Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Guilherme Jahnecke Weymar

AULA 03

Equações diferenciais de primeira ordem

Equações separáveis

Fonte:

Material Daniela Buske, Boyce, Bronson, Zill, diversos internet

Equações separáveis

As equações diferenciais ordinárias separáveis são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

Seja

$$h(y) = \int g(y)dy$$

Então

$$\frac{dh}{dy} = g(y)$$

Substituindo-se g(y) por dh/dy na equação (1) obtemos

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (2)$$

Equações separáveis

Mas pela regra da cadeia $\frac{d}{dx}h(y(x)) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx}$

O que implica que (2) pode ser escrita como: $\frac{d}{dx}h(y(x)) = f(x)$ (3)

A eq. (3) é do tipo (1.3) ($\frac{dy}{dt} = q(t)$, vista na aula 02), ou seja, é da forma

$$\frac{dY}{dx} = f(x)$$

Em que Y(x) = h(y(x)). Assim, integrando-se (3) dos dois lados obtemos que a solução geral de (1) é dada **implicitamente** por

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + C$$

Equações separáveis

Também podemos obter a solução anterior da seguinte maneira:

Integrando-se em relação a x ambos os membros de (1) obtemos

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C$$

Que pode ser reescrita como

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + C$$

Fazendo a substituição y'dx = dy obtemos

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

Observação: As curvas que são soluções de uma equação separável podem ser vistas como curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = h(y(x)) - \int f(x)dx$$

Equações separáveis

Exemplo 1: <u>Modo de resolução 1</u>

Encontrar a solução geral da EDO: $2y\dfrac{dy}{dx} = -4x$

A EDO pode ser reescrita como: $\dfrac{d}{dy}(y^2)\dfrac{dy}{dx} = -4x$

ou pela regra da cadeia: $\dfrac{d}{dx}(y^2) = -4x$

Assim a solução geral é dada implicitamente por:

$$y^2 = \int (-4x)dx = -2x^2 + C$$

As soluções são elipses (ver fig. 1) que são curvas de nível da função

$$z = F(x,y) = y^2 + 2x^2$$

O gráfico da função F(x,y) dada é um parabolóide elíptico (ver fig. 2)

Equações separáveis

Exemplo 1: Modo de resolução 2

Encontrar a solução geral da EDO: $2y\dfrac{dy}{dx} = -4x$ ou $2yy' = -4x$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos:

$$\int 2yy'\,dx = -\int 4x\,dx + C$$

Fazendo a substituição y'dx = dy obtemos:

$$\int 2y\,dy = -\int 4x\,dx + C$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^2 = -2x^2 + C$$

As soluções são elipses (ver fig. 1) que são curvas de nível da função

$$z = F(x, y) = y^2 + 2x^2$$

O gráfico da função F(x,y) dada é um parabolóide elíptico (ver fig. 2)

Equações separáveis

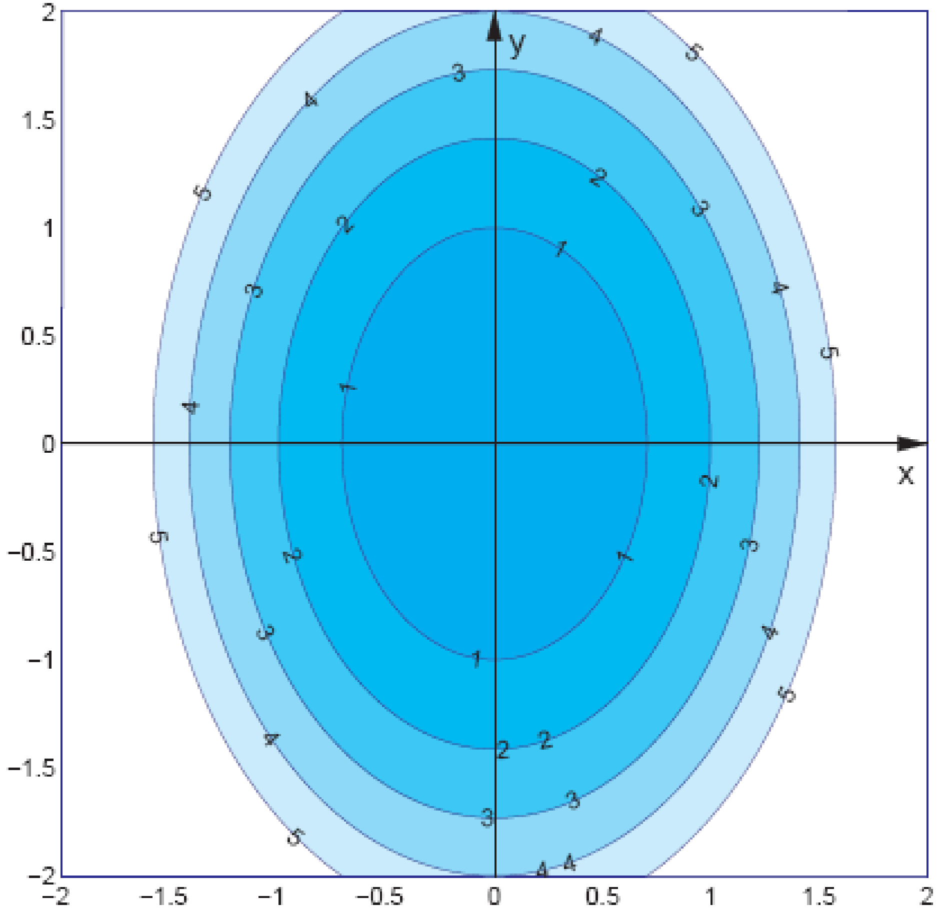

Figura 1: Soluções da equação diferencial do exemplo 1

Equações separáveis

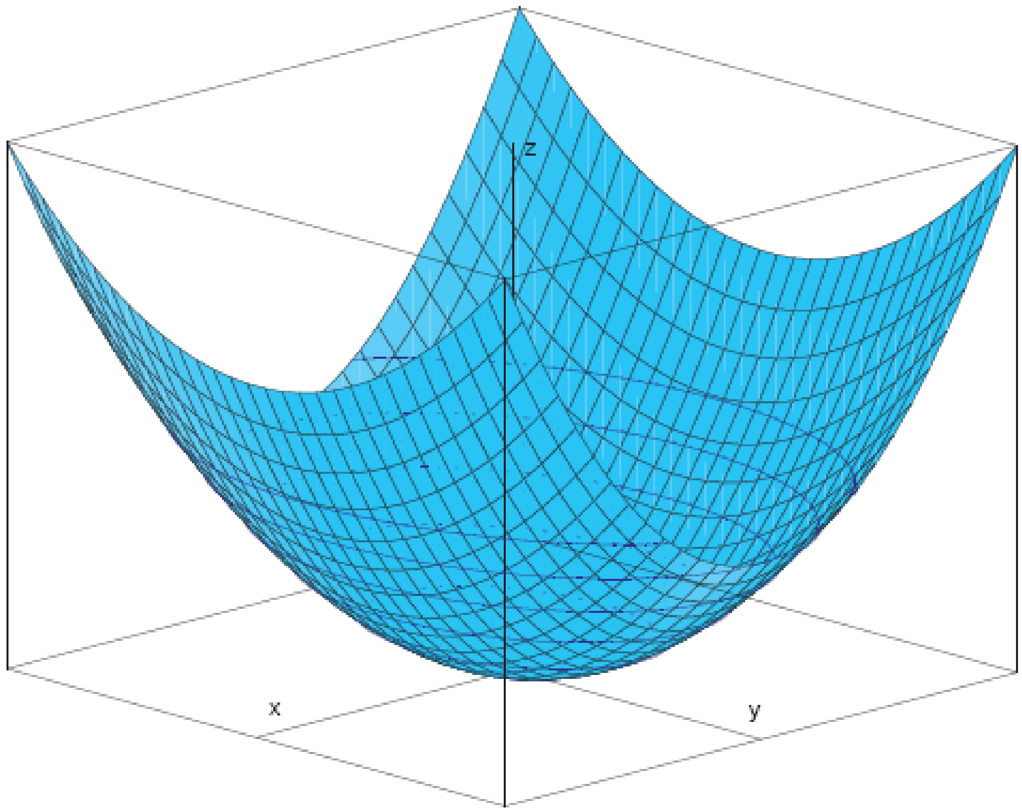

Figura 2: Soluções da equação diferencial do exemplo 1 como curvas de nível do parabolóide elíptico $z = F(x,y) = 2x^2+y^2$.

Equações separáveis

Exemplo 2:

a) Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

b) Determine o intervalo de validade da solução, ou seja, o maior intervalo contendo $x_0=1$ para o qual a solução $y(x)$ e sua derivada dy/dx estão definidas.

c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.

d) Faça um esboço do gráfico da solução.

Equações separáveis

Solução:

(a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x - 1$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int (3y^2 - 3)y' \, dx = \int (2x - 1) dx + C.$$

Fazendo a substituição $y' dx = dy$ obtemos

$$\int (3y^2 - 3) \, dy = \int (2x - 1) dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y = x^2 - x + C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$ substituímos $x = 1$ e $y = 0$ na solução geral obtendo $C = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

Exercício: Fazer pela primeira metodologia para verificar

Equações separáveis

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução do PVI vamos determinar o maior intervalo que contem $x = 1$ em que a solução e sua derivada estão definidas. Pela equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3}$, temos que os pontos onde a derivada não está definida são aqueles tais que $3y^2 - 3 = 0$, ou seja, $y = \pm 1$. Como o ponto inicial é $(1, 0)$, então a solução do PVI está contida na região do plano $-1 < y < 1$. Substituindo-se $y = -1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2 - x - 2 = 0$, que tem solução $x = -1$ e $x = 2$. Substituindo-se $y = 1$ na equação que define a solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ obtemos a equação $x^2 - x + 2 = 0$, que não tem solução real.

Como a solução está definida para todo x, mas a derivada não está definida para $x = -1$ e $x = 2$ e o ponto inicial $x_0 = 1$ está entre os valores $x = -1$ e $x = 2$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-1, 2)$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.

Equações separáveis

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{3y^2 - 3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x - 1 = 0$, ou seja, somente para $x = 1/2$.

Equações separáveis

(d) Nos pontos $x = -1$ e $x = 2$ a reta tangente à curva solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ é vertical, ou seja, $\frac{dx}{dy} = 0$, pois pela equação diferencial,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2 - 3}{2x - 1},$$

para $x \neq 1/2$. Assim já sabemos pelo item (b) que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-1, -1)$ e $(2, -1)$ onde a tangente é vertical, e que passa pelo ponto inicial $(1, 0)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $-1/3$, pois substituindo-se $x = 1$ e $y = 0$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = -1/3$. Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para $x = 1/2$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = 1/2$ depois começa a decrescer.

Equações separáveis

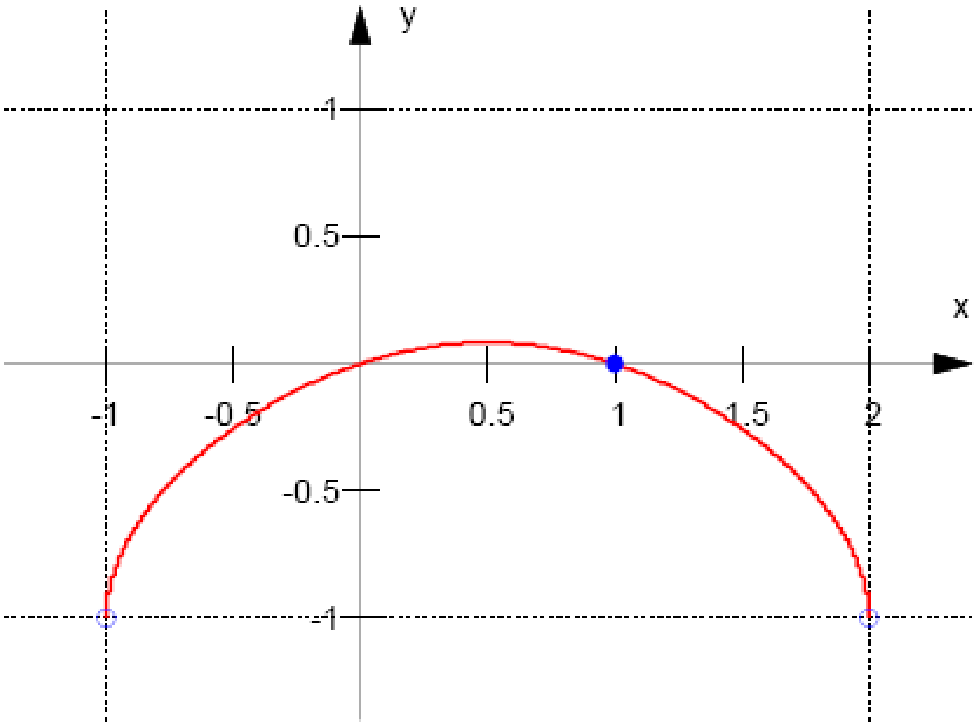

Figura 3: Solução do PVI do exemplo 2.

Equações separáveis

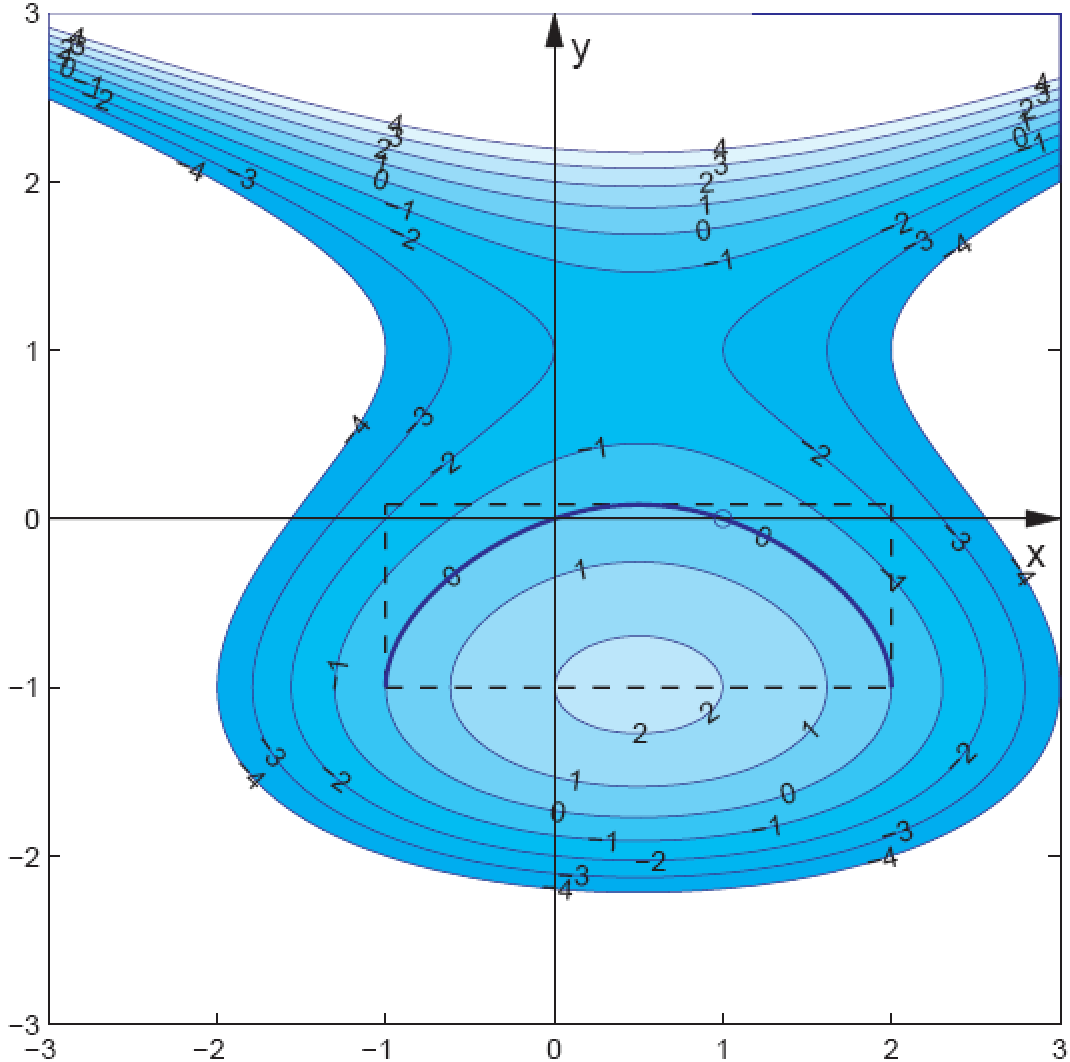

Figura 4: Soluções da EDO e do PVI do exemplo 2.

Equações separáveis

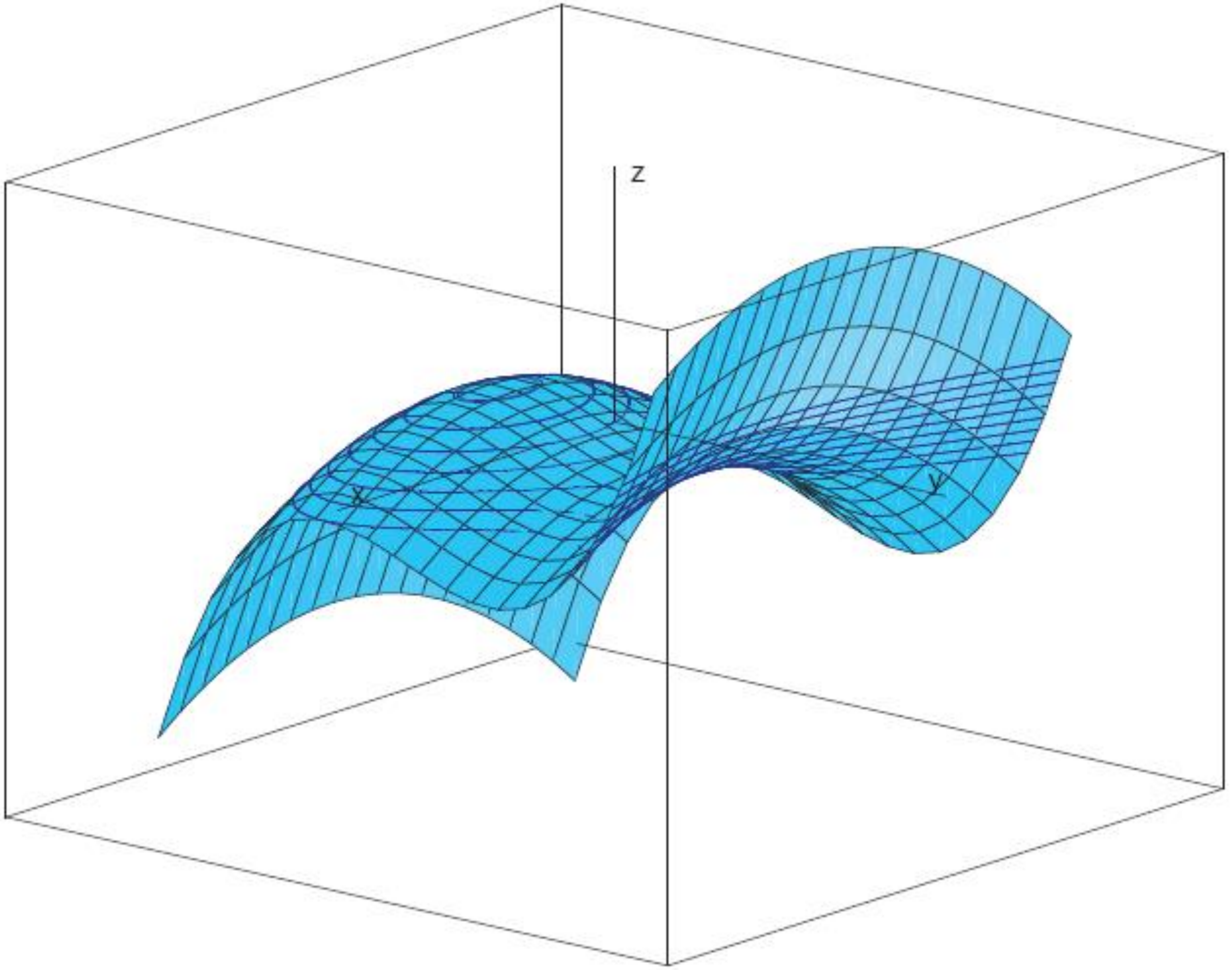

Figura 5: Soluções da EDO do exemplo 2 como curvas de nível de uma função de duas variáveis $z=f(x,y)=y^3-3y-x^2+x$.

Soluções por Substituições

Muitas Equações Diferenciais, o primeiro passo para resolvê-la é transformar em outra E.D. “conhecida” por meio de uma substituição.

- **Equações Homogêneas;**
- **Equações de Bernoulli;**
- **Equações de Riccati;**

Equações Homogêneas

Definição: Função homogênea

Se uma função f satisfaz

$$f(\lambda x, \lambda y) = \boxed{\lambda^n} f(x, y)$$

Para algum número real n, então dizemos que f é uma **função homogênea de grau n** .

Equações Homogêneas

Exemplo 1: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$$

f é homogênea de grau 2

Exemplo 2: : $f(x,y) = 3x^2 - xy^2 + 1$

$$f(x,y) = 3x^3 - xy^2 + 1$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^3 x^3 - \lambda x \lambda^2 y^2 + 1 \neq \lambda^3 f(x,y)$$

f não é homogênea

Equações Homogêneas

Exemplo 3: : $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} - sen\left(\frac{x}{y}\right)$

$$f(x, y) = e^{x/y} - sen(x/y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\lambda x/\lambda y} - sen(\lambda x/\lambda y) = e^{x/y} - sen(x/y) = \lambda^0 f(x, y)$$

f é homogênea de grau zero

OBS:

1. Nos exemplos 2 e 3 observamos que uma constante adicionada à função destrói a homogeneidade, a menos que a função seja homogênea de grau zero.
2. Uma função homogênea pode ser reconhecida examinado o **grau** de cada termo

Equações Homogêneas

Definição: Equação homogênea

Uma equação diferencial da forma

$$\boxed{M(x,y)}\,dx+\boxed{N(x,y)}\,dy=0$$

é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Equações Homogêneas

Método de solução: Equação homogênea

Uma equação diferencial homogênea

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Neste caso a substituição:

$$y = vx$$

transformará a equação em uma equação diferencial de 1ª ordem separável.

Lembrando: $y = vx; \qquad dy = vdx + xdv$

Equações Homogêneas

Exemplo 1: $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$xydx - (x^2 - y^2)dy = 0 \Longrightarrow$$ fç homog. de mesmo grau

Substituição: $\boxed{y = vx; \qquad dy = vdx + xdv}$

$$xvxdx - (x^2 - v^2x^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2v - x^2v + v^3x^2)dx + (-x^3 + v^2x^3)dv = 0$$

$$v^3x^2dx + x^3(v^2 - 1)dv = 0 \qquad \text{(variáveis separáveis)}$$

$$v^3x^2dx = -x^3(v^2 - 1)dv$$

$$\frac{x^2dx}{x^3} = -\frac{(v^2 - 1)dv}{v^3} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{(v^2 - 1)dv}{v^3}$$

$$\ln x = -\ln v - \frac{1}{2v^2} + c \quad \overset{v=y/x}{\Rightarrow} \quad \ln y + \frac{x^2}{2y^2} = c$$

Exercícios

- Resolva as equações diferenciais homogêneas:

1) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ Sol. Geral: $y^2 - x^2 = Cx$

2) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$ Sol. Geral: $\ln|x + y| + \frac{x}{x+y} = C$

3) $xy' \cos\left(\frac{y}{x}\right) = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x$ Sol. Geral: $sen\ \left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{C}{x}\right)$

4) $yy' = 2y - x$ Sol. Geral: $y - x = Ce^{x/(y-x)}$

5) $y - xy' = x + yy'$ Sol. Geral: $\ln\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| +$
$\arctan(y/x) = C$

6) $y' = 4 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$; $y(1) = 2$
Sol. Particular: $\arctan(y/2x) = \ln|x| + \pi/4$

Equações Homogêneas

Observações: Caso M(x,y) e N(x,y) sejam funções de trinômios lineares em x e y, ou seja

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \qquad (1)$$

Teremos de analisar se os coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 são proporcionais ou não.

Equações Homogêneas

1º caso:

Os coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 são proporcionais , ie, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = R \Rightarrow a_1 = Ra_2 \text{ e } b_1 = Rb_2$$

Substituindo em (1):

$$[R(a_2x + b_2y) + c_1]dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \qquad (2)$$

A transformação $t = a_2x + b_2y\,;\quad dy = \dfrac{dt - a_2dx}{b_2}$

reduz (2) à forma de uma equação de variáveis separáveis.

Equações Homogêneas

Exemplo 1º caso:

$$(-2x - y + 1)dx + (4x + 2y + 5)dy = 0$$

Equações Homogêneas

2º caso:

Os coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 não são proporcionais , ie, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

A transformação

$$\begin{cases} x = X + h & \Rightarrow \quad \mathrm{dx} = \mathrm{dX} \\ y = Y + k & \Rightarrow \quad \mathrm{dy} = \mathrm{dY} \end{cases}$$

onde h e k são coordenadas da solução do sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

reduz (1) à forma de uma equação homogênea.

Equações Homogêneas

Exemplo 2º caso:

$$(\boldsymbol{x - y + 4})\boldsymbol{dy} + (\boldsymbol{-x - y + 2})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Transformação: $\begin{cases} x = X + h & \Rightarrow \quad \mathrm{dx} = \mathrm{dX} \\ y = Y + k & \Rightarrow \quad \mathrm{dy} = \mathrm{dY} \end{cases}$

h e k são coordenadas da solução do sistema

$$\begin{cases} -h - k + 2 = 0 \\ +h - k + 4 = 0 \end{cases} \qquad k = 3;\ h = -1$$

reduz à forma de uma equação homogênea.

$$(X - Y)dY + (-X - Y)dX = 0$$

Equações Homogêneas

Exemplo 2º caso:

$(X-Y)dY + (-X-Y)dX = 0 \longrightarrow$ Eq. Homogênea de Grau 1

Substituição: $Y = vX; \quad dY = vdX + Xdv$

$$(X - vX)(vdX + Xdv) + (-X - vX)dX = 0$$

$$\downarrow$$

$$(1-v)X^2dv + (\cancel{v}X - v^2X - X - \cancel{v}X)dX = 0$$

$$\frac{v-1}{v^2+1}dv + \frac{dX}{X} = 0 \longrightarrow -\tan^{-1} v + \frac{1}{2}\ln|v^2+1| + \ln|X| = C$$

$$-\tan^{-1}\frac{Y}{X} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{Y^2+X^2}{X^2}\right| + \ln|X| = C$$

$$\boxed{-\tan^{-1}\left(\frac{y-3}{x+1}\right) + \ln\left|\sqrt{(y-3)^2+(x+1)^2}\right| = C}$$

Equações de Bernoulli

Seja a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \qquad (1)$$

Onde $n \in \mathbb{R}$

E.D. Não linear

Note que:

- ❖ $n = 0 \ \ e \ \ n = 1$ a equação se torna linear.
- ❖ Para $n \neq 0 \ \ e \ \ n \neq 1$, a substituição $u = y^{1-n}$ reduz qualquer equação da forma (1) a uma **equação diferencial linear**.

Equações de Bernoulli

Metodologia para resolver Equações de Bernoulli:

Seja a E.D. na forma (1):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \qquad (1)$$

1. Dividir a eq. (1) por y^n;
2. Substituir $u = y^{1-n}$ e $\frac{\mathrm{d}u}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$
3. Pelos passos 1 e 2, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + P(x)u = f(x) \qquad (2)$$

❖ Note que a eq. (2) é uma Equação Linear de 1ª Ordem na função incógnita u (Pode ser resolvida multiplicando pelo Fator Integrante!)

Equações de Bernoulli

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{x}y^{2}$$

Exercícios: Resolva a equação diferencial dada utilizando uma substituição apropriada.

a) $x\frac{dy}{dx} - -(1+x)y = xy^{2}$

b) $t^{2}\frac{dy}{dt} + y^{2} = ty$

c) $x^{2}\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^{4}$

Equações de Riccati

Uma E.D. na forma (3):

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (3)$$

é chamada de uma eq. de Riccati.

Se não for dada a sol. Particular testar: $y_p(x) =$ $funções\ simples$: cte; $funções\ lineares$; $funções\ quadráticas$; etc

Obs: Se $P(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Eq. é Linear!

Se $P(x) \neq 0$ e conseguirmos de alguma forma obter uma solução particular da Equação Diferencial de Riccati (E.D.R.) $y_p(x)$, então fazemos a seguinte troca de variável:

$$y = y_p(x) + \frac{1}{z}$$

❖ Note que esta troca de variável transforma a E.D.R. em uma equação diferencial linear em x e z.

Equações de Riccati

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$$

$$y_p(x) = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{z}$$

Obs: Eq. de Bernoulli X Eq. de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + \boxed{R(x)}$$