Sistemas e Matrizes

Operações Elementares

Forma Escalonada (Forma de Escada)

Posto e Nulidade de uma Matriz

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Exercícios

ÁLGEBRA LINEAR
AULA 2

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

Sistemas de Equações Lineares

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

1. Sistemas e Matrizes
2. Operações Elementares
3. Forma Escalonada (Forma de Escada)
4. Posto e Nulidade de uma Matriz
5. Soluções de um Sistema de Equações Lineares
6. Soluções de um Sistema de Equações Lineares
7. Exercícios

Sistemas e matrizes

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplicar o estudo dos sistemas lineares.

Equação Linear

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Sistema de Equações Lineares

Um sistema de m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde os números $a_1, \cdots, an$ e b são números reais ou complexos conhecidos.

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

- Uma solução do sistema é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente as m equações.
- O conjunto de todas as possíveis soluções é chamado conjunto solução do sistema linear.
- Dois sistemas lineares são chamados de equivalentes se possuírem o mesmo conjunto solução.

Sistemas e matrizes

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Dado o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos escrever este sistema em uma forma matricial **A.X = B,**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas e matrizes

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ matriz dos coeficientes}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ matriz das incógnitas}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ matriz dos termos independentes.}$$

Sistemas e matrizes

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Matriz Ampliada do Sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Como transformar um sistema linear por outro equivalente? Através das seguintes Operações Elementares (na forma matricial aumentada):

i. Substituir uma linha pela soma de si mesmo com um múltiplo de outra linha;
ii. Trocar duas linhas;
iii. Multiplicar todas as entradas em uma linha por uma constante diferente de zero.

Teorema

Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Forma Escalonada

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

i Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

ii O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, chamado pivô, é igual a 1;

iii O pivô da linha $i + 1$ ocorre à direita do pivô da linha i, para $i = 1, \ldots, m - 1$.

iv Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Posto e Nulidade de uma Matriz

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Definição: Posto e Nulidade

Dada a matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.

O **posto** de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B.

A **nulidade** de A é o número $n - p$ (também chamada grau de liberdade do sistema).

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Seja o sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos).

Este sistema poderá ter

i uma única solução $\begin{cases} x_1 & = & k_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_n \end{cases}$

ii infinitas soluções

iii nenhuma solução.

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Teorema

i Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

notação

p_c = posto da matriz dos coeficientes
p_a = posto da matriz ampliada
Se $p_c = p_a$ simplesmente denotamos por p

Exercícios

Sistemas e Matrizes

Operações Elementares

Forma Escalonada (Forma de Escada)

Posto e Nulidade de uma Matriz

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Exercícios

Sistemas e Matrizes
Operações Elementares
Forma Escalonada (Forma de Escada)
Posto e Nulidade de uma Matriz
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Soluções de um Sistema de Equações Lineares
Exercícios

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

Adeus!