ÁLGEBRA LINEAR
AULA 4

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

1. Introdução
2. Desenvolvimento de Laplace
3. Matriz Adjunta
4. Matriz Inversa
5. Regra de Cramer
6. Posto da Matriz
7. Procedimento Para a Inversão de Matrizes
8. Exercícios

Introdução

Definição

Número associado a uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
Um determinante pode ser denotado por

$$\det \mathbf{A}, |\mathbf{A}| \text{ ou } \det[a_{ij}]$$

Introdução

Propriedades

i Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz $\mathbf{A}$ são nulos, $\det \mathbf{A} = 0$.

ii $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$.

iii Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante o determinante fica multiplicado por esta constante.

iv Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca o sinal.

v O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

vi De modo geral $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$.

vii O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

viii $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Desenvolvimento de Laplace

Seja $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_{m\times n} &= a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det |\mathbf{A}_{ij}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \end{aligned}$$

Observação: Chamamos Δ_{ij} de cofator ou complemento algébrico do elemento a_{ij}

Matriz Adjunta

Seja $\overline{A} = [\Delta_{ij}]$ matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$. (Δ_{ij} cofator)

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, chamaremos de ***matriz adjunta*** de $\mathbf{A}$ à transposta da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$.

$$adj\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}'$$

Teorema

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}}' = \mathbf{A} \cdot (adj\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n$$

Matriz Inversa

Definição

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n, chamamos de inversa de $\mathbf{A}$ a uma matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n.

Escrevemos $\mathbf{A}^{-1}$ para a inversa de $\mathbf{A}$.

Observações

i Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

ii Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e existe uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ então $\mathbf{A}$ é inversível, ou seja $\mathbf{A}^1$ existe e $\mathbf{B} = \mathbf{A}^1$.

iii Nem toda matriz tem inversa.

Exemplo 1

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ então $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ pois $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$ e $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$

Resolução: (em aula)

Exemplo 2

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$. Qual a inversa de de $\mathbf{A}$?

Resolução: (em aula)

Exemplo 3

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ admite inversa?

Resolução: (em aula)

Matriz Inversa

Teorema

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ admite uma inversa se, e somente se $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Neste caso:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (adj\mathbf{A})$$

Exemplo (mesmo exemplo 2 do slide anterior)

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$. Qual a inversa de de $\mathbf{A}$?

Resolução: (em aula)

Regra de Cramer

BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. 3. ed. (Páginas 77, 78, 79, 80)

Cálculo do posto da matriz através de determinantes

Muitas vezes, é suficiente saber apenas se um sistema de equações lineares tem solução sem precisar resolvê-lo, isto é, sem explicitar as soluções.

Como já vimos na aula 2, a existência e o número de soluções estão relacionados com o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada.

Teorema

O posto (característica) de uma matriz $\mathbf{A}$ (quadrada ou não) é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de $\mathbf{A}$, com determinantes diferentes de zero.

Procedimento Para a Inversão de Matrizes

Definição: Matriz elementar

Uma ***matriz elementar*** é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

Teorema1

Se **A** é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de **A** é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar **E** correspondente à operação com linhas pela matriz **A**.

Teorema2

Sistemas associados a matrizes linha equivalentes são equivalentes.

Teorema3

Se **A** é uma matriz inversível, sua matriz linha reduzida à forma de escada, **R**, é a identidade. Além disso, **A** é dada por um produto de matrizes elementares.

Exercícios

As provas dos teoremas apresentados podem ser encontrados no livro BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. 3. ed.

Slides e outros materiais serão postados no seguinte site:

`http://wp.ufpel.edu.br/jahnecke/disciplinas/algebra-linear/`

Obs: em junho colocarei o material no meu site.

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

Bom trabalho!