Eq. de Dirac com campo magnético

Rafael Cavagnoli

GAME: Grupo de Médias e Altas Energias

- Eletromagnetismo clássico
- Eq. de Schrödinger
- Partícula carregada em campo mag.
- Eq. de Dirac
- Partícula carregada em campo mag.

Partícula em campo magnético

O campo magnético não altera a energia cinética do sistema (=> campo elétrico, pois W_B =0), contudo altera a direção da velocidade (e do momentum linear):

$$\vec{F} = q\vec{E}_l + q\vec{v}\times\vec{B}$$

Se E = 0 temos um movimento circular (freq. de cíclotron):

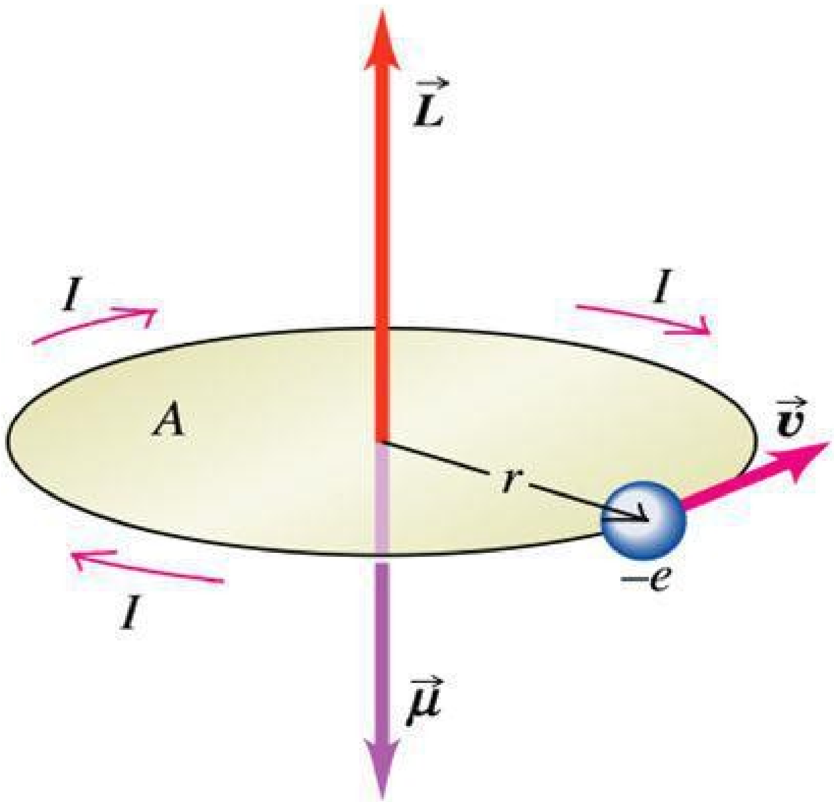
$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

Vamos escrever a hamiltoniana do sistema, ao invés de trabalhar com a Força de Lorentz.

$$H = K + U$$

Momento Dipolar Magnético Orbital

(versão pictórica de correntes amperianas)



$$T = 2\pi/\omega$$

$$v = 2\pi r/T.$$

$$\mu = I\,A = \frac{(-e)}{T}\pi\,r^2$$

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \text{periodo}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{(-e)}{2\pi\,r}v\pi\,r^2 = \frac{-erv}{2}$$

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{-e}{2m}\vec{L}}$$

Do modelo de Bohr: $$L = n\hbar$$

Então para n = 1, no caso de um elétron no nível fundamental:

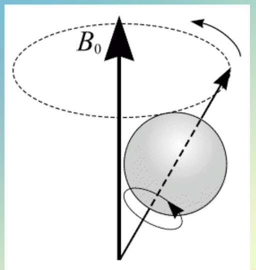
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

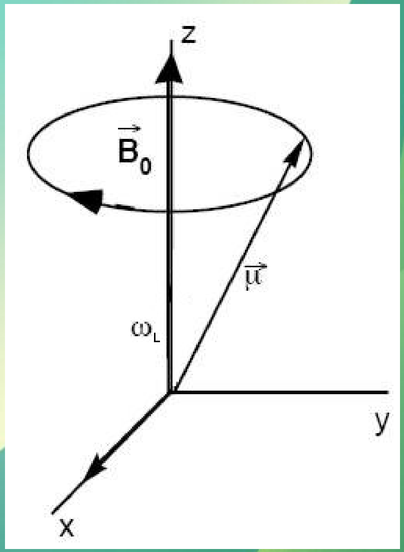
(magneton de Bohr)

$$\mu_B = 0{,}927\times10^{-23}\,A\,m^2 = 5{,}788\times10^{-5}\,eV/T$$

Precessão de Larmor: $$\omega_L = \frac{|q|B}{2m}$$

$$\vec{\mu}_l = -\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}$$





Em termos do potencial eletrostático:

$$\vec{E}_l = -\nabla V$$

$$U_{el} = qV(r)$$

De maneira análoga:

$$U_{mag} = -\vec{B} \cdot \vec{\mu}$$

$$U_{mag} = -\frac{q}{2m}\vec{B} \cdot \vec{L}$$

Hamiltoniana:

$$H = K + U$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(r) + \hat{U}_{mag}$$

Partícula livre carregada em campo E e B

$$\vec{E}_l = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \qquad ; \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Neste caso V não é mais eletrostático.

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + qV$$

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

Usando o princípio da correspondência (clássico → quântico):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}_{cin}^2 + q\hat{V}$$

$$\hat{p}_{tot} = -i\hbar\vec{\nabla} = \hat{p}_{cin} + q\hat{A}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{cin} = -i\hbar\hat{\boldsymbol{\nabla}} - q\hat{\boldsymbol{A}}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}_{cin}^{2} + q\hat{V}$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - qA\right]^2 + q\hat{V}}$$

Partícula livre e carregada sob influência de campos elétrico e magnético, <u>caso não-relativístico</u>.

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$p \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad ; \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$p \rightarrow -i\hbar\nabla - qA$$

Elétron livre num campo magnético uniforme

Podemos escrever o potencial vetor na forma:

$$\vec{A} = (0, B_0 x, 0) = B_0 x \hat{j}$$

tal que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0 \hat{k}$$

Hamiltoniana (com V = 0, pois E = 0):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - q\hat{\mathbf{A}}]^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\boldsymbol{p}} + e B_0 \hat{x} \hat{j}]^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}}^2 + eB_0\hat{\mathbf{p}}\hat{x}\hat{j} + eB_0\hat{x}\hat{j}\hat{\mathbf{p}} + e^2B_0{}^2\hat{x}^2]$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}}^2 + eB_0\hat{p}_y\hat{x} + eB_0\hat{x}\hat{p}_y + e^2B_0{}^2\hat{x}^2]$$

Lembrando que:

$$[x_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij} \quad ; \quad [x, p_y] = 0 \quad ; \quad p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}[p^2 + 2eB_0p_yx + e^2B_0{}^2x^2]}$$

Também temos que:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{O}]\rangle + \left(\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\right)$$

Se comuta com H, < O > é cte no tempo, há uma grandeza cujo valor esperado é conservada; também forma uma base com H; autofunções...

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2 + 2eB_0 p_y x + e^2 B_0{}^2 x^2]$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}[p_x{}^2 + p_z{}^2 + (p_y + eB_0 x)^2]$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieB_0}{\hbar}x\right)^2\right]}$$

Fazemos:

$$[p_i, H] = \frac{1}{2m}\left[2eB_0(p_i x p_y - x p_y p_i) + e^2 B_0^2(p_i x^2 - x^2 p_i)\right]$$

$$p_i x p_y - x p_y p_i = [p_i, x p_y] = -x[p_y, p_i] - [x, p_i]p_y$$

encontramos que p_y e p_z comutam com H...

Podemos escrever:

$$\Psi(x,y,z,t) = A e^{(i\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$$

Tomando a parte espacial, e escrevendo $p_i = \hbar k_i$

$$\boxed{\Psi(x,y,z) = \Psi(x)\, e^{i k_y y}\, e^{i k_z z}}$$

Com o hamiltoniano obtido anteriormente:

$$\boxed{\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i e B_0}{\hbar} x\right)^2\right]}$$

podemos aplicar em:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

obtendo:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}k_y^2 + \frac{e B_0}{m} x \hbar k_y + \frac{e^2 B_0^2 x^2}{2m}\right]\Psi(x) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\Psi(x)$$

a qual podemos escrever como:

$$\boxed{\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_c^2}{2}(x - x_0)^2\right]\Psi(x) = E' \Psi(x)}$$

que tem a forma da equação para o oscilador harmônico quântico ☺ (centrado em x_0), com frequência ω_c sendo:

$$x_0 = -\frac{\hbar k_y}{e B_0} = -\frac{p_y}{e B_0} \qquad ; \qquad \omega_c = \frac{e B_0}{m}$$

logo:

$$E' = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

com n = 0,1,2,3,...

Neste caso podemos escrever:

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

onde n representa os níveis de Landau.

(x_0 não comuta com y, o centro da “órbita” tem coordenada y que não é bem definida, k_y ou p_y é limitado pelo sistema)

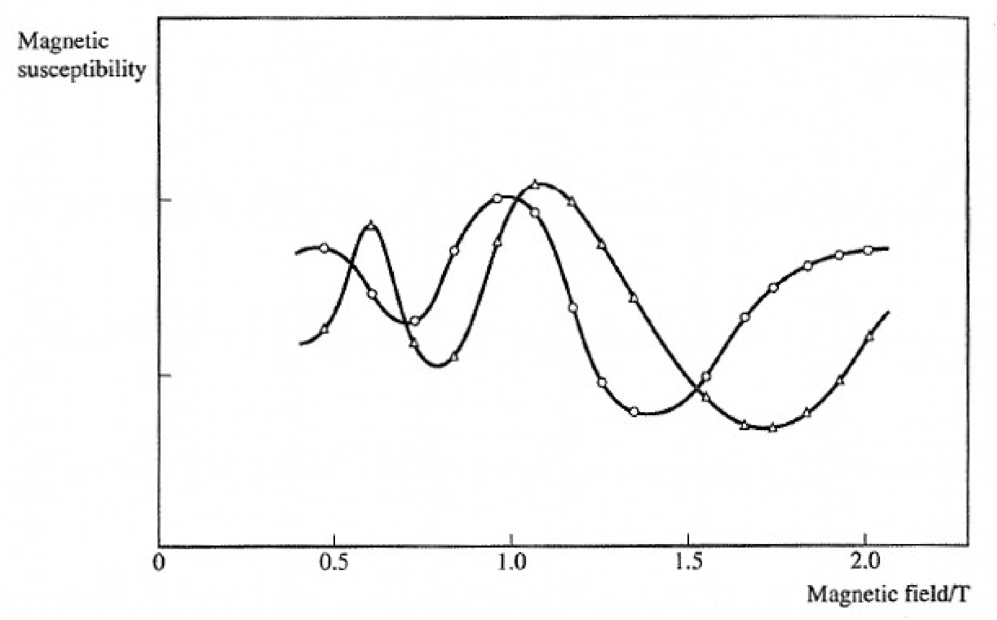


Figure 8.7 The original observation of the de Haas–van Alphen effect [9]: the oscillating dependence of the magnetic susceptibility of bismuth on the magnetic field, at a temperature of 14.2 K. The two sets of data correspond to two different orientations of the magnetic field relative to the axes of the crystal.

Caso relativístico – eq. de Dirac

- descreve férmions de spin ½
- energia relativística
- quadri-vetores
- invariância de Lorentz

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

usando unidades naturais (c = h = 1)

$$E^2 = p^2 + m^2$$

onde:

$$p^\mu = \left(p^0, \vec{p}\right) = \left(E/c, \vec{p}\right)$$

Através de:

$$\hat{\boldsymbol{p}} \rightarrow -i\hbar\hat{\boldsymbol{\nabla}} \quad ; \quad \hat{E} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Novamente usando:

$$H\Psi = E\Psi$$

obtém-se:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi + m^2 c^4 \Psi$$

que é a equação de Klein-Gordon, sendo posteriormente verificado que descreve partículas de spin 0.

Buscando uma equação linear em t, respeitando a energia relativística, Dirac então seguiu por outro caminho.

Lembrando que:

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0$$

Dirac propôs:

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = \left(\beta^i p_i + mc\right)\left(\gamma^j p_j - mc\right) = 0$$

$$p^{\mu} p_{\mu} - m^2 c^2 = (\beta^{\kappa} p_{\kappa} + mc)(\gamma^{\lambda} p_{\lambda} - mc) = 0$$

que fica:

$$\beta^{\kappa} \gamma^{\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda} - mc(\beta^{\kappa} - \gamma^{\kappa}) p_{\kappa} - m^2 c^2 = 0$$

Para resultar em:

$$p^{\mu} p_{\mu} - m^2 c^2 = 0$$

basta determinar β^{κ} , γ^{κ}. Como não interessam termos lineares em p_i, significa:

$$\beta^{\kappa} = \gamma^{\kappa}$$

$$\gamma^{\kappa} \gamma^{\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda} - m^2 c^2 = 0$$

$$p^{\mu} p_{\mu} = \gamma^{\kappa} \gamma^{\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda}$$

Abrindo a expressão acima, obtemos que os gamas são matrizes 4x4.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

onde as matrizes de Pauli são dadas por:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Deste modo, a equação:

$$(\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0$$

Pode ser escrita como:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0$$

de onde obtemos:

$$\left(\gamma^{\mu} p_{\mu} - mc\right) = 0$$

Voltando a usar a equação de autovalores e autofunções:

$$H\Psi = E\Psi$$

chegamos em:

$$\boxed{\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\Psi = 0}$$

eq. de Dirac

sendo agora:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

e

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_i\right)$$

Podemos escrever:

$$p^{\mu} \rightarrow p^{\mu} - \frac{q}{c} A^{\mu}$$

Na eq. de Dirac, de modo análogo ao efetuado na eq. de Schödinger:

$$[\gamma^{\mu} p_{\mu} - m c]\Psi = 0$$

resulta em:

$$\left[\gamma^{\mu}\left(p_{\mu} - \frac{q}{c} A_{\mu}\right) - mc\right]\Psi = 0$$

Em unidades naturais (c = h = 1 , sendo massa e momentum em MeV)

$$\left[\gamma^{\mu}\left(p_{\mu} - q A_{\mu}\right) - m\right]\Psi = 0$$

ou

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i \partial_{\mu} - q A_{\mu}\right) - m\right]\Psi = 0$$

Eq. de Dirac em campo magnético

►►►Na verdade usamos a eq. de Dirac para uma partícula livre com spin ½ e carga elétrica 'q' na presença de um campo magnético.

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\Psi = 0$$

De modo geral (com campo E_l e B):

agora temos quadri-potencial:

$$A^{\mu} = \left(cV, \vec{A}\right)$$

e o quadri-momentum:

$$p^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\left(E - cV\right), \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

sem campos:

$$\boxed{p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)} \quad \Rightarrow \quad p^{i} \rightarrow p^{i} - \frac{q}{c}\vec{A} \quad , \quad p^{0} \rightarrow p^{0} - V$$

Abrindo a eq.

$$(\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m)\Psi = 0$$

$$(\gamma^0(p_0-eA_0)-\gamma^1(p_1-eA_1)-\gamma^2(p_2-eA_2)-\gamma^3(p_3-eA_3)-m)\Psi = 0$$

Na ausência de campo elétrico ($A_0 = 0$)

$$\begin{pmatrix} (E-m) & -\sigma.(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) \\ \sigma.(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) & -(E+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0$$

onde:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver a eq. de autovalor:

$$(\sigma.(\mathbf{p}-e\mathbf{A}))^2 u_A = (E^2 - m^2)u_A$$

$$(\sigma.(\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 u_A = (E^2 - m^2) u_A$$

Para um campo uniforme na direção z, escolhemos:

$$\vec{B} = B\,\hat{k}$$

e em termos do quadri-potencial eletromagnético:

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0 \quad , \quad A_1 = -By$$

Assim:

$$(\sigma.(\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 = (\sigma_x(p_x + eBy) + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z)^2 =$$

$$\begin{aligned} &= p_x^2 + 2eByp_x + (eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2 + \sigma_x p_x \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x p_x \ + \\ &\quad + \sigma_x p_x \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x p_x + \sigma_y p_y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_y p_y \ + \\ &\quad + eB(\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y) + eB(\sigma_x y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x y). \end{aligned}$$

Usando as regras de comutação:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \ , \ \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

obtemos:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2eByp_x + (eBy)^2 + eB(\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y)$$

sendo o último termo:

$$eB\left[\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$eB\begin{pmatrix} iyp_y - ip_y y & 0 \\ 0 & -(iyp_y - ip_y y) \end{pmatrix} = ieB[y, p_y]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -eB\sigma_z.$$

Então:

$$p^2 + (eB)^2 y^2 + eB(2yp_x - \sigma_z)u_A = (E^2 - m^2)u_A,$$

Dando origem a duas equações por causa de σ_z

As coordenadas x^0 [t], x e z não aparecem explicitamente, suas soluções podem ser escritas como ondas planas. Assim podemos fazer:

$$u_A = \exp\{i(Et - p_x x - p_z z)\}F(y).$$

As duas equação se diferenciam pelos autovalores da matriz σ_z, ou seja s = ± 1. Usando regras de comutação para operadores p, podemos escrever as duas equações como:

$$\frac{d^2 F_s}{dy^2} - (eBy + p_x)^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)F_s = 0.$$

Fazendo uma substituição de variáveis:

$$(eBy+p_x) = v\sqrt{|e|B} \quad ; v = \frac{1}{\sqrt{|e|B}}(eBy+p_x) \quad ; dv = \sqrt{|e|B}dy,$$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dy} = \sqrt{|e|B}\frac{dF}{dv} \quad ; \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{d}{dy}\frac{dF}{dy} = \sqrt{|e|B}\frac{d}{dy}\frac{dF}{dv} = |e|B\frac{d^2F}{dv^2}$$

Então:

$$(|e|B)\frac{d^2 F_s}{dv^2} - (|e|B)v^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)F_s = 0.$$

$$\frac{d^2F_s}{dv^2} - v^2F_s + \frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)}F_s = 0.$$

Reescrevendo:

$$\boxed{\frac{d^2F_s}{d\xi^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \xi^2\right)F_s = 0}$$

☺ Esta equação possui a mesma forma da equação para o oscilador harmônico quântico. ☺

Livro do Eisberg:

The corresponding time independent Schroedinger equation is

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\pi^2 m\nu^2 x^2\psi = E\psi$$

or

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{2\pi m\nu}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi = 0$$

Define

$$\alpha \equiv 2\pi m\nu/\hbar, \qquad \beta \equiv 2mE/\hbar^2$$

Then the equation can be written

$$d^2\psi/dx^2 + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0$$

It is convenient to express this in terms of a new variable,

$$\xi \equiv \sqrt{\alpha}\, x$$

Then

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha}\,\frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{d\xi}{dx} = \alpha\,\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

$$\alpha\,\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\beta - \alpha\xi^2)\psi = 0$$

or

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \xi^2\right)\psi = 0$$

Assim, para que a solução exista temos a seguinte condição:

$$\frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)} = 2l + 1,$$

e os autovalores da energia passam a ser:

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2l+1)|e|B - eBs}$$

Tendo então que analisar os autovalores em função de l e s .

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad , \quad (\hbar = c = 1 \rightarrow \vec{p} = \vec{k})$$

Exemplos:

- l = 0 e s = 1 => $E = \sqrt{m^2 + p_z^2}$
- l = 0 e s = -1 => $E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2|e|B}$
- l = 1 e s = 1 =>

Por causa da degenerescência, podemos escrever a energia de um férmion de spin ½ num campo magnético uniforme em função de um único parâmetro:

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2\nu|e|B}$$

onde ν representa os níveis de Landau.

Próximo passo: estudar a densidade de estados para um gás de Férmi.

FIM !

OBRIGADO!!!

Alguns Links:

http://images.slideplayer.com.br/2/359061/slides/slide_4.jpg
http://www.usc.es/export/sites/default/gl/investigacion/riaidt/rm/rmn/imaxes/peonza.jpg
http://2.bp.blogspot.com/-yl_CgPaCG8U/ThyU_db4VSI/AAAAAAAAR-8/Nu1X19gjnfg/s1600/precesion+en+presencia+de+campo+magnetico.png