ÁLGEBRA LINEAR
AULA 10
TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

1. Definição
2. Núcleo
3. Imagem
4. Matriz (T.L.)
5. Operações (T.L.)
6. Transformações Lineares Planas
7. Exercícios

Definição de Transformação Linear

Definição

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é chamada ***Transformação Linear*** deV em W se:

I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

II) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

Observação:
Para $\alpha = 0$:
$T(0) = T(0.\vec{v}) = 0.T(\vec{v}) = 0$

Propriedade

Em toda transformação linear $T : V \longrightarrow W$, a imagem do vetor $0 \in V$ é o vetor $0 \in W$, isto é $T(0) = 0$.

Propriedade

Se $T : V \longrightarrow W$, for uma transformação linear, então vetor $0 \in W$, isto é $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$.

Exemplos:

1. Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear.

2. Mostre que $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$, ou ainda, $x \longmapsto 3x$ é linear.

3. Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$ é linear.

4. Seja o espaço vetorial $V = P_n$ dos polinômios de grau $\leq n$. A aplicação derivada $D : P_n \longrightarrow P_n$, que leva $f \in P_n$ em sua derivada f', isto é, $D(f) = f'$, é linear?

5. Seja a matriz . Essa a matriz determina a transformação: $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\vec{v} \longmapsto A\vec{v}$ ou $T_A(\vec{v}) = A\vec{v}$.
Essa transformação é linear?

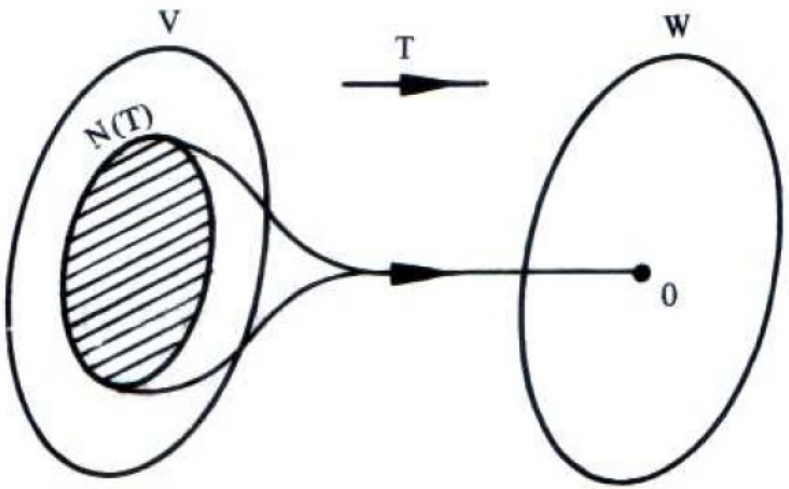
Resolução dos exemplos em aula.

Núcleo de uma Transformação Linear

Definição

Chama-se de ***núcleo*** de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in V$ que são transformados em $0 \in W$. Indica-se esse conjunto por $N(T)$ ou $Ker(T)$:

$$N(T) = \{\vec{v} \in V / T(\vec{v}) = 0\}$$



$N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$

Núcleo de uma Transformação Linear

Propriedades

- O núcleo de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é um subespaço vetorial de V.
- Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é injetora se, $N(T) = \{0\}$.

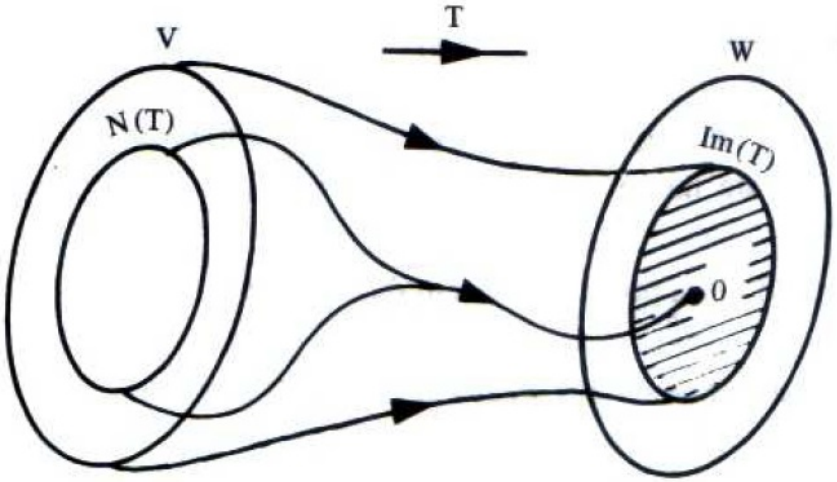
Imagem de uma Transformação Linear

Definição

Chama-se de ***imagem*** de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ ao conjunto de vetores $\vec{w} \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$. Indica-se esse conjunto por $Im(T)$ ou $T(V)$:

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W / T(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

para algum $\vec{v} \in V$



Propriedades

A imagem de uma transformação $T : V \longrightarrow W$ é um ***subespaço*** de W

Teorema da Dimensão

Seja V um espaço de dimensão finita $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então, $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$.

Corolários

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

i Se $\dim v = \dim W$, então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

ii Se $\dim v = \dim W$, e T é injetora, então T transforma base em base, isto é, se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V, então $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base de W.

Matriz de uma Transformação Linear

Definição

Para $T : V \longrightarrow W$ linear, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, $A = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ e $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ são bases de V e W, respectivamente, teremos $[T]_B^A$ é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de A em relação à base B:

$$[T]_B^A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \Uparrow & \Uparrow & & \Uparrow \\ T(\vec{v}_1)_B & T(\vec{v}_2)_B & & T(\vec{v}_n)_B \end{array} \end{array}$$

Operações com Transformações Lineares

Adição

Sejam $T_1 : V \longrightarrow W$ e $T_2 : V \longrightarrow W$ transformações lineares. Chama-se ***soma*** das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$$\begin{array}{rccl} T_1 + T_2 : & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{v} & \longmapsto & (T_1 + T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V \end{array}$$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente, então

$$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$$

Multiplicação por Escalar

Sejam $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se ***produto*** de T pelo escalar α à transformação linear

$$\begin{array}{rccl} \alpha T : & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{v} & \longmapsto & (\alpha T)(\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V \end{array}$$

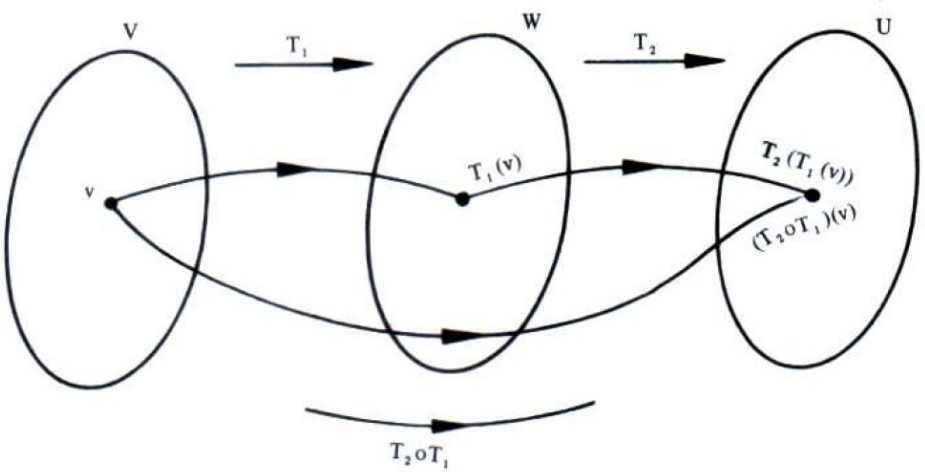
Se A e B são bases de V e W, respectivamente, então

$$[\alpha T]_B^A = \alpha\,[T]_B^A$$

Composição

Sejam $T_1 : V \longrightarrow W$ e $T_2 : W \longrightarrow U$ transformações lineares. Chama-se aplicação ***composta*** de T_1 com T_2, e se representa por $T_2 \circ T_1$, à transformações linear:

$$\begin{array}{rccl} T_2 \circ T_1 : & V & \longrightarrow & U \\ & \vec{v} & \longmapsto & (T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = T_2(T_1(\vec{v})), \forall \vec{v} \in V \end{array}$$



Se A, B e C são bases de V, W e U, respectivamente, então

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \times [T_1]_B^A$$

Transformações Lineares Planas

6.1. REFLEXÕES

Reflexão em torno do eixo *x*

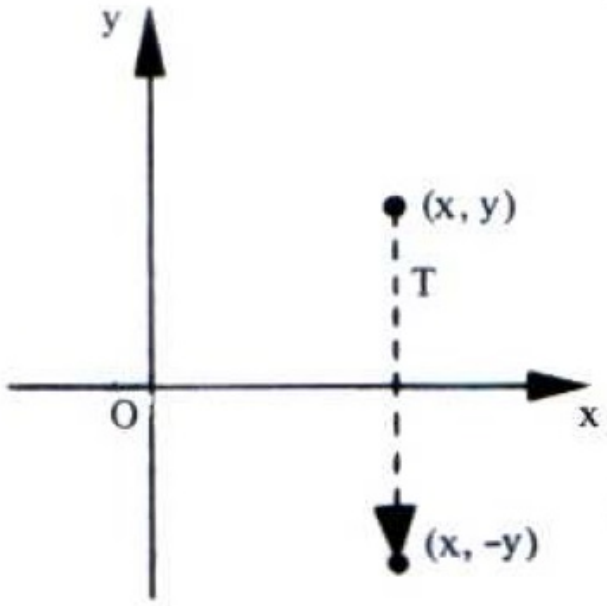
$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, -y) \quad \text{ou}$$

$$T(x, y) = (x, -y)$$

sendo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sua matriz canônica, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



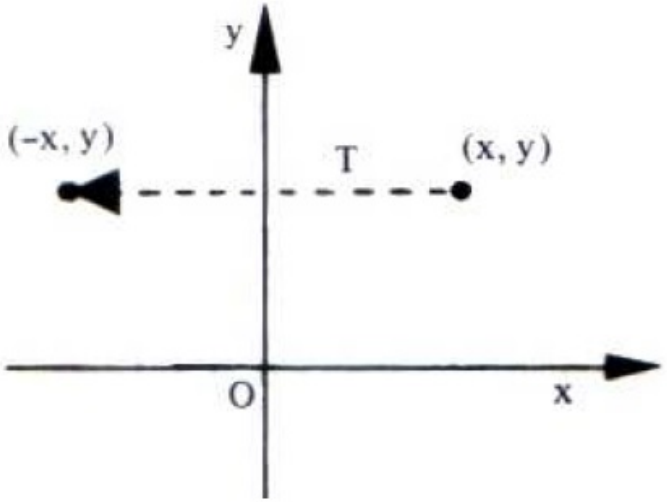
Reflexão em torno do eixo *y*

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-x, y)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

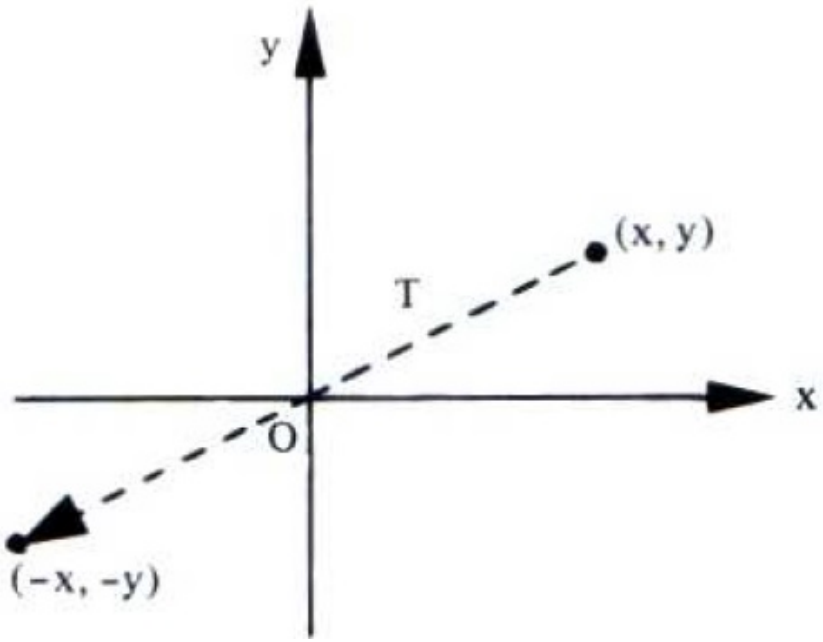


Reflexão em torno da origem

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

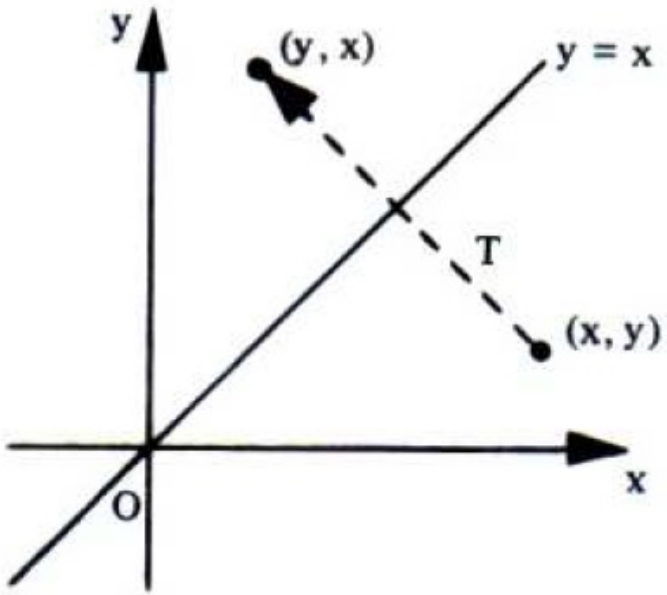
$$(x, y) \longmapsto (-x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Reflexão em torno da reta $y = x$

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$



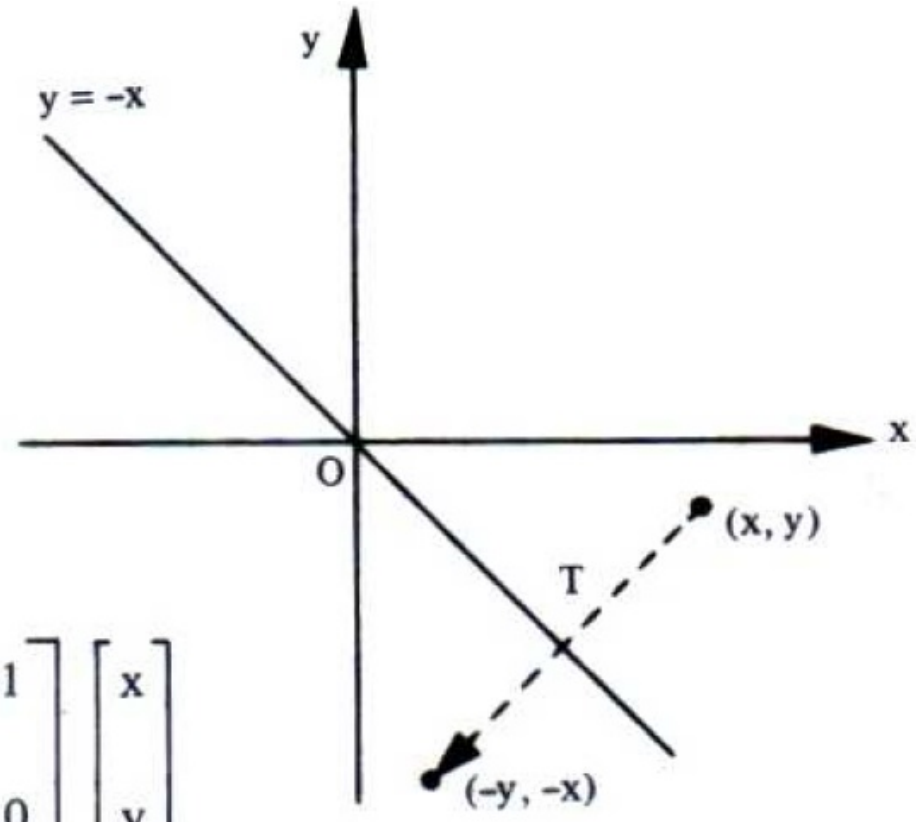
ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno da reta $y = -x$

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-y, -x)$$



ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

6.2. DILATAÇÕES E CONTRAÇÕES

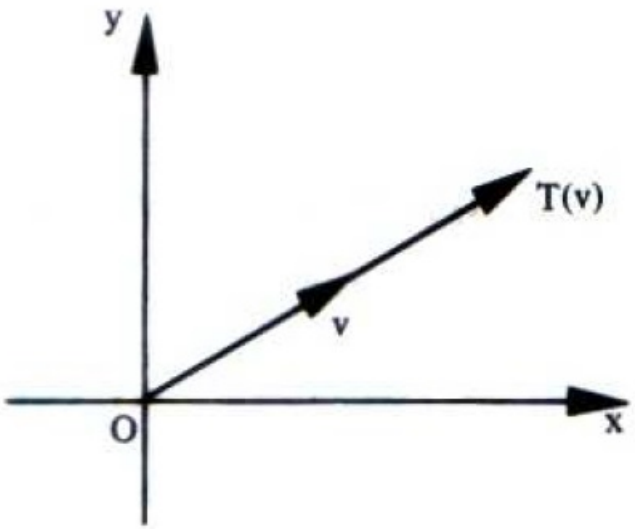
Dilatação ou contração na direção do vetor

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto \alpha(x, y),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



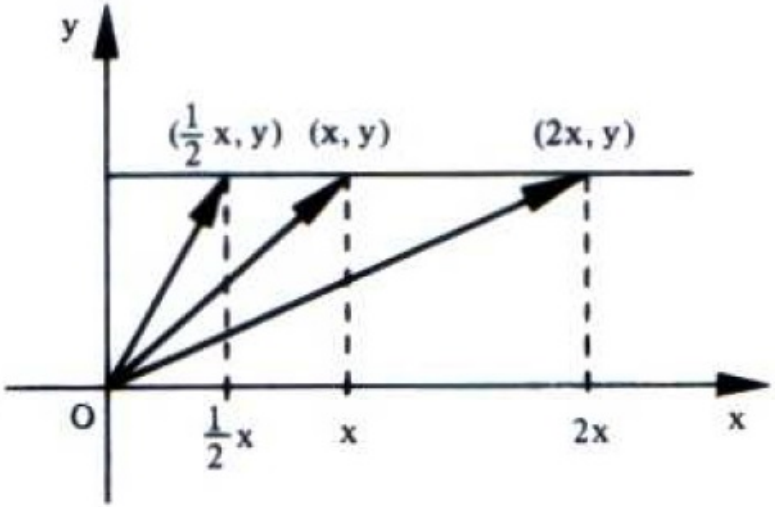
Dilatação ou contração na direção eixo x

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (\alpha x, y), \ \alpha > 0$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Observemos que:

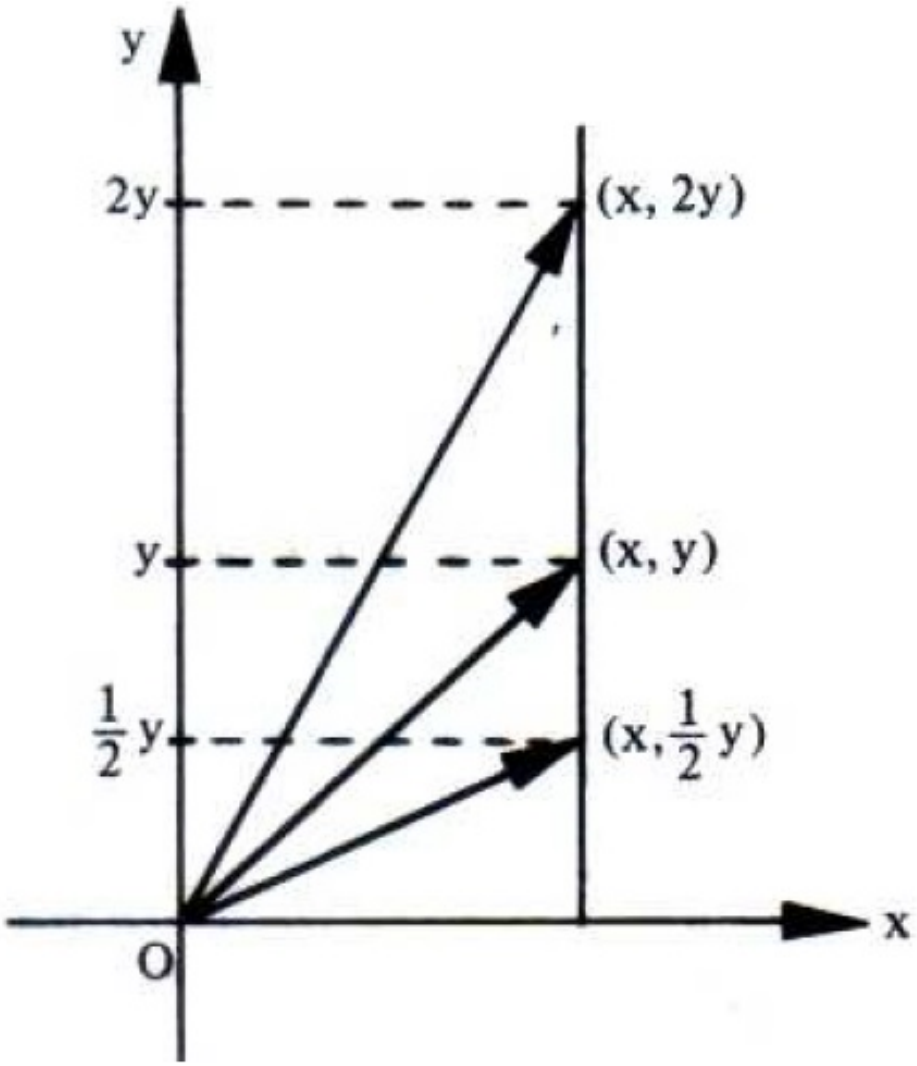
se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor.

Dilatação ou contração na direção eixo *y*

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, \alpha y), \ \alpha > 0$$



6.3. CISALHAMENTOS

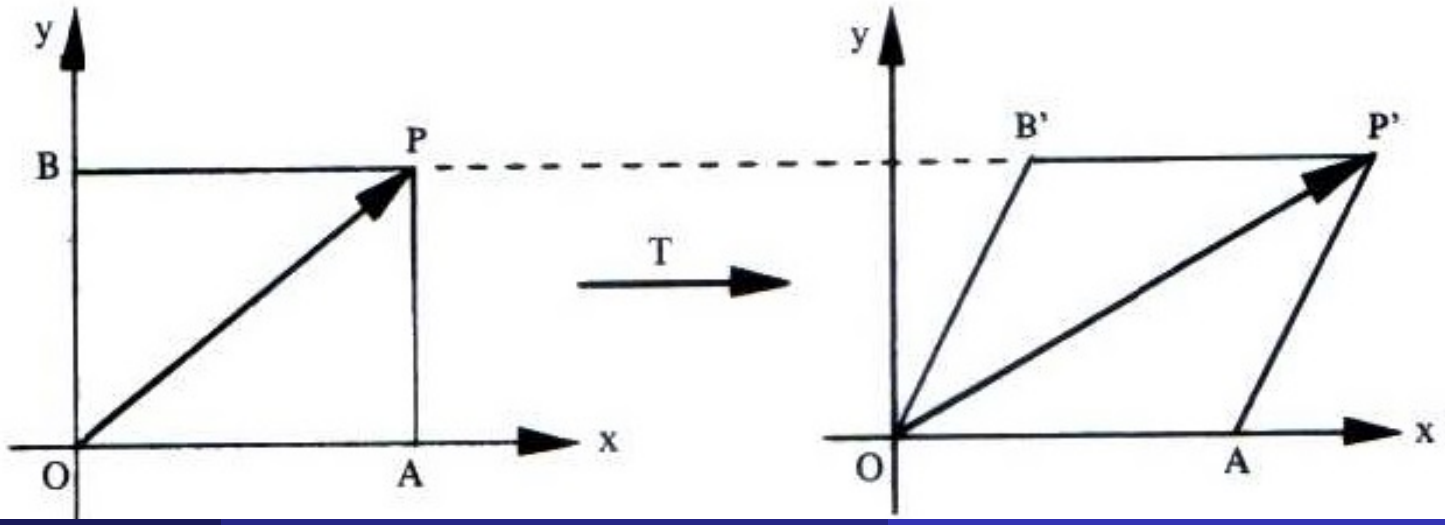
Cisalhamento na direção do eixo *x*

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x + \alpha y, y)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Cisalhamento na direção do eixo *y*

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

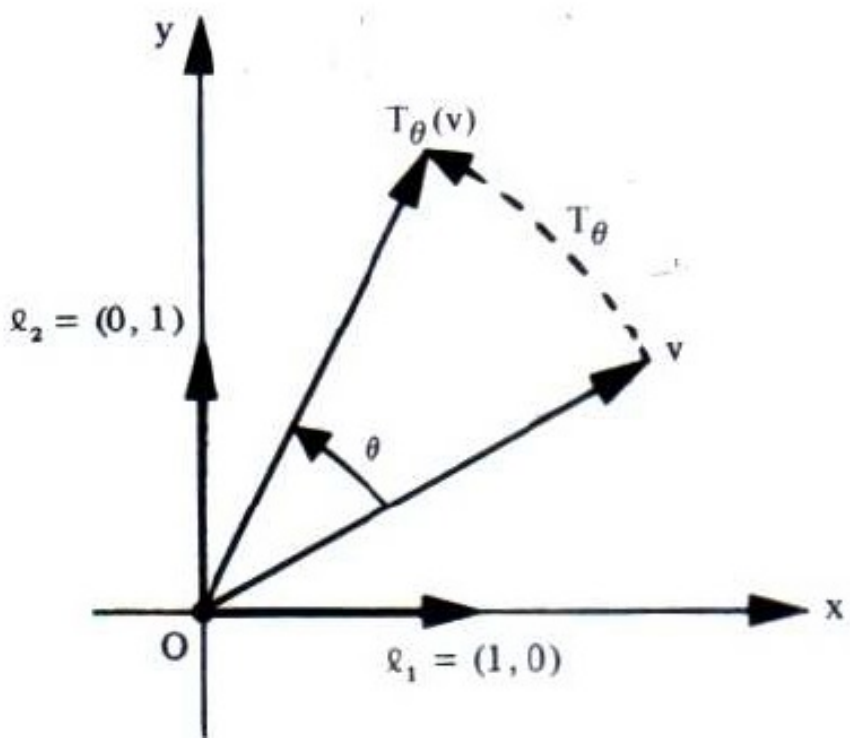
$$(x, y) \longmapsto (x, y + \alpha x)$$

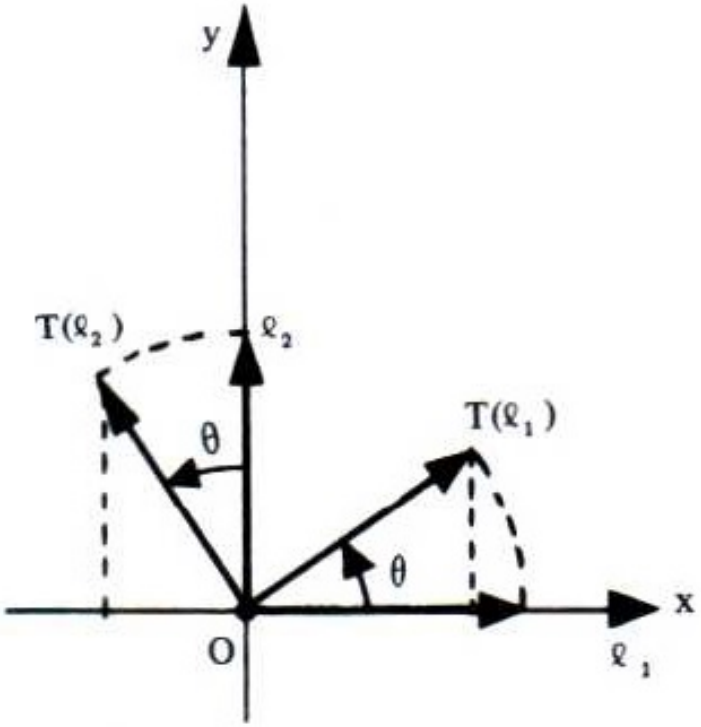
A matriz canônica desse cisalhamento é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

6.4. ROTAÇÃO

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina uma transformação linear $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$





Exercícios e demonstrações

EM AULA

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

Thanks!