetor aproximação inicial)
$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$, (primeira aproximação)
$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$, (segunda aproximação)
$\vdots$
$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g = \varphi\left(x^{(k)}\right), k = 0, 1, \ldots$

# Introdução



*Observação*

Se a sequência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots x^{(k)}, \ldots$ é tal que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$, então $\alpha = \mathrm{C}\alpha + \mathrm{g}$, ou seja, $\alpha$ é a solução do sistema linear $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$.

# Testes de Parada



O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por $d^{(k)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

Assim, dada uma precisão $\varepsilon$, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como $\bar{x}$, solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \varepsilon$.

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

Computacionalmente usamos também como teste de parada um número máximo de iterações.

# Método Iterativo de Gauss-Jacobi



A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear Ax = b em x = Cx + g é o seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Supondo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ isolamos o vetor x mediante a separação pela diagonal, assim:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n,n-1}) \end{cases}$$

# Método Iterativo de Gauss-Jacobi



Desta forma, temos x = Cx + g, onde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Método Iterativo de Gauss-Jacobi



O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}$ através da relação recursiva $\mathrm{x}^{(\mathrm{k}+1)} = \mathrm{C}\mathrm{x}^{(\mathrm{k})} + \mathrm{g}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n,n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

# Método Iterativo de Gauss-Jacobi



## Exemplo

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0.05$.

O processo iterativo é

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\frac{2}{10}x_1^{(k)} - \frac{3}{10}x_2^{(k)} + 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10}. \end{cases}$$

Na forma matricial $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ temos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}.$$

Assim (k = 0) temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2\ (-1.6) - 0.1 \times 0.6 + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} = -\ 0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.2 \times 0.6 - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.3\ (-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}.$$

Calculando $d_r^{(1)}$, temos:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26 \quad \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para k = 1:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon$$

e para k = 2:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon .$$

Então, a solução $\bar{x}$ do sistema linear acima, com erro menor que 0.05, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo tomamos $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$. No entanto, o valor de $x^{(0)}$ é arbitrário, pois veremos mais adiante que a convergência ou não de um método iterativo para a solução de um sistema linear de equações é independente da aproximação inicial escolhida.

# Método Iterativo de Gauss-Jacobi



## Teorema - Critério das linhas

Seja o sistema linear Ax = b e seja

$$\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|.$$

Se

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$$

então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $x^{(k)}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$.

Obs: este teorema é uma condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi.

## Análise do Exemplo com o teorema do Critério das Linhas

Analisando a matriz A do sistema linear do Exemplo 10,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1; \ \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1; \ \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1 \ \text{ e}$$

então $\max\limits_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0.5 < 1$ donde, pelo critério das linhas, temos garantia de convergência para o método de Gauss-Jacobi.

# Método Iterativo de Gauss-Seidel



Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear Ax = b é escrito na forma equivalente x = Cx + g por separação da diagonal.
O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n,n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

# Método Iterativo de Gauss-Seidel



O esquema iterativo de Gauss-Seidel pode ser escrito na forma matricial. Inicialmente escrevemos a matriz A como A = L + D + R, onde:

L: matriz triangular inferior com diagonal nula;

D: matriz diagonal com $d_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$;

R: matriz triangular superior com diagonal nula.

Podemos escrever como

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathrm{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{R} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Método Iterativo de Gauss-Seidel



Portanto, $Ax = b \Leftrightarrow (L + D + R)x = b \Leftrightarrow Dx = b - Lx - Rx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1} b - D^{-1}Lx - D^{-1}Rx.$$

No método de Gauss-Seidel o vetor $x^{(k+1)}$ é calculado por:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Rx^{(k)}.$$

Agora, podemos ainda escrever $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, considerando $A = D(L_1 + I + R_1)$ onde:

# Método Iterativo de Gauss-Seidel



$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & a_{23}/a_{22} & \cdots & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

# Método Iterativo de Gauss-Seidel



então $Ax = b \Leftrightarrow$

$$D(L_1 + I + R_1)\, x = b \Leftrightarrow$$

$$(L_1 + I + R_1)\, x = D^{-1}\, b \Leftrightarrow$$

$x = -L_1 x - R_1 x + D^{-1} b$ e o método de Gauss-Seidel é

$$x^{(k+1)} = -L_1 x^{(k+1)} - R_1 x^{(k)} + D^{-1} b,$$

donde $(I + L_1)\, x^{(k+1)} = -R_1\, x^{(k)} + D^{-1} b$

ou $x^{(k+1)} = \underbrace{-(I + L_1)^{-1} R_1}_{C}\, x^{(k)} + \underbrace{(I + L_1)^{-1} D^{-1} b}_{g} = C x^{(k)} + g$

# Exemplo - Interpretação Geométrica



Consideremos a aplicação geométrica dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 . \end{cases}$$

Preparação:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3 + x_1) . \end{cases}$$

O esquema iterativo para Gauss-Jacobi é:

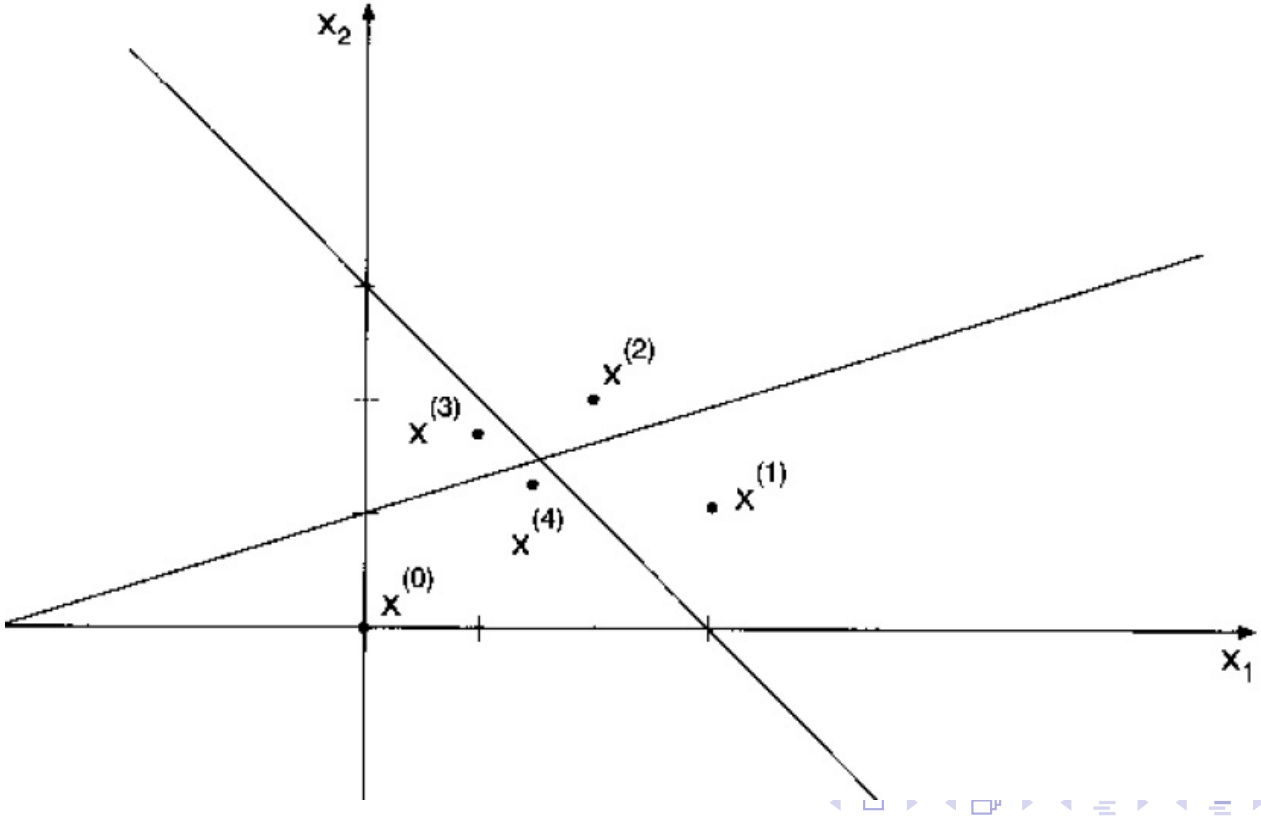
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k)}) \end{cases}$$

# Exemplo - Interpretação Geométrica



Teremos:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}; \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$



# Exemplo - Interpretação Geométrica



O esquema iterativo para Gauss-Seidel é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(3 + x_1^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Para melhor visualização gráfica, marcaremos no gráfico os pontos $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$, ... para $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Exemplo - Interpretação Geométrica



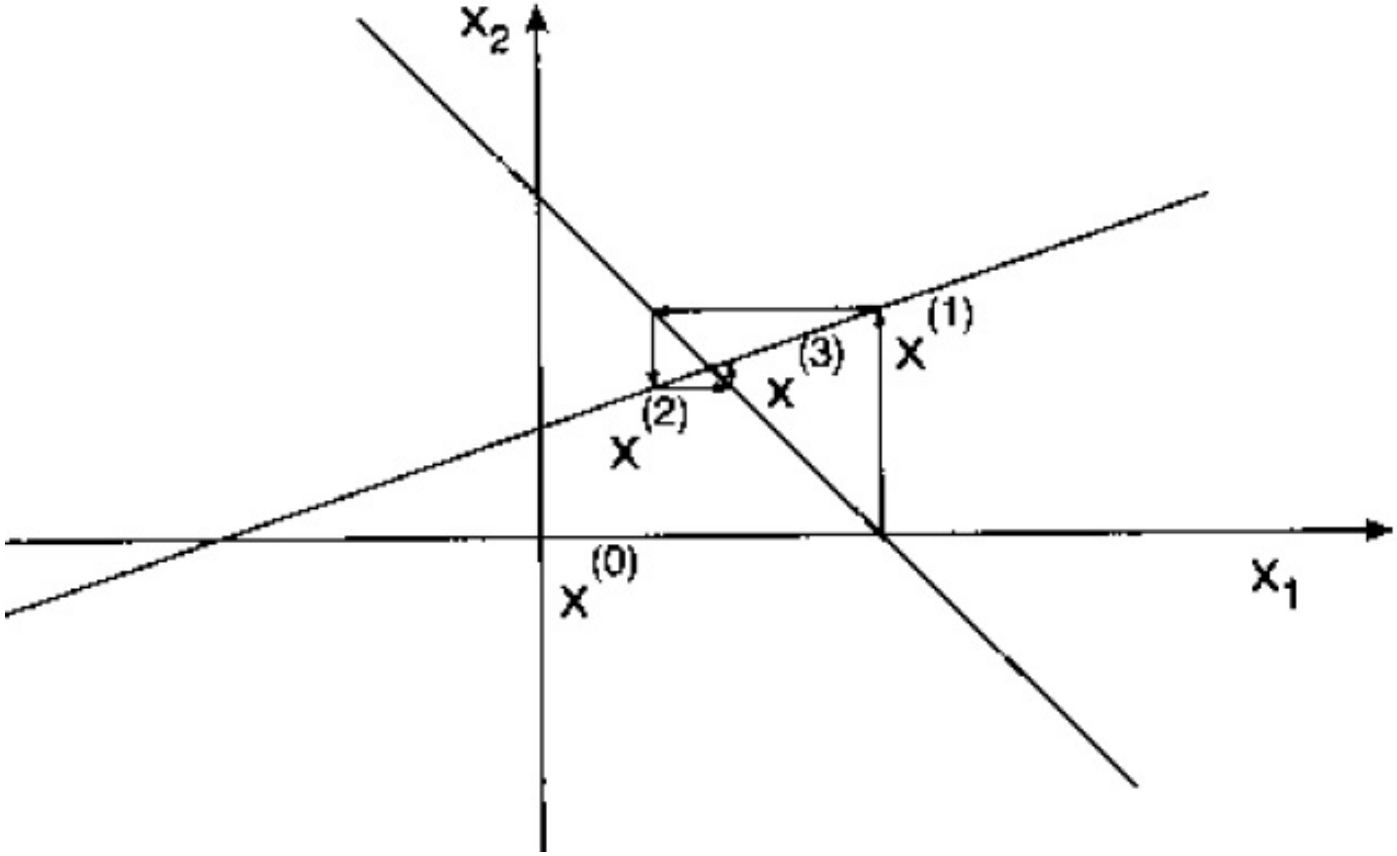
$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}, \ldots$$

Observamos que os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação e os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda equação.

# Exemplo - Interpretação Geométrica





# Exemplo - Interpretação Geométrica



Embora a ordem das equações num sistema linear não mude a solução exata, as seqüências geradas pelos métodos de Gauss-Seidel e de Gauss-Jacobi dependem fundamentalmente da disposição das equações.

É fácil verificar que a seqüência $x^{(0)}$, $x^{(1)}$,..., $x^{(k)}$,... está convergindo para a solução exata do sistema linear que é $x^* = (1.5, 1.5)$, tanto no método de Gauss-Jacobi quanto no de Gauss-Seidel.

Slides e outros materiais serão postados no seguinte site:

`http://wp.ufpel.edu.br/jahnecke/disciplinas/algebra-linear`

Obs: em junho colocarei o material no meu site.

Mais informações:

**e-mail:** `felipekiesow@gmail.com`

# Thanks!