LISTA 1: ÁLGEBRA LINEAR

Prof. Luís Felipe Kiesow de Macedo

Matrizes, Sistemas de Equações Lineares e Determinantes

1 Dada a matriz M, calcule MM^t.

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Classifique o sistema linear dado e apresente posto e nulidade (grau de liberdade). Se o sistema linear for compatível indeterminado apresente uma das possíveis soluções.

2 $$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 24x_3 + 18x_4 = 84 \\ 4x_1 - 14x_2 + 52x_3 + 42x_4 = 190 \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$$

4 $$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

5 $$\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

6 $$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

7 Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes x, y e z para que o sistema abaixo seja compatível.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -3a_1 + 4a_2 = y \\ 2a_1 - a_2 = z \end{cases}$$

8 Determine o valor de k para que o sistema abaixo admita solução não-trivial

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$$

9 Resolva o sistema abaixo pelo método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

10 Calcule o determinante da matriz A de duas maneiras diferentes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

11 Sejam A e B matrizes do tipo $n \times n$. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Para afirmativa(s) falsa(s) apresente um exemplo e justifique a(s) verdadeira(s).
( ) $\det(AB) = \det(BA)$
( ) $\det(A') = \det(A)$
( ) $\det(2A) = 2\det(A)$
( ) $\det\left(A^2\right) = (\det A)^2$

12 Apresente o número de soluções dos sistemas abaixo utilizando determinantes.
(a)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ \quad\;\; - 3x_2 + 9x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad\;\; - 2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; x_4 = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x_5 + 2x_4 + x_1 = 0 \\ \quad - x_3 + x_2 - x_1 = 5 \\ \quad - 9x_3 - x_2 + 9x_1 = 0 \\ \quad\quad - 3x_2 + x_1 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad x_1 = 0 \end{cases}$$

Obs: (Propriedade) O determinante de uma matriz triangular $A_{n\times n}$ é igual ao produto dos elementos de sua diagonal.

13 Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$
Encontre A^{-1} e B^{-1}.

14 Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$$

(a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes (com determinantes).
(b) Calcule o posto da matriz ampliada (com determinantes).
(c) Descreva a solução desse sistema.

Complementar - Vetores

01 Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -4)$ e $\vec{w}_2 = (-4, -4, 14)$

02 Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

03 A partir de cada vetor $\vec{v}$ diferente de zero é possível encontrar um vetor unitário. Dado o vetor $\vec{v} = (3, -4)$ qual o vetor unitário $\vec{u}$?

04 Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos $\mathrm{A}(4, -1, 2)$ e $\mathrm{B}(3, 2, -1)$, determinar o valor de α tal que $\vec{u}.(\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = 5$

05 Sabendo que a distância entre os pontos $\mathrm{A}(-1, 2, 3)$ e $\mathrm{B}(1, -1, m)$ é 7, calcular m.

06 Determinar α para que o vetor $\vec{v} = \left(\alpha, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ seja unitário.

07 Prove que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$

08 Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

09 Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma ângulo de 60^o com o vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ determinado pelos pontos $\mathrm{A}(3, 1, -2)$ e $\mathrm{B}(4, 0, m)$, calcular m.

10 Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.