Capítulo 4: **Derivada**

Parte 1

- A reta tangente;
- A derivada de uma função num ponto;
- A derivada de uma função;
- Exemplos e exercícios.

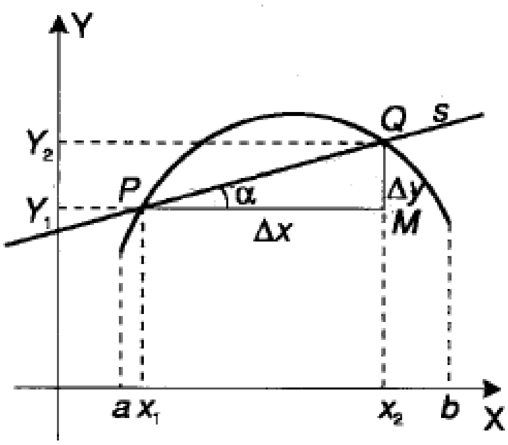
A reta tangente (contexto geométrico):

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), como na Figura

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

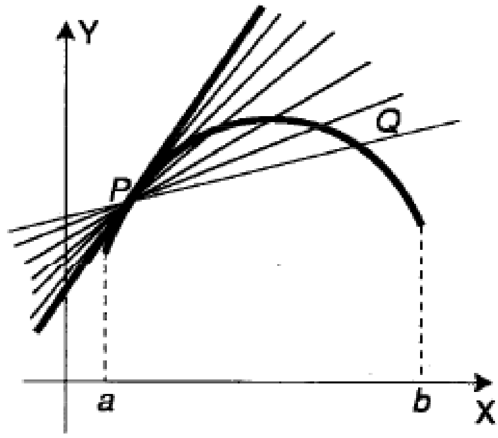
Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura).

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva em P.



Definição. Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{1}$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1) na forma

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

Equação da Reta Tangente. Se a função $f(x)$ é contínua em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

(i) A reta que passa por P tendo inclinação

$m(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite existe. Neste caso temos a equação

$$y - f(x_1) = m(x - x_1). \qquad (3)$$

(ii) A reta $x = x_1$ se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

Exemplos:

(i) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1 \\ &= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1. \end{aligned}$$

Usando (2), vem:

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x^2) - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} = 2x_1 - 2. \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é

$m(x_1) = 2x_1 - 2.$

(ii) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

O ponto da curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

Vamos encontrar a inclinação da curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P\ (2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro, a inclinação da curva num ponto (x_1, y_1). Temos,

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} \\
&= 4x_1.
\end{aligned}$$

Como $m\ (x_1) = 4x_1$, então $m\ (2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Usando (3), escrevemos a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$.

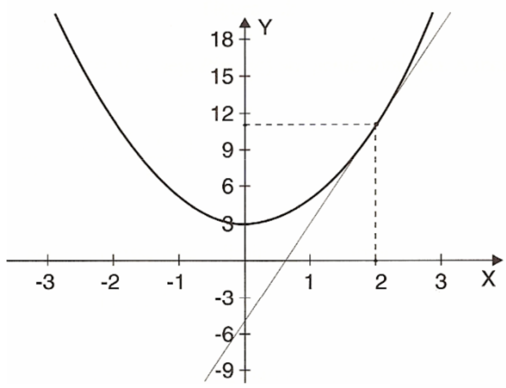
Temos,

$y - f\ (x_1) = m\ (x - x_1)$

$y - 11 = 8\ (x - 2)$, ou ainda,

$8x - y - 5 = 0$.

A Figura mostra a visualização da reta $8x - y - 5 = 0$, que é tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P(2, 11)$.



A derivada de uma função num ponto:

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f linha de x, no ponto x_1), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$, quando este limite existe.

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como vimos na seção anterior, este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1, representa a inclinação da curva neste ponto.

A derivada de uma função:

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se f linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, se este limite existir.

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Uma outra notação utilizada para representar a derivada é:

$\frac{dy}{dx}$ (lê-se a derivada de y em relação a x).

Exemplos:

(*i*) Dada $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(2 + \Delta x)^2 + 6(2 + \Delta x) - 1 - (5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20 + 20\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 12 + 6\Delta x - 20 - 12}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{26\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(26 + 5\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (26 + 5\Delta x) = 26.$$

(*ii*) Dada $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3}$, encontre $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x + \Delta x - 2}{x + \Delta x + 3} - \frac{x - 2}{x + 3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - 2)(x + 3) - (x - 2)(x + \Delta x + 3)}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + 3\Delta x - 6 - x^2 - x\Delta x - x + 2\Delta x + 6}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)}$$

$$= \frac{5}{(x + 3)^2}.$$

Continuidade de funções deriváveis:

Teorema: Toda função derivável num ponto x_1 é contínua neste ponto.

MAS, f(x) ser contínua em x_1 não implica a existência de f'(x1).

Capítulo 4: **Derivada**

Parte 2

- Regras de derivação;
- Derivada da função composta

Regras de derivação:

1. Função constante:

Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Prova. Seja $f(x) = c$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Regra da Potência:

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Exemplos

(*i*) Se $f(x) = x^5$ então $f'(x) = 5x^4$.

(*ii*) Se $g(x) = x$ então $g'(x) = 1$.

(*iii*) Se $h(x) = x^{10}$ então $h'(x) = 10x^9$.

3. Derivada de uma constante por uma função:

Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c\,f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então
$g'(x) = c\,f'(x)$.

Exemplos

(*i*) Se $f(x) = 8x^2$ então $f'(x) = 8(2x) = 16x$.

(*ii*) Se $g(z) = -2z^7$ então $g'(z) = -2(7z^6) = -14z^6$.

4. Derivada da soma de funções:

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então
$h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exemplos

(*i*) Seja $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (4x^3) + 8 \cdot 1 + 0 \\ &= 12x^3 + 8. \end{aligned}$$

(*ii*) Seja $g(y) = 9y^5 - 4y^2 + 2y + 7$. Então,

$$\begin{aligned} g'(y) &= 9 \cdot (5y^4) - 4 \cdot (2y) + 2 \cdot 1 + 0 \\ &= 45y^4 - 8y + 2. \end{aligned}$$

5. Derivada do produto de funções:

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Exemplos

(*i*) Seja $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$. Então,

$$f'(x) = (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x) + (x^4 + x^2)(6x^2).$$

(*ii*) Seja $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 5)(t^6 + 4t)$. Então,

$$f'(t) = \frac{1}{2}[(t^2 + 5)(6t^5 + 4) + (t^6 + 4t)(2t)].$$

5. Derivada do quociente de funções:

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos

a) Encontrar $f'(x)$ sendo $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 3)(2 \cdot 4x^3 - 0) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 5x + 3)(8x^3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}.$$

b) Se $g(x) = \frac{1}{x}$, encontrar $g'(x)$.

Temos,

$$g'(x) = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2}.$$

Proposição. Se $f(x) = x^{-n}$ onde n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$.

Prova. Podemos escrever $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

Aplicando a proposição 4.10.10, vem

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-2n}$$

$$= -n\,x^{-n-1}.$$

Exercícios ...

Derivada de Função composta:

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g\,[f(x)]$, isto é, podemos considerar a função composta $(g_0 f)\ (x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g_0 f$ em termos das derivadas de f e g.

6. Regra da Cadeia

Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g\,[f(x)]$ tem derivada que é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y'(x) = g'(u) \cdot f'(x) .$$

Exemplos:

a) Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determinar dy/dx.

Vimos anteriormente que podemos escrever $y = g(u) = u^7$, onde $u = x^2 + 5x + 2$. Assim, pela regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 7u^6 \cdot (2x+5) \\ &= 7(x^2+5x+2)^6 \cdot (2x+5). \end{aligned}$$

b) Dada a função $y = \left(\dfrac{3x + 2}{2x + 1}\right)^5$, encontrar y'.

Podemos escrever $y = u^5$, onde $u = \dfrac{3x + 2}{2x + 1}$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 5u^4 \cdot \frac{(2x + 1) \cdot 3 - (3x + 2) \cdot 2}{(2x + 1)^2}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{3x + 2}{2x + 1}\right)^4 \cdot \frac{6x + 3 - 6x - 4}{(2x + 1)^2}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{3x + 2}{2x + 1}\right)^4 \cdot \frac{-1}{(2x + 1)^2}.$$

Proposição. Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Exemplos:

(*i*) Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$, determinar $f'(x)$.

Podemos escrever

$f(x) = 5(x^2 + 3)^{1/2}$.

Assim,

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

c) Dada a função $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$, determinar $g'(t)$.

Escrevendo a função dada como um produto, temos

$g(t) = t^2.(t^3 + 1)^{-1/3}$.

Assim,

$$g'(t) = t^2 \left(\frac{-1}{3}\right)\left(t^3 + 1\right)^{\frac{-1}{3} - 1} \cdot 3t^2 + (t^3 + 1)^{-1/3} \cdot 2t$$

$$= -t^4 (t^3 + 1)^{-4/3} + 2t (t^3 + 1)^{-1/3}.$$

Podemos resumir as proposições anteriores na seguinte tabela de derivadas:

Tabela. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis e c uma constante qualquer.

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$.

(3) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(5) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

(7) $y = u^{\alpha}, 0 \neq \alpha \in Q \Rightarrow y' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$.

Exemplos. Determinar a derivada das funções:

$$(i) \quad y = x^8 + (2x+4)^3 + \sqrt{x}\,.$$

$$y' = 8x^7 + 3(2x+4)^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= 8x^7 + 6(2x+4)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

$$\text{(ii)} \quad y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}.$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2-3}) \cdot 1 - (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-1/2} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2-3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-3} - x(x+1)/\sqrt{x^2-3}}{x^2-3}$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-3) - x(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}}{x^2-3} = \frac{-3-x}{(x^2-3)\sqrt{x^2-3}}.$$

$$
\begin{aligned}
(iii)\quad y &= 3x\,(8x^3 - 2). \\
y' &= 3x\,(24x^2) + (8x^3 - 2)\cdot 3 \\
&= 72x^3 + 24x^3 - 6 \\
&= 96x^3 - 6.
\end{aligned}
$$

$(iv)\quad y = \sqrt[3]{6x^2 + 7x + 2}\,.$

Podemos escrever $y = (6x^2 + 7x + 2)^{1/3}$.

Temos,

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{3}\,(6x^2 + 7x + 2)^{-2/3}\cdot(12x + 7) \\
&= \frac{12x + 7}{3\,\sqrt[3]{(6x^2 + 7x + 2)^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4: Derivada

Parte 3

- Derivadas de funções elementares;
- Derivadas sucessivas.

Derivadas das funções elementares:

Exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

1. **Derivada da função exponencial:**

Se $y = a^x$, $(a > 0$ e $a \neq 1)$ então

$y' = a^x \ln a$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$.

Caso Particular:

Se $y = e^x$ então

$y' = e^x \cdot \ln e \cdot x' = e^x$,

onde e é o número neperiano $= 2{,}71828\ldots$.

2. Derivada da função logaritmica:

Se $y = \log_a x \; (a > 0, \;\; a \neq 1)$, então

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Caso Particular: Se $y = \ln x$ então $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \ln e \; = \dfrac{1}{x}.$

3. Derivada da função exponencial composta:

Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x,

deriváveis num intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall \; x \in$ I então

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = 3^{2x^2 + 3x - 1}$.

Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, temos $y = 3^u$. Portanto,

$$y' = 3^u \cdot \ln 3 \cdot u'$$

$$= 3^{2x^2 + 3x - 1} \cdot \ln 3 \cdot (4x + 3).$$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Temos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, onde $u = \sqrt{x}$. Assim,

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot u'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Fazendo $y = e^u$ com $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, temos:

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{x+1/x-1} \cdot \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= e^{x+1/x-1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

d) $y = e^{x \cdot \ln x}$.

Neste caso fazemos $y = e^u$, onde $u = x \cdot \ln x$.

Então,

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

$$= e^{x \cdot \ln x}\left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1\right]$$

$$= e^{x \cdot \ln x}(1 + \ln x).$$

e) $y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)$.

Temos $y = \log_2 u$, onde $u = 3x^2 + 7x - 1$. Portanto,

$$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_2 e.$$

$$= \frac{6x + 7}{3x^2 + 7x - 1} \cdot \log_2 e.$$

f) $y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$.

Temos $y = \ln u$, onde $u = \frac{e^x}{x+1}$. Logo,

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)e^x - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}}{\frac{e^x}{x+1}} = \frac{x}{x+1}.$$

Derivadas das funções trigonométricas: seno e cosseno

Função Seno:

Se $y = \text{sen}\, x$ então

$y' = \cos x.$

Função Cosseno:

Se $y = \cos x$, então

$y' = -\text{sen}\, x.$

Derivadas das demais funções trigonométricas:

Por exemplo,

se $y = \text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, então $y' = \sec^2 x$

De fato, usando a regra do quociente, obtemos

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\, x\ (-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x.$$

Similarmente, encontramos:

Se $y = \text{cotg}\, x$ então $y' = -\text{cosec}^2\, x$;

se $y = \sec x$ então $y' = \sec x \cdot \text{tg}\, x$ e

se $y = \text{cosec}\, x$ então $y' = -\text{cosec}\, x \cdot \text{cotg}\, x$.

Exemplos:

Determinar a derivada das seguintes funções:

a) $y = \text{sen}\,(x^2)$.

$$\begin{aligned} y &= \text{sen}\, u,\ u = x^2. \\ y' &= (\cos u)\, u' \\ &= [\cos(x^2)] \cdot 2x \\ &= 2x \cos(x^2). \end{aligned}$$

b) $y = \cos(1/x)$.

$y = \cos u, u = (1/x)$.

$y' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$

$= [-\operatorname{sen}(1/x)] \cdot -1/x^2$

$= \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen}(1/x)$.

c) $y = 3 \operatorname{tg} \sqrt{x} + \operatorname{cotg} 3x$.

$y' = (3 \operatorname{tg} \sqrt{x})' + (\operatorname{cotg} 3x)'$

$= 3 \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' + (-\operatorname{cosec}^2 3x) \cdot (3x)'$

$= 3 \sec^2 \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - (\operatorname{cosec}^2 3x)3$.

d) $y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{cotg} x}$.

$$y' = \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(\cos x)' - \cos x(1 + \operatorname{cotg} x)'}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(-\operatorname{cosec}^2 x)}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{cotg} x + \cos x \operatorname{cosec}^2 x}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}.$$

e) $y = \sec (x^2 + 3x + 7)$.

$y = \sec u, \; u = x^2 + 3x + 7.$

$y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$

$= [\sec (x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg} (x^2 + 3x + 7)] \cdot (2x + 3)$

$= (2x + 3) \sec (x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg} (x^2 + 3x + 7).$

f) $y = \operatorname{cosec}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

$$y = \operatorname{cosec} u \,, \quad u = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x-1)^2} \operatorname{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Derivadas Sucessivas

Seja f uma função definida num certo intervalo. A sua derivada f ´ é uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f ´ derivável.

Definição: Seja f uma função derivável. Se f ´ também for derivável, então a sua derivada é chamada de derivada segunda de f e é representada por f ´´ .

Se f ´´ é uma função derivável, sua derivada, representada por f ´´´, é chamada de derivada terceira da variável da função inicial.

A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}$, é obtida derivando-se a derivada de ordem n-1 de f.

Exemplos:

(i) Se f(x) = $3x^2 + 8x + 1$, então

$f'(x) = 6x + 8$ e

$f''(x) = 6$

(ii) Se f(x) = tg(x), então

$f'(x) = \sec^2(x)$ e

$f''(x) = 2\sec(x) \cdot \sec(x) \cdot tg(x)$

$= 2\sec^2(x) \cdot tg(x)$

Mais exemplos:

(i) Se $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então:

$$f'(x) = 15x^4 + 16x$$

$$f''(x) = 60x^3 + 16$$

$$f'''(x) = 180x^2$$

$$f^{iv}(x) = 360x$$

$$f^{(v)}(x) = 360$$

$$f^{(vi)}(x) = 0$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ para } n \geq 6.$$

(ii) Se $f(x) = e^{x/2}$, então:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8}e^{x/2}$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}e^{x/2}.$$

(iii) Se $f(x) = \text{sen } x$, então:

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\text{sen } x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{iv}(x) = \text{sen } x$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{para } n = 1, 5, 9, ... \\ -\text{sen } x, & \text{para } n = 2, 6, 10, ... \\ -\cos x, & \text{para } n = 3, 7, 11, ... \\ \text{sen } x, & \text{para } n = 4, 8, 12, ... \end{cases}$$