Conjuntos numéricos

Notas de aula

Fonte: Leithold 1 e Cálculo A - Flemming

Dr. Régis Quadros

DME - UFPel

Conjuntos numéricos

Os primeiros conjuntos numéricos conhecidos pela humanidade são os chamados inteiros positivos ou naturais. Temos então o conjunto

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, ...\}. \tag{1}$$

Os números -1,-2,-3,... são chamados inteiros negativos. A união do conjunto dos números naturais com os inteiros negativos e o zero (0) define o conjunto dos números inteiros que são denotados por

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}. \tag{2}$$

Os números da forma m/n, n$\neq$0, m,n $\in \mathbb{Z}$, são chamados de frações e formam o conjunto dos números racionais. Denota-se

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \{x | x = m/n, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \tag{3}$$

Finalmente encontramos números que não podem ser representados na forma m / n, n $\neq$0, m,n $\in \mathbb{Z}$, tais como $\sqrt{2}$ = 1,414..., π = 3,141592..., e = 2,71.... Esses números formam o conjunto de números irracionais, denotado por $\mathbb{Q}'$.

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o conjunto dos números reais, que é denotado por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}U\mathbb{Q}'. \tag{4}$$

A seguir apresenta-se os axiomas, definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais.

Axiomas da adição e da multiplicação

No conjunto dos números reais introduzimos duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem os axiomas a seguir:

1. **Fechamento**: Se a e $b \in \mathbb{R}$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma, e existe um e somente um número real, denotado por ab (ou $a \times b$, ou $a.b$), chamado produto.
2. **Comutatividade**:Se a, $b \in \mathbb{R}$, então $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$.
3. **Associatividade**:Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a.(b.c) = (a.b).c$.
4. **Distributividade**:Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então $a.(b + c)$ = $a.b + a.c$.

Axiomas da adição e da multiplicação

5. **Existência de elemento neutro**: Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$ tais que $a + 0 = a$ e $a.1 = a$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
6. **Existência de simétricos**: Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
7. **Existência de inversos**: Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $1/a$, tal que $a.1/a = 1$.
8. **Subtração**: Se $a, b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b, denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$.
9. **Divisão**: Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a e b é definido por $a/b = a.1/b$.

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos e os objetos de um conjunto são chamados de elementos. Se todo elemento de um conjunto S for também elemento de um conjunto T, então S será um subconjunto de T.
Em cálculo estamos interessados no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.
Dois exemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ são o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais e $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

Vamos usar o símbolo $\in$ para indicar que um determinado elemento pertence a um conjunto. Assim, podemos por exemplo escrever, $8 \in \mathbb{N}$ e lemos: "8 é um elemento de $\mathbb{N}$". A notação $a, b \in S$ indica que ambos a e b são elementos de S. O símbolo $\notin$ indica "não é um elemento de". Assim, entendemos $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ como "$\frac{1}{2}$ não é um elemento de $\mathbb{N}$".

Conjuntos

Um par de chaves usadas para delimitar palavras ou símbolos pode descrever um conjunto. Se S for o conjunto dos números naturais menores do que 6, podemos escrever o conjunto S como:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Podemos também escrever o conjunto S como:

{x, tal que x seja um número natural menor do que 6}

que lemos: “o conjunto de todos os x, tal que x seja um número natural menor do que 6”.

Conjuntos

Dois conjuntos A e B serão iguais, e escrevemos A = B, se A e B tiverem elementos idênticos.

A união de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, que lemos “A união B”, é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou em B, ou em ambos.

A intersecção de A e B, denotada por $A \cap B$, que lemos “A intersecção B”, é o conjunto dos elementos que estão em A e B.

O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado de conjunto vazio, sendo denotado por $\varnothing$.

Exemplo 1: Suponha A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {1, 4, 9, 16} e C = {2, 10}. Então:

$A \cup B = \{1,2,4,6,8,9,10,12,16\}$

$B \cup C = \{1,2,4,9,10,16\}$

$A \cap B = \{4\}$

$B \cap C = \varnothing$

Desigualdades

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

Axioma de ordem: No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado números positivos tal que:

1. se $a \in \mathbb{R}$, uma das 3 afirmações é correta: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo;
2. a soma de dois números positivos é positiva;
3. o produto de dois números positivos é positivo.

Definição: O número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

Desigualdades

Definição: Os símbolos < (menor que) e > (maior que) são definidos como:

- a < b $\Leftrightarrow$ b - a é positivo;
- a > b $\Leftrightarrow$ a - b é positivo.

Definição: Os símbolos $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que) são definidos como:

- a $\leq$ b $\Leftrightarrow$ a < b ou a = b;
- a $\geq$ b $\Leftrightarrow$ a > b ou a = b.

Expressões que envolvem os símbolos definidos acima são chamadas de desigualdades, a < b e a > b são desigualdades estritas, enquanto a $\leq$ b e a $\geq$ b são desigualdades não estritas.

Desigualdades

Propriedades: Sejam a, b, c e d $\in \mathbb{R}$, então:

- Se a > b e b > c, então a > c
- Se a > b e c > 0, então ac > bc
- Se a > b e c < 0, então ac < bc
- Se a > b, então a + c > b + c para todo real c
- Se a > b e c > d, então a + c > b + d
- Se a > b > 0 e c > d > 0, então ac > bd

As propriedades enunciadas podem ser facilmente provadas usando-se as definições anteriores. Por exemplo:

Valor absoluto

Definição: O valor absoluto de a, denotado por $|a|$, é definido como:

$$|a| = a, \text{ se } a \geq 0$$
$$|a| = -a, \text{ se } a < 0$$

Interpretação geométrica: Geometricamente o valor absoluto de a, também chamado de módulo de a, representa a distância entre a e 0, ou seja,

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Valor absoluto

Propriedades:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a>0$
- $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a>0$
- Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- (Desigualdade triangular) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$
- Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$

Intervalos

Intervalos são conjuntos infinitos de números reais, como segue:

Intervalo aberto: $\{x \,/\, a < x < b\}$ denota-se (a,b) ou $]a,b[$.
Intervalo fechado: $\{x \,/\, a \leq x \leq b\}$ denota-se $[a,b]$.
Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda: $\{x \,/\, a < x \leq b\}$ denota-se $(a,b]$ ou $]a,b]$.
Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda: $\{x \,/\, a \leq x < b\}$ denota-se $[a,b)$ ou $[a,b[$.
Intervalos infinitos:

- $\{x \,/\, x > a\}$ denota-se $(a,+\infty)$ ou $]a,+\infty[$
- $\{x \,/\, x \geq a\}$ denota-se $[a,+\infty)$ ou $[a,+\infty[$
- $\{x \,/\, x < b\}$ denota-se $(-\infty, b)$ ou $]-\infty,b[$
- $\{x \,/\, x \leq b\}$ denota-se $(-\infty,b]$ ou $]-\infty,b]$

Exemplos ...

Intervalos

Os intervalos são usados para representar conjuntos-soluções de desigualdades. O conjunto-solução de uma desigualdade é o conjunto de todos os números que satisfazem a desigualdade.

Exemplos ...

Exercícios ...

Funções - Parte 1

Notas de aula

Fonte: Leithold 1 e Cálculo A - Flemming

Dr. Régis Quadros

DME - UFPel

Função

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f : A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B.
O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por D(f).
B é chamado de contradomínio de f.

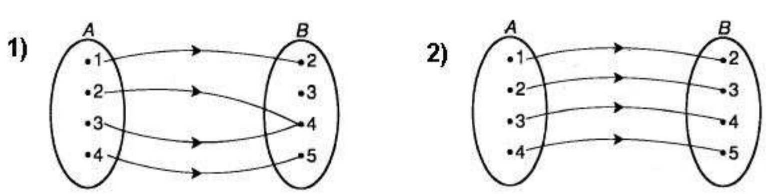
Escrevemos:

$$f\colon A \to B$$
$$x \to y = f(x)$$

Exemplos de Função

Exemplos: Sejam A = {1,2,3,4} e B = {2,3,4,5}.

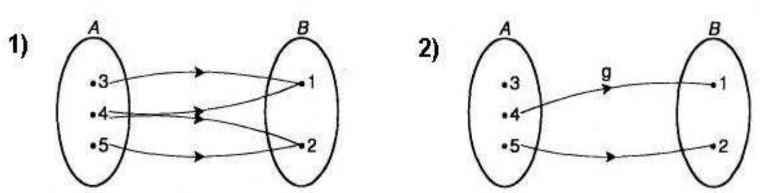
1. f: A $\to$ B dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.
2. g: A $\to$ B
   x $\to$ x + 1 é uma função de A em B.



Contra-Exemplos de Função

Contra - Exemplos: Sejam A = {3,4,5} e B = {1,2}.

1. f: A $\rightarrow$ B dada pelo diagrama a seguir não é uma função de A em B, pois o elemento 4 $\in$ A tem dois correspondentes em B.
2. g: A $\rightarrow$ B
   x $\rightarrow$ x - 3
   não é uma função de A em B, pois o elemento 3 $\in$ A não tem correspondente em B.



Imagem

Seja f: A $\rightarrow$ B.

- Dado $x \in$ A, o elemento $f(x) \in$ B é chamado de valor da função f no ponto x ou de imagem de x por f.
- O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado conjunto imagem de f e é denotado por Im(f).

Exemplo: Sejam A = {1,2,3,4,5} e B = $\mathbb{Z}$ e f: A $\rightarrow$ B definida pela regra que a cada elemento faz corresponder o dobro. Então:

- a regra que define f é y = 2x;
- a imagem do elemento 1 é 2, de 2 é 4, de 3 é 6, de 4 é 8 e de 5 é 10;
- o domínio de f, D(f) = A;
- a imagem de f, Im(f) = {2,4,6,8,10}.

Exemplos

Exemplo: Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

Então, D(f) = $\mathbb{R}$; Im(f) = [0,+∞).

Quando trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}$, é usual caracterizar a função apenas pela regra ou fórmula que a define. Neste caso, entende-se que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais para os quais a função está definida.

Gráficos

Definição: Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos de $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f.

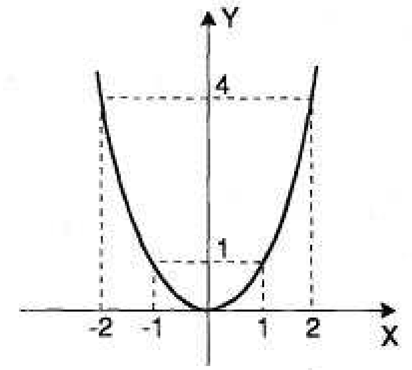
Recordando: Como fazer um gráfico de uma função?

Assinalamos uma série de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas. Vejamos:

Exemplos de Gráficos

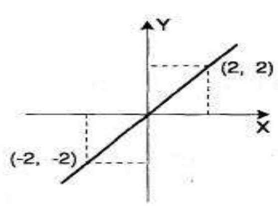
Exemplo 1: O gráfico da função $f(x) = x^2$ consiste em todos os pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = x^2$.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



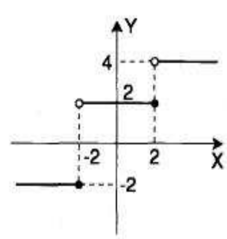
Exemplos de Gráficos

Exemplo 2: O gráfico da função $f(x) = x$ consiste em todos os pares $(x,x) \in \mathbb{R}^2$.



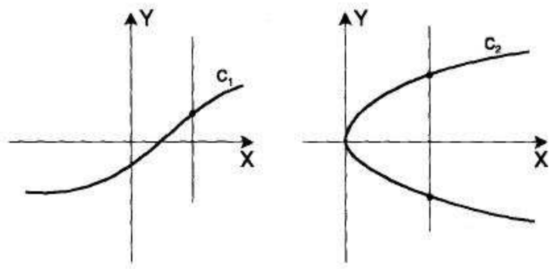
Exemplo 3: O gráfico da função $f> = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 < x \leq 2 \\ 4, & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$



Gráficos

Pergunta: Dada uma curva c no plano xy, ela sempre representa o gráfico de uma função?
Resposta: Não
Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim a curva c só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva no máximo em um ponto. No gráfico abaixo, a curva c_1 representa uma função, enquanto a curva c_2 não representa.



Operações

Definição:
Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números, também podemos produzir novas funções através de operações. Essas são produzidas como segue:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
4. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

O domínio das funções $f+g$, $f-g$ e $f.g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domínio de f/g é a intersecção dos domínios f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Operações

Exemplos:
Sejam $f(x) = \sqrt{5-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-3}$. Então:

1. $(f+g)(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$;
2. $(f-g)(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}$;
3. $(f.g)(x) = \sqrt{5-x}.\sqrt{x-3}$;
4. $(f/g)(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-3}}$

Como $D(f) = (-\infty, 5]$ e $D(g) = [3, +\infty)$, então o domínio $f+g$, $f-g$ e $f.g$ é [3,5]. O domínio de f/g é (3,5]. O ponto 3 foi excluído porque $g(x) = 0$ quando $x = 3$.

Operações

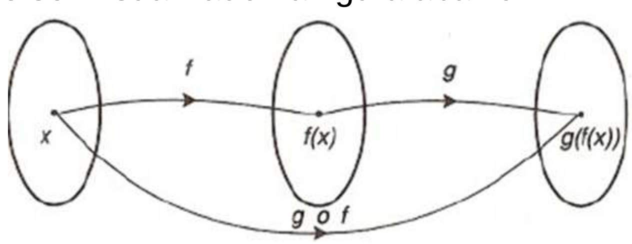
Definição:
Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos de x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Simbolicamente, $D(g \circ f) = \{x \in D(f)/f(x) \in D(g)\}$.

O diagrama pode ser visualizado na figura abaixo.



Operações

Exemplos:

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. Encontre $g \circ f$.

   Solução:
   Temos, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1$.
   Como $D(f) = [0, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty) \subset D(g) = (-\infty, +\infty)$,
   então, $D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty)$.

2. Sejam $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$; Encontrar:
   a) $g \circ f$;
   b) $f \circ g$;
   c) $f \circ f$;
   d) $g \circ g$.

Mais exemplos ...

Funções - Parte 2

Notas de aula

Fonte: Leithold 1 e Cálculo A - Flemming

Dr. Régis Quadros

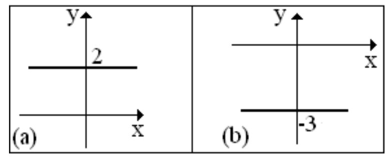
DME - UFPel

Funções especiais

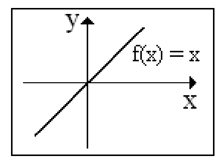
1. Função constante: É toda função do tipo $f(x) = k$, que asssocia a qualquer número real x um mesmo número real k.
O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.
Exemplos:

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = -3$



2. Função identidade:
É a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.
O gráfico desta função é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrante.
O domínio de $f(x) = x$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.



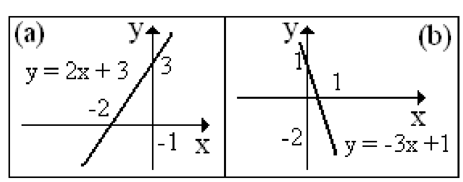
Funções especiais - continuação

3. Função do 1^o grau: é toda função que associa a cada número real x o número real $ax + b$, $a \neq 0$. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e linear.

- Quando $a > 0$ a função $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, a medida que x cresce, f(x) também cresce (Fig. (a)).
- Quando $a < 0$ a função $f(x) = ax + b$ é decrescente, isto é, a medida que x cresce, f(x) decresce (Fig. (b)).

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela aos eixos coordenados.

O domínio de $f(x) = ax + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

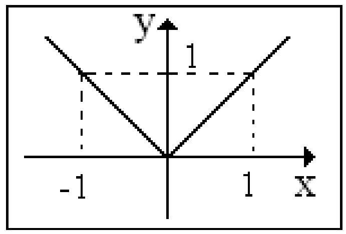


Funções especiais - continuação

4. Função módulo: A função definida por $y = |x|$ chama-se função módulo.

O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $Im(f) = [0, +\infty)$.

O gráfico desta função está ilustrado a seguir:



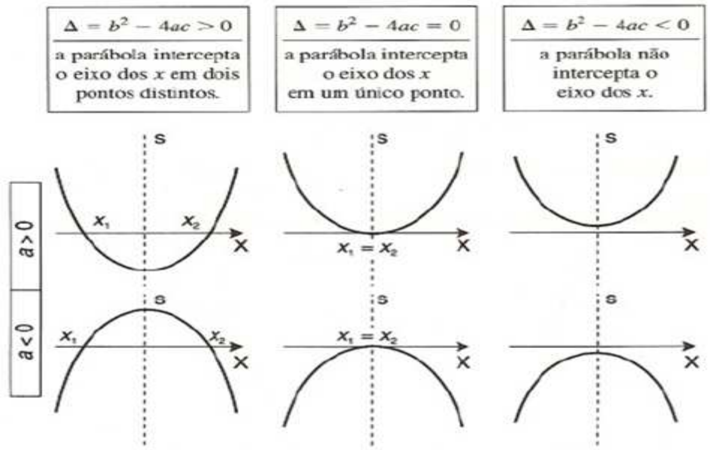
Funções especiais - continuação

5. Função quadrática: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é chamada função do 2^o grau ou quadrática.
O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}$.

- O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y.
- Se o coeficiente de x^2 for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima.
- Se $a < 0$, a parábola é voltada para baixo.
- A intersecção do eixo de simetria com a parábola é um ponto chamado vértice.
- A intersecção da parábola com o eixo dos x define os zeros da função.

Funções especiais - continuação

No quadro seguinte caracterizamos as diferentes possibilidades:



1. Raízes reais diferentes: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Raízes reais iguais: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
3. Não há raízes reais: $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

Funções especiais - continuação

Dada uma função quadrática qualquer $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, usando a técnica de completar os quadrados, podemos facilmente escrevê-la na forma

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

sendo (x_v, y_v) = $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ o vértice de parábola. Neste caso o eixo de simetria é dado por $x = x_v$.

Exemplo:

1. A parábola dada por $y = x^2 - 6x + 5$ por ser escrita como

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 6x) + 5 \\ &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4. \end{aligned}$$

O vértice da parábola é (x_v, y_v) = (3,-4) e o eixo de simetria é $x = 3$.

Funções especiais - continuação

2. A expressão $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ é muito útil quando queremos fazer um esboço rápido do gráfico de uma função quadrática, pois permite identificar a concavidade, o vértice e o eixo de simetria. Para obter um esboço do gráfico basta determinar mais alguns pontos, que podem ser tomados de um só lado do eixo de simetria. Dada a função

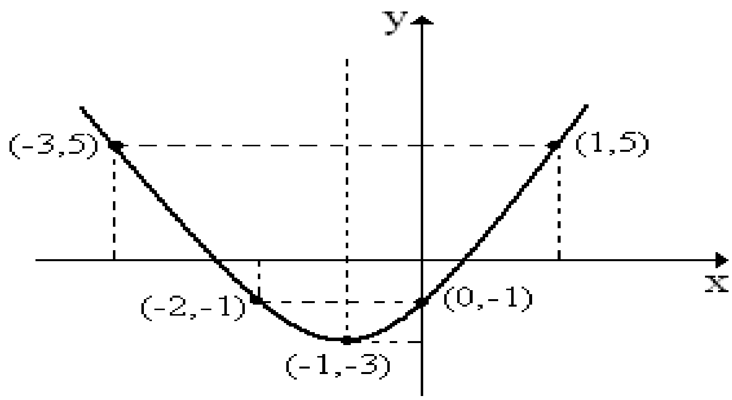
$$y = 2x^2 + 4x - 1$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2x - 1/2) \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) + 2(-3/2) \\ &= 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Funções especiais - continuação

Logo o eixo de simetria é $x = -1$ e o vértice (x_v, y_v) = (-1,-3). Como $a = 2 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, conforme gráfico abaixo.



Funções especiais - continuação

6. Função polinomial: é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ onde $a_0, a_1, ..., a_n$, $a_0 \neq 0$, são números reais chamados coeficientes e n, inteiro nao negativo, determina o grau da função.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos. Posteriormente faremos esboços de gráficos dessas funções com o auxílio das derivadas.

O domínio é sempre o conjunto dos números reais.

Funções especiais - continuação

Exemplos:

1. A função constante $f(x) = k$ é uma função polinomial de grau zero.
2. A função $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ é uma função polinomial de 1^o grau.
3. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é uma função polinomial do 2^o grau.
4. A função $f(x) = x^3$ é uma função polinomial chamada função cúbica.
5. A função $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$ é uma função polinomial de grau 5.

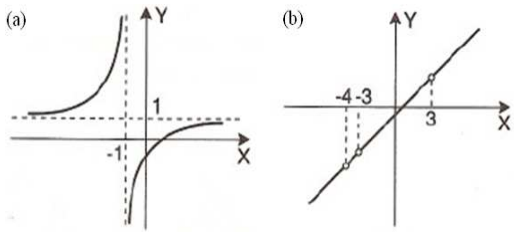
Funções especiais - continuação

7. Função racional: é a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.
O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo aqueles x tais que $q(x) = 0$.

Exemplo:

a) A função $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ é função racional de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

b) $f(x) = \frac{(x^2+3x-4)(x^2-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}$ é racional de domínio $D(f) = \mathbb{R} - (-4, -3, 3)$.



Funções - Parte 3

Notas de aula

Fonte: Leithold 1 e Cálculo A - Flemming

Dr. Régis Quadros

DME - UFPel

Funções pares e ímpares

Dizemos que uma função $f(x)$ é

- par se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.
- ímpar se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem.

Exemplos:

a) A função $f(x) = x^2$ é par, já que $f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$.

b) A função $f(x) = x^5 + x^3$ é ímpar, já que
$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$$

c) A função $f(x) = x^3 + 4$ não é nem par nem ímpar.

Funções periódicas

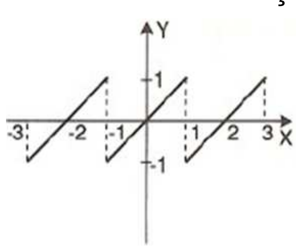
Uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$, onde T é o período da função $f(x)$. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$.

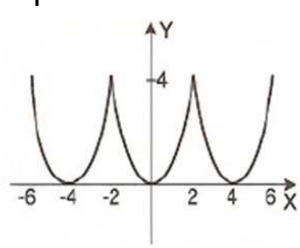
Exemplos:

a) Funções trigonométricas $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = cos(x)$ são periódicas de período $T = 2\pi$.

b) A função constante é periódica com período $T \neq 0$.

c) Abaixo encontra-se outras funções periódicas.

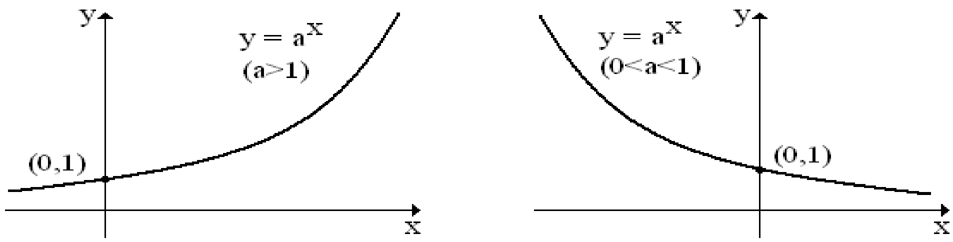




Funções elementares

1. Função exponencial: Chamamos de função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número real a^x, sendo a um número real, $0 < a \neq 1$, ou, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = a^x$.
O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$. A imagem é $Im(f) = (0, \infty)$.
Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$ podemos afirmar:

1. a curva que o representa está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1);
3. $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.



Funções elementares - continuação

2. Função logarítmica:
Dado um número real $a (0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que se associa a cada x o número $log_a x$.

As funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, onde $Im(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$, definida por

$$f(x) = log_a x$$

e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por

$$g(x) = a^x;$$

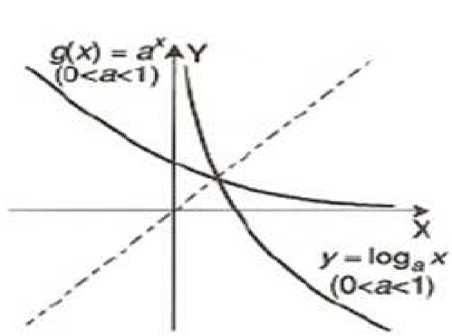
$0 < a \neq 1$, são inversas uma da outra.

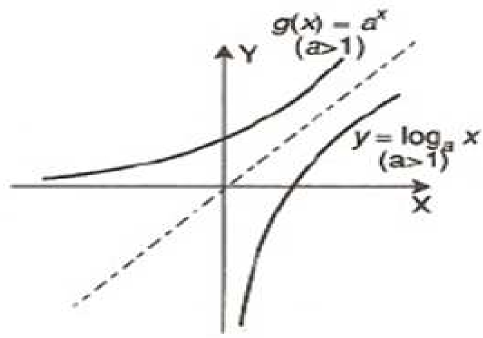
Temos $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Funções elementares - continuação

Com relação ao gráfico da função $f(x) = log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ podemos afirmar:

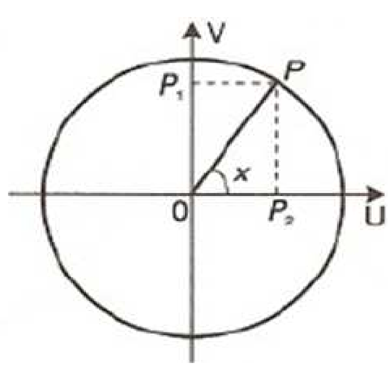
1. está todo à direita do eixo y;
2. corta o eixo das abcissas no ponto (1,0);
3. $f(x) = log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;
4. é simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação à reta $y = x$.





Funções trigonométricas

1. Função seno:
Seja x um número real. Marcamos um ângulo com medida x radianos na circunferência unitária com centro na origem. Seja P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x, com essa circunferência.



Denominamos seno de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema $U0V$.

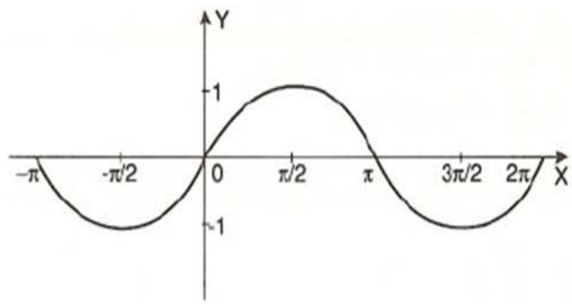
Funções trigonométricas - continuação

Definimos a função seno como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \sin x$, isto é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = \sin x$.

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo [-1,1].

A função $y = \sin x$ é periódica e seu período é 2π, pois $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

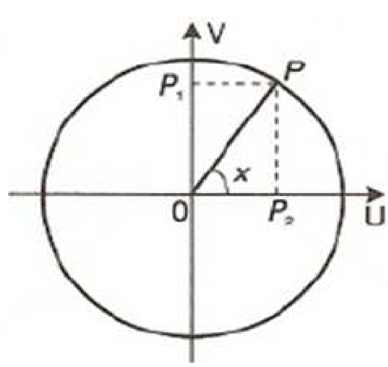
Em alguns intervalos $\sin x$ é crescente e em outros é decrescente. O gráfico da função $f(x) = \sin x$, denominado senóide, está representado abaixo.



Funções trigonométricas - continuação

2. Função cosseno:

Seja x um número real. Denominamos cosseno de x a abcissa $\overline{Op_2}$ do ponto P em relação ao sistema $U0V$.



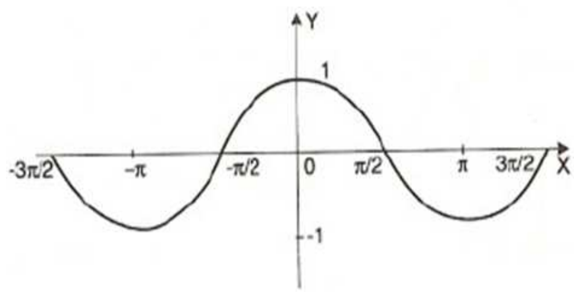
Definimos a função cosseno como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \cos x$, isto é, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = \cos x$.

Funções trigonométricas - continuação

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo [-1,1].

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Portanto, a função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Em alguns intervalos $\cos x$ é crescente e em outros é decrescente. O gráfico da função $f(x) = \cos x$, denominado cosenóide, está representado abaixo.



Funções trigonométricas - continuação

3. Função tangente, cotangente, secante e cossecante:
Estas funções são definidas em termos de seno e cosseno.

As funções tangente e secante são, respectivamente, denotadas pelos símbolos tg e sec e definidas por

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad sec\, x = \frac{1}{\cos x}$$

para todos os números reais x tais que $\cos x \neq 0$.

As funções cotangente e cosecante são, respectivamente, denotadas pelos símbolos $cotg$ e $cosec$ e definidas por

$$cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad cosec x = \frac{1}{\sin x}$$

para todos os números reais x tais que $\sin x \neq 0$.

Funções trigonométricas - continuação

O domínio das funções tgx e $secx$ é o conjunto de todos os números reais x para os quais $\cos x \neq 0$. Como $\cos x = 0$, quando x for $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$,..., isto é, quando $x = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos

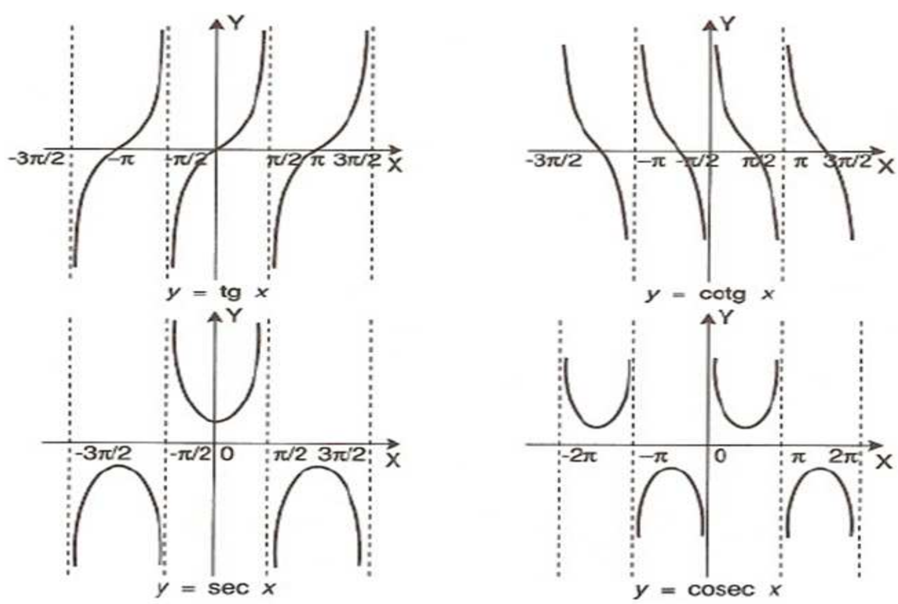
$$D(tg) = D(sec) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Analogamente, o domínio das funções $cotgx$ e $cosecx$ é o conjunto de todos os números reais x para os quais $\sin x \neq 0$. Como $\sin x = 0$ para $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$D(cotg) = D(cosec) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Funções trigonométricas - continuação

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na figura abaixo. Observe que as funções tangente e cotangente são periódicas de período π e que as funções secante e cossecante são periódicas de período 2π.



Capítulo 3: Limites

Parte 1

Fonte: Cálculo A - Flemming

- Noção intuitiva;
- Definição formal;
- Unicidade do limite;
- Propriedades dos limites;
- Limites laterais.

1. Noção intuitiva:

No conjunto dos números reais, podemos escolher um conjunto de números segundo qualquer regra preestabelecida. Analisando as sucessões numéricas:

⟹ (1) 1, 2, 3, 4, 5, ...

⟹ (2) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...

⟹ (3) 1, 0, −1, −2, −3, ...

⟹ (4) 1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, ...

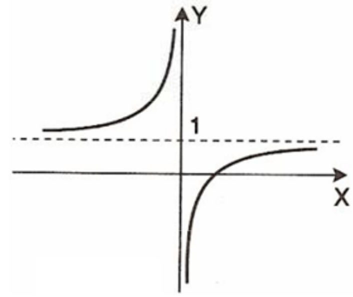
Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão tendem para o infinito ou que o limite da sucessão é infinito, ou seja **$x \to \infty$**

Na sucessão (2), os termos crescem, mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Dizemos que **$x \to 1$**.

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3) **$x \to -\infty$**.

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

Analisa-se agora alguns exemplos de limite de uma função:



Exemplo 1: Seja a função **y = 1 – 1 / x**

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1.000	...

x	−1	−2	−3	−4	−5	...	−100	...	−500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que: **y → 1** quando **x → ±** ∞.

Denota-se $\lim_{x \to \pm\infty} (1 - 1/x) = 1$

Exemplo 2:

A função $y = x^2 + 3x - 2$ tende para $+\infty$ quando $x \to \pm\infty$.

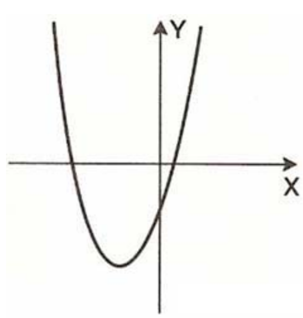
Denota-se $\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + 3x - 2) = +\infty$.

De fato, intuitivamente, basta analisar o gráfico e as sucessões da Tabela .

Tabela

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1.000	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10.298	...	1.002.998	...

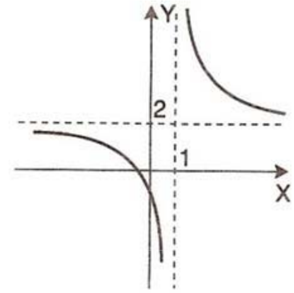
x	−1	−2	−3	−4	−5	−6	...	−100	...	−500	...
y	−4	−4	−2	2	8	16	...	9.698	...	248.498	...



Exemplo 3.

A função $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tende para 2 quando $x \to \pm\infty$,

e escrevemos $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2.$



Tabela

x	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	3,5	5	8	14	32	302	3002	30002	...

x	– 1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	0,5	– 1	– 28	– 298	– 2998	– 29998	...

Observando a Figura e a Tabela ainda podemos dizer que $y \to +\infty$ quando $x \to 1$ através de valores maiores do que 1 e que $y \to -\infty$ quando $x \to 1$ através de valores menores do que 1. Neste caso, estamos nos referindo aos *limites laterais* denotados por:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty,$$

respectivamente chamados *limite à direita* e *limite à esquerda*.

Exemplo 4:

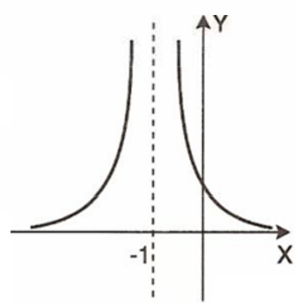
A Figura nos mostra o gráfico da função $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Observando a Figura e a Tabela podemos afirmar que esta função tende para o infinito quando x tende para -1 e escrevemos

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$



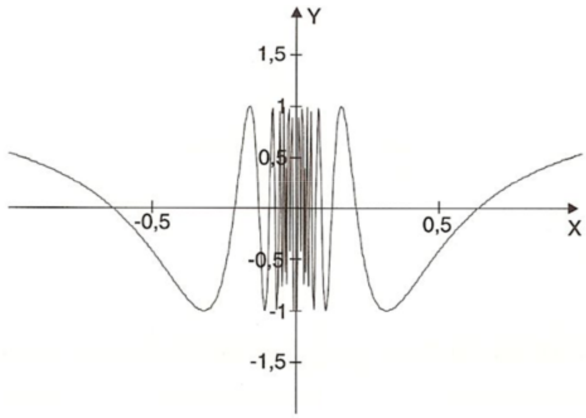
Tabela

x	-3	-2	$-1{,}5$	$-1{,}25$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

x	1	0	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Exemplo 5

Na Figura temos o gráfico da função $y = \cos\frac{1}{x}$. Observando esta figura e a Tabela , podemos afirmar que o gráfico dessa função oscila numa vizinhança de zero, sem tender para um limite.



Tabela

x	$\frac{1}{\pi} \cong 0{,}318309$	$\frac{1}{2\pi} \cong 0{,}159154$	$\frac{1}{3\pi} \cong 0{,}106103$	$\frac{1}{4\pi} \cong 0{,}0795774$	...
y	-1	1	-1	1	...

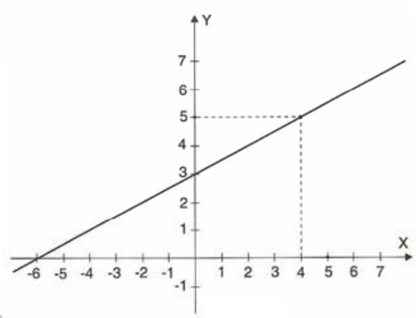
Exemplo 6:

Na Figura temos o gráfico da função $y = \frac{1}{2}x + 3$. De modo análogo aos exemplos anteriores, observando esse gráfico e a Tabela , podemos escrever que

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \lim_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$$

ou ainda,

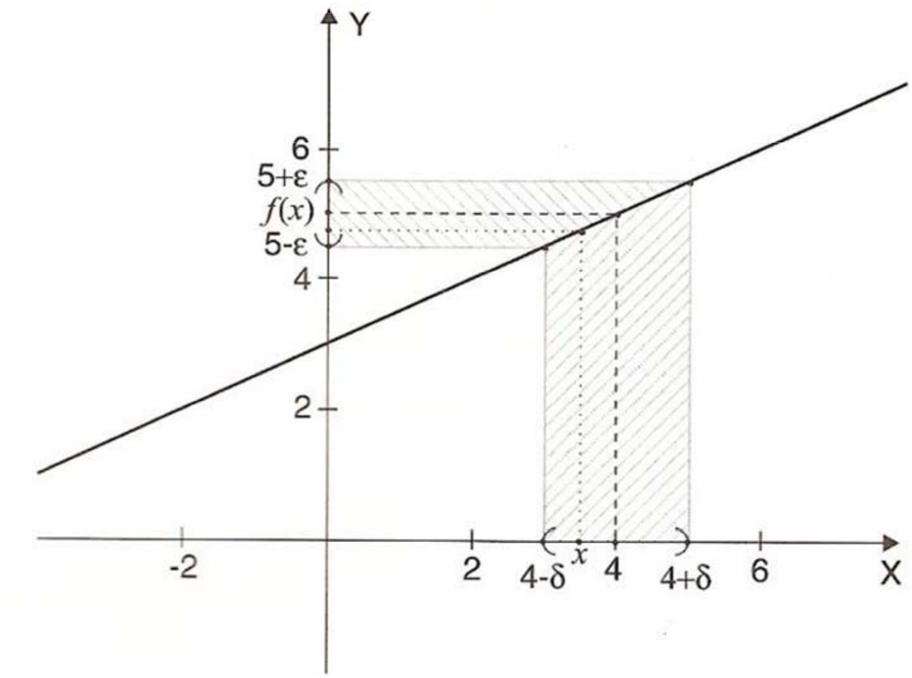
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5.$$



Tabela

x	5	4,5	4,1	4,01	4,001	4,0001	...
y	5,5	5,25	5,05	5,005	5,0005	5,00005	...

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	...
y	4,5	4,75	4,95	4,995	4,9995	4,99995	...



2. Definição formal de limite:

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Proposição: Unicidade do Limite

$$\text{Se } \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to a} f(x) = L_2, \text{ então } L_1 = L_2.$$

Propriedades dos Limites:

1. Se a, m e n são números reais, então: $\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$

2. Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem e c é um n° real qualquer, então:

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$

(b) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x);$

(c) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0;$

(e) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ para qualquer inteiro positivo n;

(f) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se

$\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar;

(g) $\lim_{x \to a} \ln [f(x)] = \ln [\lim_{x \to a} f(x)]$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0;$

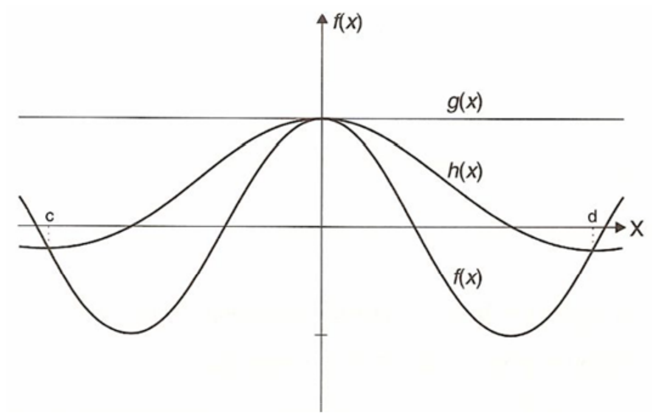
(h) $\lim_{x \to a} \cos [f(x)] = \cos [\lim_{x \to a} f(x)];$

(i) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} [f(x)] = \operatorname{sen} [\lim_{x \to a} f(x)];$

(j) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}.$

Proposição: Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche

Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em x = a, e se $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, então $\lim_{x \to a} h(x) = L$.



Exemplos:

(i) Encontrar $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5)$.

Temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5) &= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 5 \\
&= \lim_{x \to 2} x^2 + 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5 \\
&= 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 \\
&= 15.
\end{aligned}$$

(ii) Encontrar $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - 5}{x^3 - 7}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 5}{x^3 - 7} = \frac{\lim_{x \to 3} (x - 5)}{\lim_{x \to 3} (x^3 - 7)} = \frac{3 - 5}{27 - 7} = \frac{-1}{10}.$$

(iii) Encontrar $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$.

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} = \sqrt{\lim_{x \to -2} (x^4 - 4x + 1)}$$
$$= \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1}$$
$$= 5.$$

(iv) Encontrar $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Nesse caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente, pois $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$.
Porém, se fatoramos o numerador, obtemos

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \text{ para } x \neq 1.$$

Como no processo de limite os valores de x considerados são próximos de 1, mas diferentes de 1, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

v) Dada a função $f(x) = (1 + \sqrt{x - 3})$, determinar, se possível, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

A função dada só é definida para $x \geq 3$. Assim, não existe $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

Para calcular $\lim_{x \to 3^+} f(x)$, podemos aplicar as propriedades. Temos,

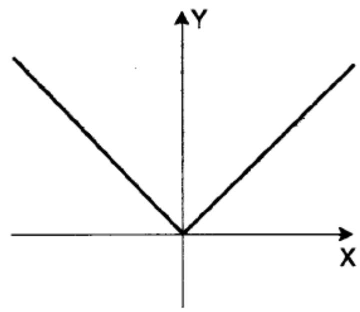
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} (1 + \sqrt{x - 3}) \\
&= \lim_{x \to 3^+} 1 + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= 1 + \sqrt{\lim_{x \to 3^+} (x - 3)} \\
&= 1 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

vi) Seja $f(x) = |x|$. Determinar $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x \geq 0$, então $f(x) = x$. Logo, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$.

Se $x < 0$, então $f(x) = -x$. Logo, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$.

Podemos observar neste exemplo que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$.



O Teorema a seguir nos dá a relação entre limites laterais e limite de uma função:

Teorema. Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Exemplos:

i) Analisando o exemplo anterior podemos concluir que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

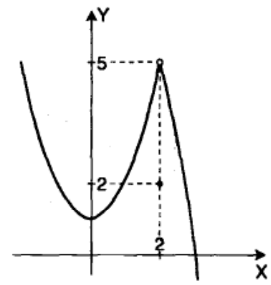
(ii) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{para} \quad x < 2 \\ 2 \quad , & \text{para} \quad x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{para} \quad x > 2. \end{cases}$

Determinar, se existirem, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Esboçar o gráfico da função.

Se $x > 2$, então, $f(x) = 9 - x^2$.

Assim,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (9 - x^2) = \lim_{x \to 2^+} 9 - \lim_{x \to 2^+} x^2 = 9 - 4 = 5.$$



Se $x < 2$, então, $f(x) = x^2 + 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + \lim_{x \to 2^-} 1 = 4 + 1 = 5.$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$, concluímos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

Capítulo 3: Limites

Fonte: Cálculo A - Flemming

Cálculo de limites

Antes de apresentar os exemplos de cálculo de limites vamos falar um pouco sobre expressões indeterminadas do tipo:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Mas o que significa isto?

Vejamos, por exemplo, 0/0

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Nada se pode afirmar, *a priori*, sobre o limite f/g. Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Exprimimos isso, dizendo que 0/0 é um símbolo de indeterminação.

Vejamos 2 exemplos:

Exemplo 1: (i) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$.

Temos, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

e $\lim_{x \to 0} \frac{f(g)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0.$

Exemplo 2: (ii) Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x^2$.

Temos, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e, neste caso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nos exemplos a seguir **artifícios algébricos** são necessários. São os casos de funções racionais em que o limite do denominador é zero num determinado ponto e o limite do numerador também é zero neste mesmo ponto. Simbolicamente temos uma indeterminação do tipo 0/0.

Artifícios algébricos utilizados:

1. Fatoração do numerador ou do denominador
2. Racionalização do numerador ou do denominador
3. Mudança de variáveis
4. Desenvolvimento do numerador ou do denominador

Exemplo 1: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Neste caso, **fatora-se o numerador e o denominador**, fazendo em seguida as simplificações necessárias.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 2x + 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (x - 2)}$$

$$= -9/4.$$

Exemplo 2: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

Neste caso iremos **racionalizar o numerador** e fazer as simplificações possíveis.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - 2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exemplo 3: $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Neste caso faremos uma **troca de variáveis** na função para facilitar os cálculos. Toma-se $x = t^6$. Quando $t^6 \to 1$ temos que $t \to 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1}$$

$$= 2/3.$$

Exemplo 4: $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Neste exemplo, **desenvolve-se o numerador** para poder realizar as simplificações.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Exercícios

1) Calcule os limites:

$$a)\lim_{x\to 1}(4x^2 - 7x + 5) \qquad b)\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{5-3x} \qquad c)\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-2x-5}{-x^2+3x+4}\right)^3$$

$$d)\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{2x^2+3x-3}{5x-4}} \qquad e)\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{3x^3-5x^2-x+3}{4x+3}} \qquad f)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-4x}$$

$$\text{Resp.:}\quad a)2 \quad b)0 \quad c)1/8 \quad d)2/3 \quad e)\sqrt[3]{\frac{39}{5}} \quad f)-2$$

2) Calcule os limites abaixo:

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \qquad b)\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{2+x} \qquad c)\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$$

$$d)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad e)\lim_{x\to -2}\frac{8+x^3}{4-x^2} \qquad f)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+6x-4}{x^3-4x^2+8x-5}$$

$$\text{Resp.:}\quad a)2 \quad b)4 \quad c)-7/3 \quad d)3/2 \quad e)3 \quad f)1$$

Exercícios

3) Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$ RESP 0

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ RESP -2

c) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ RESP 1/3

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ RESP 1/2

e) $\lim_{x \to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ RESP $\frac{A-1}{3a^2}$

f) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ RESP 3X²

g) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right]$ RESP 1

h) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ RESP 1/2

i) $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ RESP 3

j) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ RESP 1

k) $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ RESP -1/56

l) $\lim_{x \to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ RESP 12

m) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ RESP 3/2

n) $\lim_{x \to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ RESP -1/3

o) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ RESP 1

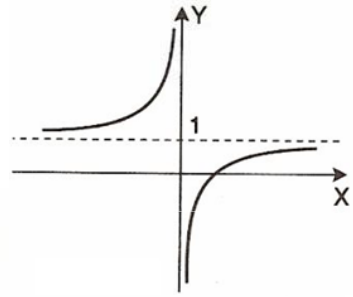
p) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ RESP $\frac{\sqrt{X}}{2}$: x

Capítulo 3: Limites

Fonte: Cálculo A - Flemming

Limites no infinito

Recordando da primeira aula de limites:



Exemplo 1:

Seja $y = 1 - 1/x$

Tabela

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1.000	...

x	−1	−2	−3	−4	−5	...	−100	...	−500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que:

$y \to 1$ quando $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 - 1/x) = 1$.

O seguinte teorema nos ajudará muito nos cálculos de limites no infinito:

Teorema de limites no infinito: Se n é um número positivo, então:

$$(i) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Exemplos:

i) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{x + 8}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Vamos dividir o numerador e o denominador por x e depois aplicar as propriedades de limites juntamente com o teorema para limites no infinito. Temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 5/x}{1 + 8/x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - 5/x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 8/x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5/x}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} 8/x} = \frac{2 - 5.0}{1 + 8.0} = 2.$$

ii) Encontrar $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$. Novamente temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Para usarmos o teorema, dividimos numerador e denominador pela maior potência de x, que neste caso é x^5.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5}}{4 - 2/x^5}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (2/x^2 - 3/x^4 + 5/x^5)}{\lim\limits_{x \to -\infty} (4 - 2/x^5)}$$

$$= \frac{2 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^2 - 3 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^4 + 5 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^5}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - 2 \lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^5)}$$

$$= \frac{2{,}0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{4 - 2 \cdot 0}$$

$$= 0.$$

EXEMPLO 3 Ache $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

Solução: Como a maior potencia de x é 2 e ela aparecendo sob o radical, dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é |x|. Temos então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x}{\sqrt{x^2}} + \frac{4}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{2x^2 - 5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x}{|x|} + \frac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to +\infty$, $x > 0$; então $|x| = x$. Assim temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 3 + \lim_{x \to +\infty} 4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} 2 - \lim_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

EXEMPLO 4 Ache $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

Solução: A função é igual a do exemplo 3. Novamente, começamos por dividir o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$ ou, equivalentemente, |x|.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x}{|x|} + \frac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to -\infty$, $x < 0$; portanto $|x| = -x$. Temos, então,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x}{-x} + \frac{4}{-x}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (-3) - \lim_{x \to -\infty} 4 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}{\sqrt{\lim_{x \to -\infty} 2 - \lim_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Limites de funções racionais quando $x \to \pm\infty$:

1. Numerador e denominador de mesmo grau:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

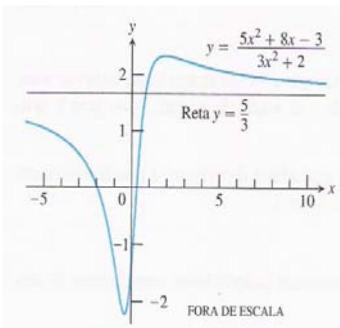
2. Grau do numerador menor que o grau do denominador:

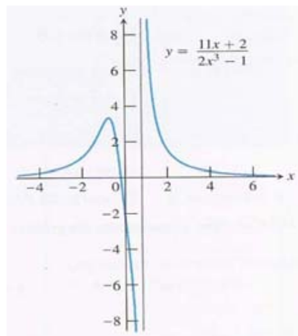
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

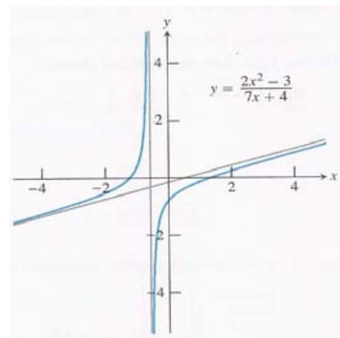
3. Grau do numerador maior que o grau do denominador:

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-(3/x)}{7+(4/x)} \begin{cases} \text{numerador tende a } -\infty \\ \text{denominador tende a } 7 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+(7/x)}{2-(3/x)-(10/x^2)} \begin{cases} \text{o numerador} \to \infty \\ \text{o denominador} \to 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \infty$$







Exercícios

1. Calcule os valores dos seguintes limites infinitos:

a) $\lim_{n\to\infty} 12 =$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+8n^2}{5-7n^2} =$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} =$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{5-n} =$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{8-5n}{6n-4} =$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{5-n} =$

g) $\lim_{n\to\infty} (n^5-9) =$

h) $\lim_{n\to\infty} (3n^5+5n^6+1) =$

i) $\lim_{n\to\infty} (8n^5-5n^4+n^3+1) =$

j) $\lim_{n\to\infty} (-8n^3-2n^2+1) =$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^6-9}{n^4+3} =$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+7n-n}{n^5+n^4} =$

n) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}-8}{1-n^8} =$

Exercícios

2. Calcule:

$a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$ $b)\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+3x+1}$ $c)\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{5+\frac{2}{x}}$

$d)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$ $e)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$ $f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

$g)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$ $h)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^4+2x+3}$ $i)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+3}}$

$j)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $l)\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}$ $m)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$

Exercícios

3. Calcule os seguintes limites infinitos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{x+3}$ $b)\ \lim_{x\to+\infty}\left[2x-\sqrt{x^2+3}\right]$

$c)\ \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2+3}\right]$ $d)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}\right]$

$e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$ $f)\ \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{3x^3+2}\right]$

$g)\ \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x+3}\right]$ $h)\ \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt[3]{2+3x^3}\right]$

Resposta dos exercícios

1 . a) 12 b) -8/7 c) 1 d) -1 e) -5/6 f) -5 g)∞ h)∞ i)∞ j)-∞ l)∞ m)0 n) -∞

2. a) 1/3 b) 0 c) $\sqrt[3]{5}$ d) 1/3 e) 0 f) 0 g) 5/4 h) 0 i)0 j)1 l)0 m) 0

3. a)0 b)+∞ c)0 d)1/2 e)1/2 f) -∞ g) +∞ h) -∞

Capítulo 3: Limites

Fonte: Cálculo A Flemming e Leithold 1

Limites infinitos

Recordando um exemplo da primeira aula de limites:

Exemplo 4:

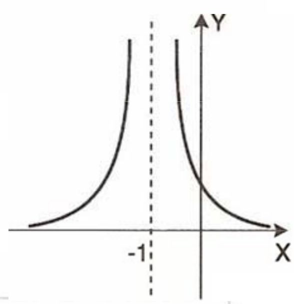
A Figura nos mostra o gráfico da função $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Observando a Figura e a Tabela podemos afirmar que esta função tende para o infinito quando x tende para -1 e escrevemos

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$



Tabela

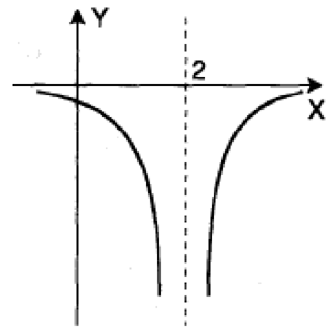
x	-3	-2	$-1{,}5$	$-1{,}25$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

x	1	0	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

Analogamente ...

A Figura mostra o gráfico da função

$$y = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$



Escrevemos $\lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ ou $y \to -\infty$ quando $x \to 2$.

Tabela

x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	...
y	– 0,25	– 1	– 4	– 100	– 10000	– 1000000	...

x	0	1	1,5	1,9	1,99	1,999	...
y	– 0,25	– 1	– 4	– 100	– 10000	– 1000000	...

O seguinte teorema é muito usado no cálculo de limites infinitos:

Teorema de limites infinitos: Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:

$$(i) \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Propriedades de limites infinitos: As propriedades de limites vistas anteriormente permanecem válidas para limites infinitos, embora seja necessário tomar muito cuidado quando combinamos funções envolvendo esses limites.

A tabela a seguir nos dá um “resumo” válidos para limites infinitos, onde podemos ter $x \to a, x \to a^+, x \to a^-, x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Na tabela, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores positivos, e 0^- indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores negativos.

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty, k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty, k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty, k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty, k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Exemplos:

(i) Determinar $\lim_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2)$.

Temos,

$$\lim_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2) = \lim_{x \to 0} x^3 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x} + \lim_{x \to 0} 1/x^2$$

$$= 0 + 0 + \infty$$

$$= +\infty.$$

(*ii*) Determinar $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para determinar o limite usamos um artifício de cálculo. Escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^5 \left(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$= +\infty\,(3 - 0 + 0)$$

$$= +\infty.$$

iii) Determinar $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^2, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}$$

iv) Determinar $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5 - x^3}{8x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x^3}{8x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{5}{x^3} - 1}{\dfrac{8}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} (5/x^3 - 1)}{\lim_{x \to +\infty} (8/x^2 + 2/x^3)}$$

$$= \frac{-1}{0^+}$$

$$= -\infty.$$

v) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^4, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{4}{x^4} - 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x^4} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2.$$

Propriedade:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$, então

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_o x^n$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_o x^n}{b_o x^m}$$