

Matriz S e suas Propriedades

Patricia Gonçalves Moreira ¹

¹Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física
Pelotas-RS-Brasil

04 de novembro de 2016

Sumário

- 1 Definição
- 2 Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque
- 3 Unitariedade e o Teorema Óptico
- 4 Analiticidade
- 5 Cruzamento
- 6 Fórmula Froissart-Gribov
- 7 Bibliografia

Definição

Função: transformar um estado $|i\rangle$ em um estado $|f\rangle$

$$S|i\rangle = |f\rangle \quad (1)$$

Definição

Função: transformar um estado $|i\rangle$ em um estado $|f\rangle$

$$S|i\rangle = |f\rangle \quad (1)$$

Probabilidade do sistema ser encontrado no estado final

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f|S|i\rangle|^2 \quad (2)$$

Definição

Função: transformar um estado $|i\rangle$ em um estado $|f\rangle$

$$S|i\rangle = |f\rangle \quad (1)$$

Probabilidade do sistema ser encontrado no estado final

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f|S|i\rangle|^2 \quad (2)$$

Coincide com o operador de evolução temporal

$$S \equiv U(-\infty, +\infty) \quad (3)$$

É dada pela série de Dyson

$$S = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}(H'_{int}(x_1) \cdots H'_{int}(x_n)) \quad (4)$$

É dada pela série de Dyson

$$S = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{T}(H'_{int}(x_1) \cdots H'_{int}(x_n)) \quad (4)$$

Onde

H'_{int} - Hamiltoniano da interação

\mathcal{T} - produto ordenado do tempo

Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Matriz de transição

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (5)$$

Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Matriz de transição

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (5)$$

Elementos de matriz

$$S_{if} = \langle f | \mathbf{1} + iT | i \rangle$$

Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Matriz de transição

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (5)$$

Elementos de matriz

$$S_{if} = \langle f | \mathbf{1} + iT | i \rangle$$

$$S_{if} = \delta_{if} + \langle f | T | i \rangle$$

Amplitude de Espalhamento e Seção de Choque

Matriz de transição

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (5)$$

Elementos de matriz

$$S_{if} = \langle f | \mathbf{1} + iT | i \rangle$$

$$S_{if} = \delta_{if} + \langle f | T | i \rangle$$

$$S_{if} = \delta_{if} + iT_{if} \quad (6)$$

Impondo $p_i = p_f$

$$S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A(i \rightarrow f) \quad (7)$$

Impondo $p_i = p_f$

$$S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A(i \rightarrow f) \quad (7)$$

Normalização dos auto-estados de $|p\rangle$

$$\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (8)$$

Impondo $p_i = p_f$

$$S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A(i \rightarrow f) \quad (7)$$

Normalização dos auto-estados de $|p\rangle$

$$\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (8)$$

Estado inicial de 2 partículas de $p_i = p_1 + p_2$ e final de n partículas

$$|i\rangle = |p_1 p_2\rangle \quad (9)$$

$$|f_n\rangle = |p'_1 \cdots p'_n\rangle \quad (10)$$

Seção de choque diferencial para n partículas

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} |A(i \rightarrow f)|^2 d\Pi_n \quad (11)$$

Seção de choque diferencial para n partículas

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} |A(i \rightarrow f)|^2 d\Pi_n \quad (11)$$

Seção de choque total

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{\phi} \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow f)|^2 \quad (12)$$

Seção de choque diferencial para n partículas

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} |A(i \rightarrow f)|^2 d\Pi_n \quad (11)$$

Seção de choque total

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{\phi} \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow f)|^2 \quad (12)$$

Espaço de fase

$$d\Pi_n = \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j \right) \quad (13)$$

Onde

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{2E} = \int d^4\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \quad (14)$$

Onde

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{2E} = \int d^4\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \quad (14)$$

Fluxo incidente

$$\Phi = 2E_1E_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (15)$$

Onde

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{2E} = \int d^4\delta(p^2 - m^2)\theta(p_0) \quad (14)$$

Fluxo incidente

$$\Phi = 2E_1E_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (15)$$

Ou

$$\Phi = 4[(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1m_2)^2]^{1/2} \quad (16)$$

Em (16): invariância de Lorentz explícita

$$\text{Se } 2p_1 \cdot p_2 = s - m_1^2 - m_2^2$$

$$\Phi = 2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \quad (17)$$

Em (16): invariância de Lorentz explícita

$$\text{Se } 2p_1 \cdot p_2 = s - m_1^2 - m_2^2$$

$$\Phi = 2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2) \quad (17)$$

Seção de choque para a reação $1 + 2 \rightarrow n$

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} \prod_{j=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \\ \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j \right) |A(i \rightarrow f_n)|^2 \quad (18)$$

Para o processo de dois corpos $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} |A(12 \rightarrow 34)|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_3 (2\pi)^3 2E_4} \quad (19)$$

Para o processo de dois corpos $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} |A(12 \rightarrow 34)|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_3 (2\pi)^3 2E_4} \quad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |A(s, t)|^2 \quad (20)$$

Para o processo de dois corpos $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

$$d\sigma = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} |A(12 \rightarrow 34)|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_3 (2\pi)^3 2E_4} \quad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |A(s, t)|^2 \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} |A(s, t)|^2 \quad (21)$$

Unitariedade e o Teorema Óptico

Pela conservação da probabilidade

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbf{1} \quad (22)$$

Unitariedade e o Teorema Óptico

Pela conservação da probabilidade

$$S^\dagger S = SS^\dagger = \mathbf{1} \quad (22)$$

Em termos da matriz de transição

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T \quad (23)$$

Unitariedade e o Teorema Óptico

Pela conservação da probabilidade

$$S^\dagger S = SS^\dagger = \mathbf{1} \quad (22)$$

Em termos da matriz de transição

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T \quad (23)$$

Tomando os elementos da matriz e inserindo um conjunto completo de estados $|n\rangle$

$$i\langle f|T^\dagger - T|i\rangle = \sum_{\{n\}} \langle f_n|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle \quad (24)$$

Que nos dá

$$2\text{Im} T_{if} = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in} \quad (25)$$

Que nos dá

$$2\text{Im} T_{if} = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in} \quad (25)$$

E $\sum_{\{n\}}$ incorpora toda função de unitariedade

$$\sum_{\{n\}} = \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (26)$$

Que nos dá

$$2\text{Im} T_{if} = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in} \quad (25)$$

E $\sum_{\{n\}}$ incorpora toda função de unitariedade

$$\sum_{\{n\}} = \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (26)$$

que em termos da amplitude de espalhamento

$$2\text{Im} A(i \rightarrow f) = \sum_n d\Pi_n A^*(f \rightarrow n) A(i \rightarrow n) \quad (27)$$

Se $|i\rangle = |f\rangle$

é o caso do espalhamento elástico ($t = 0$)

$$2\text{Im}A_{el}(s, t = 0) = \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow n)|^2 \quad (28)$$

Se $|i\rangle = |f\rangle$

é o caso do espalhamento elástico ($t = 0$)

$$2\text{Im}A_{el}(s, t = 0) = \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow n)|^2 \quad (28)$$

A formulação do teorema óptico para espalhamento relativista é

$$\sigma_{tot} = \frac{2}{\Phi} \text{Im}A_{el}(s, t = 0) \quad (29)$$

ou

$$\sigma_{tot} \simeq \frac{1}{s} \text{Im}A_{el}(s, t = 0) \quad (30)$$

Analiticidade

- Elementos da matriz S são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando são contínuas a valores complexos **[1]**;

Analiticidade

- Elementos da matriz S são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando são contínuas a valores complexos **[1]**;
- $A(s, t)$ é função analítica de s e t , que são variáveis complexas;

Analiticidade

- Elementos da matriz S são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando são contínuas a valores complexos **[1]**;
- $A(s, t)$ é função analítica de s e t , que são variáveis complexas;
- Singularidades: polos simples sobre o eixo real correspondente à troca de partículas física;

Analiticidade

- Elementos da matriz S são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando são contínuas a valores complexos **[1]**;
- $A(s, t)$ é função analítica de s e t , que são variáveis complexas;
- Singularidades: polos simples sobre o eixo real correspondente à troca de partículas física;
- Para espalhamento de 2 corpos de massas iguais e s e t como variáveis independentes, $A(s, t)$ é singular em

Analiticidade

- Elementos da matriz S são funções analíticas das variáveis cinemáticas quando são contínuas a valores complexos **[1]**;
- $A(s, t)$ é função analítica de s e t , que são variáveis complexas;
- Singularidades: polos simples sobre o eixo real correspondente à troca de partículas física;
- Para espalhamento de 2 corpos de massas iguais e s e t como variáveis independentes, $A(s, t)$ é singular em

$$s = m^2 \quad (31)$$

$A(s, t)$ é singular na troca de partícula no canal s

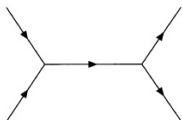


Figura: Diagrama de Feynman para troca de uma partícula escalar no canal s em uma teoria ϕ^3 [2].

Propagador de troca

$$\frac{1}{s - m^2 + i\epsilon} \quad (32)$$

Pontos de ramificação no canal s , com $A(s, t)$ singular em $s = m^2$

$$s = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (33)$$

Pontos de ramificação no canal s , com $A(s, t)$ singular em $s = m^2$

$$s = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (33)$$

Pontos de ramificação no canal t , com $A(s, t)$ singular em $t = m^2$

$$t = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (34)$$

Pontos de ramificação no canal s , com $A(s, t)$ singular em $s = m^2$

$$s = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (33)$$

Pontos de ramificação no canal t , com $A(s, t)$ singular em $t = m^2$

$$t = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (34)$$

Pontos de ramificação no canal u , com $A(s, t)$ singular em $u = m^2$

$$u = (2m)^2, (3m)^2, \dots \quad (35)$$

Cruzamento

Canais da operação de passagem

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{canal } s)$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad (\text{canal } t)$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 \quad (\text{canal } u) \quad (36)$$

Cruzamento

Canais da operação de passagem

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &\rightarrow 3 + 4 && (\text{canal } s) \\
 1 + \bar{3} &\rightarrow \bar{2} + 4 && (\text{canal } t) \\
 1 + \bar{4} &\rightarrow \bar{2} + 3 && (\text{canal } u)
 \end{aligned} \tag{36}$$

CPT correspondente às reações transformadas

$$\begin{aligned}
 \bar{3} + \bar{4} &\rightarrow \bar{1} + \bar{2} && (\text{canal } s) \\
 2 + \bar{4} &\rightarrow \bar{1} + 3 && (\text{canal } t) \\
 2 + \bar{3} &\rightarrow \bar{1} + 4 && (\text{canal } u)
 \end{aligned} \tag{37}$$

Singularidades de $A(s, t)$ no canal s

$$s = 3m^2 - t \quad (\text{polo}) \quad (38)$$

$$s = -t, -t - 5m^2, \dots \quad (\text{pontos de ramificação}) \quad (39)$$

Singularidades de $A(s, t)$ no canal s

$$s = 3m^2 - t \quad (\text{polo}) \quad (38)$$

$$s = -t, -t - 5m^2, \dots \quad (\text{pontos de ramificação}) \quad (39)$$

Estrutura singular de $A(s, t)$ do canal s

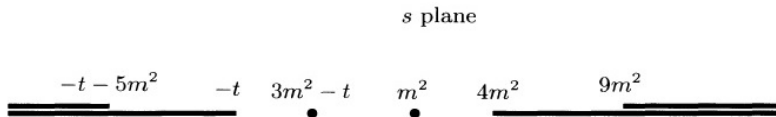


Figura: Singularidade da amplitude de espalhamento no canal s [2].

Teorema Froissart-Martin

Limite para a taxa de crescimento com a energia da seção de choque total

$$\sigma_{tot} \leq C \ln^2 s \quad (s \rightarrow \infty) \quad (40)$$

com C

$$C \geq \frac{\pi}{m_\pi^2} \quad (41)$$

Bibliografia

- [1] DONNACHIE, S. et al. Pomeron physics and QCD. New York: Cambridge University Press, 2002. 347p.
- [2] BARONE, V.; PREDAZZI, E. High-energy particle diffraction. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. 407p.